



دانشگاه گیلان  
1352-1974

چاپ اول

# نظریه اشتورم - لیوویل و کاربردهایش

تالیف:

م.ا.ا.ل گوایز

ترجمه:

دکتر مژگان اکبری خشکیبجاری

(استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان)

محدثه کشاورز

الهام یوسفی

مرکز نشر دانشگاه گیلان

نظریه اشتورم - لیوویل و کاربردهایش

# Sturm-Liouville Theory and its Applications

By:

M.A.A.I-Gwaiz

Translated by:

Mozhgan Akbari Khoshkebijari, Ph.D

Mohaddese Keshavarz, M.Sc

Elham Yousefi, M.Sc

University Of Guilan Press

$$\int_A \nabla F dV = \int_{\partial A} F \cdot n d\sigma \longrightarrow \int_{\partial A} dv = \int_{\partial A} dv$$

$$-(P \cdot Q) = -P \cdot v - Q \cdot v, -(P \cdot v \cdot Q) = -P \cdot v - Q \cdot v$$

$$|\langle \chi, \gamma \rangle| \leq \|\chi\| \|\gamma\|$$

$$\delta_n = \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} z(z^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} z(z^{-1})$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ترجمه دکتر مژگان اکبری خشکیبجاری، محدثه کشاورز، الهام یوسفی

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$$-(P \cdot Q) = -P \cdot v - Q \cdot v, -(P \cdot v \cdot Q) = -P \cdot v - Q \cdot v$$

$$|\langle \chi, \gamma \rangle| \leq \|\chi\| \|\gamma\|$$

$$\delta_n = \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} z(z^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} z(z^{-1})$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$



978600 1532672

ISBN :978-600-153-267-2



## نظریه اشتورم-لیوویل و کاربردهایش

تألیف:

م.ا.ال-گوایز

ترجمه:

دکتر مؤگان اکبری خشکبیجاری  
استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه گیلان  
محدثه کشاورز  
الهام یوسفی

مرکز نشر دانشگاه گیلان

۱۴۰۱



دانشگاه گیلان  
1353-1974

شابک: ۹۷۸ - ۶۰۰ - ۱۵۳ - ۲۶۷ - ۲

سرشناسه	: ال-گوايز، ام.ا.، ۱۹۴۲ - م. -Al-Gwaiz, M. A., 1942
عنوان و نام پدیدآور	: نظريه اشتورم- ليوويل و کاربردهايش/تاليف م.ا.ا. گوايز ؛ ترجمه مژگان اکبري خشکبيجاري، محدثه کشاورز ، الهام يوسفی ؛ ويراستار علمي ساناز لامعی جوان ؛ ويراستار ادبي فرشته رحمانی نژاد.
مشخصات نشر	: رشت: دانشگاه گیلان، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهري	: ۳۸۶ص.
شابک	: 978-600-153-267-2
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: عنوان اصلي: Sturm-Liouville theory and its applications,c2008.
یادداشت	: کتابنامه: ص. [۳۸۵] - ۳۸۶.
موضوع	: معادله اشتورم- ليوويل Sturm-Liouville equation
شناسه افزوده	: اکبري، مژگان، ۱۳۵۹ - مترجم
شناسه افزوده	: کشاورز، محدثه، ۱۳۶۸ - مترجم
شناسه افزوده	: يوسفی، الهام، ۱۳۷۲ - مترجم
شناسه افزوده	: لامعی، ساناز، ۱۳۵۸ - ، ويراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه گیلان
رده بندی کنگره	: QA۳۷۲
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۳۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۸۱۲۳۰۴
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیبا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

نام کتاب	: نظريه اشتورم-ليوويل و کاربردهايش
مؤلف	: ام.ا.ا. ال گوايز
مترجمان	: دكتر مژگان اكبري خشکبيجاري، محدثه کشاورز، الهام يوسفی
ويراستار علمي	: دكتر ساناز لامعی جوان
ويراستار ادبي	: فرشته رحمانی نژاد
نوبت چاپ	: اول، ۱۴۰۱
ناشر	: مرکز نشر دانشگاه گیلان

\* هر گونه چاپ و تکثیر صرفاً در اختیار مرکز نشر دانشگاه گیلان است.\*

# فهرست مطالب

۱	پیش‌گفتار
۷	۱ فضای ضرب داخلی
۷	۱.۱ فضای برداری
۱۵	۲.۱ فضای ضرب داخلی
۲۷	۳.۱ فضای $L^2$
۳۷	۴.۱ دنباله توابع
۵۳	۵.۱ همگرایی در $L^2$
۶۰	۶.۱ توابع متعامد
۶۷	۲ نظریه اشتروم-لیوویل
۶۸	۱.۲ معادله‌های خطی مرتبه دوم
۷۹	۲.۲ صفرهای جواب‌ها
۸۸	۳.۲ عملگر دیفرانسیل خودالحاق
۱۰۷	۴.۲ مسئله اشتروم-لیوویل
۱۰۹	۱.۴.۲ وجود توابع ویژه
۱۲۶	۲.۴.۲ تمامیت توابع ویژه
۱۴۰	۳.۴.۲ مسئله اشتروم-لیوویل تکین
۱۴۷	۳ سری‌های فوریه
۱۴۸	۱.۳ سری فوریه در $L^2$
۱۶۱	۲.۳ همگرایی نقطه‌به‌نقطه سری فوریه
۱۸۲	۳.۳ مسائل مقدار مرزی
۱۸۳	۱.۳.۳ معادله گرما
۱۹۱	۲.۳.۳ معادله موج

۲۰۱	چندجمله‌ای‌های متعامد	۴
۲۰۳	چندجمله‌ای‌های لژاندر	۱.۴
۲۱۰	ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر	۲.۴
۲۱۸	چندجمله‌ای‌های هرمیت و لاگر	۳.۴
۲۱۸	چندجمله‌ای‌های هرمیت	۱.۳.۴
۲۲۵	چندجمله‌ای‌های لاگر	۲.۳.۴
۲۲۹	کاربردهای فیزیکی	۴.۴
۲۲۹	معادلهٔ لاپلاس	۱.۴.۴
۲۳۷	نوسانگر هارمونیک	۲.۴.۴
۲۴۱	توابع بسل	۵
۲۴۱	تابع گاما	۱.۵
۲۴۶	توابع بسل نوع اول	۲.۵
۲۵۷	توابع بسل نوع دوم	۳.۵
۲۶۱	شکل‌های صحیح تابع بسل $J_n$	۴.۵
۲۶۵	ویژگی‌های تعامد	۵.۵
۲۷۹	تبدیل فوریه	۶
۲۷۹	تبدیل فوریه	۱.۶
۲۹۰	انتگرال فوریه	۲.۶
۳۰۹	ویژگی‌ها و کاربردها	۳.۶
۳۱۲	انتقال گرما در یک نوار نامتناهی	۱.۳.۶
۳۲۰	معادله‌های ناهمگن	۲.۳.۶
۳۳۱	تبدیلات لاپلاس	۷
۳۳۲	تبدیل لاپلاس	۱.۷
۳۴۰	ویژگی‌ها و کاربردها	۲.۷
۳۴۳	کاربردها در معادلات دیفرانسیل معمولی	۱.۲.۷
۳۵۲	معادلهٔ تلگراف	۲.۲.۷
۳۶۵	تمرین‌ها	۸

## پیش‌گفتار

این کتاب، بر پایهٔ یادداشت‌سخنرانی‌هایی است که من طی سال‌ها آموزش برای تدریس درس‌های روش‌های ریاضیات به دانشجویان ارشد ریاضی در دانشگاه کینگ‌سود<sup>۱</sup> استفاده کرده‌ام. این دوره در اینجا به‌عنوان پیش‌نیاز برای دریافت درس معادلات دیفرانسیل جزئی در سال آخر (چهارم) در دورهٔ کارشناسی ارائه می‌شود. این درس در ابتدا، برای پوشش دادن سه موضوع اصلی توابع ویژه، سری و انتگرال فوریه و طرح مختصری از مسئلهٔ اشتروم-لیوویل و راه‌حل‌های آن طراحی شده بود. با استفاده از تفکیک متغیرها برای حل یک مسئلهٔ مقدار مرزی برای یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم، اغلب به مسئلهٔ مقدار ویژهٔ اشتروم-لیوویل منجر می‌شود و مجموعه پاسخ‌ها چه بسا دنباله‌ای از توابع ویژه است؛ از این رو، این مباحث باهم در ارتباط هستند. به‌طور معمول، پاسخ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی می‌تواند (به‌صورت نقطه‌به‌نقطه) توسط یک سری فوریه یا یک انتگرال فوریه، بسته به متناهی یا نامتناهی بودن دامنه نشان داده شود.

ولی به‌زودی مشخص می‌شود که این روش‌های ریاضیات می‌تواند با ارائهٔ آنها در نظریهٔ اشتروم-لیوویل در  $L^2$ ، به یک دورهٔ هماهنگ و باورپذیر تبدیل شود. طبق این نظریه،

---

<sup>1</sup>King Saud

یک عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم خطی که خودالحاق است، دارای دنباله متعامد از توابع ویژه‌ای است که دامنه  $L^2$  را دربر می‌گیرد. این مطلب، بی‌درنگ به قضیه اساسی سری فوریه در  $L^2$  منجر می‌شود که در آن عملگر به اختصار  $d^2/dx^2$  است. سایر توابع ریاضی فیزیک، مانند چندجمله‌ای لژاندر<sup>۱</sup> و چندجمله‌ای هرمیت<sup>۲</sup> یا توابع بسل<sup>۳</sup>، به‌طور مشابه توابع ویژه عملگرهای دیفرانسیل خاص تولید می‌شوند. نتیجه یک نسخه کلی از نظریه کلاسیک سری‌های فوریه است که مباحث دوره یادشده در بالا را به هم پیوند می‌دهد و یک موضوع مشترک برای کتاب ارائه می‌دهد.

فصل نخست، توسط تعریف فضای ضرب داخلی توابع انتگرال‌پذیر مربعی  $L^2$  و ابزارهای تحلیل اساسی مورد نیاز در فصل‌های بعدی تنظیم شده است. این مطالب شامل ویژگی‌های همگرایی دنباله‌ها و سری‌های توابع و مفهوم مهم کامل بودن  $L^2$  است که از طریق دنباله‌های کوشی تعریف می‌شوند.

مشکل در ساخت آنالیز فوریه در نظریه اشتروم-لیوویل این است که دومی به‌شدت در آنالیز تابعی، به‌ویژه نظریه طیفی عملگرهای فشرده ریشه دارد که از حوصله یک دانشجوی دوره کارشناسی خارج است. ما به اثبات ساده‌تری از وجود و کامل بودن توابع ویژه نیاز داریم. در مورد مسئله اشتروم-لیوویل منظم، این امر در فصل دوم با استناد به قضیه وجود برای معادلات دیفرانسیل خطی با ایجاد تابع گرین<sup>۴</sup> برای عملگر اشتروم-لیوویل و سپس با

---

<sup>1</sup>Legendre

<sup>2</sup>Hermite

<sup>3</sup>Bessel

<sup>4</sup>Green

استفاده از قضیه آرزلا-آسکولی<sup>۱</sup> نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. این مطلب در بخش های ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲ در [۶] آمده است.

در فصل‌های سوم تا پنجم، کاربردهای ویژه نظریه اشتروم-لیوویل وجود دارد. فصل سوم، که سری فوریه است، نمونه بارز یک مسئله منظم اشتروم-لیوویل را ارائه می‌دهد. در این فصل نظریه نقطه به نقطه سری‌های فوریه نیز پوشش داده شده و قضیه کلاسیک (قضیه ۴.۲.۳) در این زمینه اثبات شده است. در حال حاضر، مزیت نظریه  $L^2$  از بیان ساده قضیه ۲.۱.۳ در مقایسه با گزاره قضیه ۴.۲.۳ مشهود است، که یک تابع را می‌توان با یک سری فوریه نشان داد، اگر و تنها اگر در  $L^2$  باشد.

در فصل چهارم و پنجم، درباره برخی از مهم‌ترین مثال‌های یک مسئله منحصربه‌فرد اشتروم-لیوویل بحث می‌کنیم. این گام، به چند جمله‌ای‌های متعامد و توابع بسط منجر می‌شود که برای دانشجویان علوم و مهندسی آشنا هستند. هر فصل، با استفاده از برخی معادله‌های معروف ریاضی فیزیک، از جمله معادله لاپلاس، معادله گرما و معادله موج به کار می‌رود.

فصل ششم و هفتم، درباره تحولات فوریه و لاپلاس بالفعل بخشی از نظریه اشتروم-لیوویل نیستند، ولی در اینجا به عنوان پسوند‌های روش سری فوریه برای نمایش توابع گنجانده شده‌اند. این‌ها در انتقال حرارت و انتقال سیگنال، کاربردهای مهمی دارند. همچنین، به ما امکان حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن را می‌دهند؛ موضوعی که در فصل‌های پیشین که بیشتر تاکید بر توابع ویژه است، مورد بحث قرار نگرفته است.

---

<sup>1</sup>Ascoli-Arzela



فرض بر این است که خواننده با ویژگی‌های همگرایی دنباله‌ها و سری توابع که معمولاً در محاسبات پیشرفته و با معادله‌های دیفرانسیل معمولی ابتدایی ارائه می‌شوند، آشنا است. افزون بر این، ما از برخی نتایج استاندارد تحلیل واقعی مانند چگالی توابع پیوسته در  $L^2$  و قضیه آرزلا-آسکولی استفاده کرده‌ایم. این موارد، برای اثبات وجود توابع ویژه برای عملگر اشتروم-لیوویل در فصل دوم به‌کار می‌رود و این مزیت را دارد که از نیاز به هرگونه اندازه‌گیری و اندازه‌لَبگ جلوگیری می‌کند. به همین دلیل است که شرایط همواری به ضرایب عملگر اشتروم-لیوویل اعمال می‌شود، وگرنه شرایط انتگرال‌پذیری کافی بود. تنها استثنا، قضیه همگرایی مغلوب است که در فصل ششم برای ایجاد پیوستگی تبدیل فوریه به‌کار رفته است. این یک نتیجه حاشیه‌ای خارج از چهارچوب نظریه اشتروم-لیوویل است و می‌توان به گونه دیگری آن را به‌کار برد، ولی امتحان استفاده از آن قضیه توانمند به‌عنوان میان‌بر سخت بود. این کتاب، در ادامه سبک ریاضی محض را نمایش می‌دهد، ولی این موضوع برای دانشجویان علوم و مهندسی مهم است. در این رشته‌ها، برای حل معادله‌های دیفرانسیل خطی از آنالیز فوریه و توابع ویژه به‌طور گسترده استفاده می‌شود، ولی تنها از طریق نظریه اشتروم-لیوویل در  $L^2$  است که می‌توان اصول زیربنایی دلیل کار این روش را روشن و کشف کرد. تعبیر نظری در فصل دوم برای دانشجویان خارج از ریاضیات که ممکن است با تجزیه و تحلیل مشکل داشته باشند مانعی ندارد. اثبات وجود و کامل بودن توابع ویژه (بخش‌های ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲) ممکن است توسط کسانی که بیشتر به نتایج نظریه علاقه‌مند هستند کنار گذاشته شود. ولی رویکرد عملگر نظری به معادلات دیفرانسیل در فضای هیلبرت در مکانیک کوانتوم، که در سطح کارشناسی معرفی می‌شود، بسیار راحت و کارساز

است و در مواردی که به نظر می‌رسد روشنی و هماهنگی را در سایر رشته‌ها به وجود می‌آورد، نباید از آن دوری کرد.

من گهگاه از نمادهای  $\Rightarrow$  (برای «نتیجه می‌گیریم») و  $\Leftrightarrow$  (برای «اگر و تنها اگر») برای پیوند گزاره‌های ریاضی استفاده کرده‌ام. این کار بیشتر به دلیل راحتی چاپ و اقتصاد واژگان استفاده می‌شود؛ به‌ویژه در مواردی که روابط نمایش داده‌شده دخیل باشد.

نخستین پیش‌نویس این کتاب، در تابستان ۲۰۰۵، زمانی که من در لبنان برای تعطیلات بودم، نوشته شد. من می‌خواهم از کتابدار دانشگاه آمریکایی بیروت سپاسگزاری کنم که به من اجازه داد در طول اقامتم از امکانات کتابخانه آنها استفاده کنم. شماری از همکاران در بخش ما، لطف داشتند نسخه‌های خطی و اشتباه چاپی را بررسی کردند و در مورد بخش‌هایی از آن نظر دادند؛ من از آنها سپاسگزارم. پروفیسور صالح السانوسی<sup>۱</sup> شماره‌های کتاب را تهیه کرد و دانشجوی پیشین من محمد بالفازه<sup>۲</sup> به من کمک کرد تا نرم‌افزار مورد استفاده در سری‌های سامس اسپرینگ<sup>۳</sup> را تنظیم کنم. بدون کمک آنها، توانایی انجام کارها را نداشتم. در پایان، می‌خواهم از کارن بورتویک<sup>۴</sup> در اسپرینگ‌ورلاگ<sup>۵</sup>، به دلیل برخورد مهربانانه او و از همه روابطی که زمینه‌ساز انتشار این کتاب شد، سپاسگزاری و قدردانی کنم.

---

<sup>1</sup> Saleh Elsanousi

<sup>2</sup> Mohammed Balfageh

<sup>3</sup> SUMS Springer

<sup>4</sup> Karen Borthwick

<sup>5</sup> Springer-Verlag



# فصل ۱

## فضای ضرب داخلی

فضای ضرب داخلی، تعمیم طبیعی فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  است که دارای ویژگی‌های توپولوژیکی و هندسی شناخته شده‌ای است. این چهارچوب یا مختصات بیشتر کارهای ما در این کتاب را تشکیل می‌دهد، زیرا ساختار ریاضی مناسبی را که به آن نیاز داریم، فراهم می‌کند.

### ۱.۱ فضای برداری

ما از نماد  $\mathbb{F}$  برای نشان دادن اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  یا میدان اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری خطی، یا به طور ساده‌تر فضای برداری، روی  $\mathbb{F}$  مجموعه‌ای مانند  $X$  است که برای آن دو عمل، جمع

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

و ضرب اسکالر

$$\cdot : F \times X \rightarrow X$$

تعریف شده است؛ به طوری که،

۱.  $X$  با عمل جمع، یک گروه جابه‌جایی است؛ به این معنا که،

$$\text{الف) به‌ازای هر } x \text{ و } y \text{ در } X \text{ داریم } x + y = y + x.$$

$$\text{ب) به‌ازای هر } x, y, z \text{ در } X \text{ داریم } x + (y + z) = (x + y) + z.$$

ج) عنصری در  $X$  است که با  $\cdot$  نشان داده می‌شود؛ به طوری که به‌ازای هر  $x$  از  $X$ ،  $x + \cdot = x$ .

د) به‌ازای هر  $x$  در  $X$ ، معکوس جمعی مانند  $-x \in X$  وجود دارد؛ به طوری که  $x + (-x) = \cdot$ .

۲. ضرب اسکالر بین عناصر  $\mathbb{F}$  و  $\mathbb{X}$  صدق می‌کند، وقتی که

$$\text{الف) به‌ازای هر } x \text{ در } X \text{ و هر دو عدد } a \text{ و } b \text{ از } \mathbb{F} \text{ داریم } a.(b.x) = (a.b).x,$$

$$\text{ب) به‌ازای هر } x \text{ در } X \text{ داریم } 1.x = x.$$

۳. دو خاصیت توزیع‌پذیری

$$\text{الف) } a.(x + y) = a.x + a.y$$

$$\text{ب) } (a + b).x = a.x + b.x$$

به‌ازای هر  $x$  و  $y$  در  $X$  و  $a$  و  $b$  در  $\mathbb{F}$  برقرار است.

$X$  را وابسته به اینکه  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  یا  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  باشد، یک فضای برداری حقیقی یا یک فضای

برداري مختلط می‌نامند. عناصر  $X$  بردارها و عناصر  $\mathbb{F}$  اسکالرها نامیده می‌شوند.

از این ویژگی‌ها می‌توان نشان داد که بردار صفر منحصر به فرد است و به‌ازای هر  $x$  در  $X$ ،

معکوس منحصر به فردی مانند  $-x$  وجود دارد. افزون بر این، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر  $x$

در  $X$ ،  $0 \cdot x = 0$  و  $(-1) \cdot x = -x$ ، و به ازای هر  $a \in F$ ،  $a \cdot 0 = 0$ .  
 به طور معمول، اغلب نقطه ضرب در  $a \cdot x$  را نمی‌گذاریم و به صورت  $ax$  می‌نویسیم.

مثال ۱.۱.۱.۱ (۱) مجموعه  $n$  تایی از اعداد حقیقی

$$\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},$$

که با جمع و ضرب اسکالر تعریف می‌شود:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n),$$

که در آن  $a \in \mathbb{R}$ ، یک فضای برداری حقیقی است.

(۲) مجموعه  $n$  تایی از اعداد مختلط

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}\},$$

با دو عمل

$$(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) = (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n),$$

$$a \cdot (z_1, \dots, z_n) = (az_1, \dots, az_n), \quad a \in \mathbb{C},$$

یک فضای برداری مختلط است.

(۳) مجموعه  $\mathbb{C}^n$  روی میدان  $\mathbb{R}$  یک فضای برداری حقیقی است.

(۴) فرض کنیم  $I$  یک بازه حقیقی است که ممکن است بسته، باز، نیمه‌باز، متناهی یا نامتناهی

باشد. مجموعه  $\rho(I)$ ، مجموعه چندجمله‌ای‌های روی  $I$  با ضرایب حقیقی (مختلط) را نشان می‌دهد که با عمل جمع چندجمله‌ای‌ها و ضرب اسکالر

$$b.(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = ba_n x^n + \dots + ba_1 x + ba_0,$$

که  $b$  یک عدد حقیقی (مختلط) است، یک فضای برداری حقیقی (مختلط) می‌شود، همچنین به صورت اختصار،  $\rho(\mathbb{R})$  را با  $\rho$  نشان می‌دهیم.

(۵) مجموع، توابع پیوسته حقیقی (مختلط) روی بازه حقیقی  $I$  که با  $C(I)$  نشان می‌دهیم، با دو عمل جمع توابع و ضرب یک تابع با عدد حقیقی (مختلط) یک فضای برداری حقیقی (مختلط) است.

فرض می‌کنیم  $\{x_1, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ای متناهی از بردارها در فضای برداری  $X$  است.

مجموع

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in \mathbb{F},$$

ترکیب خطی از بردارهای  $X$  نامیده می‌شود و اسکالره‌ای  $a_i$ ، ضرایب این ترکیب خطی هستند.

تعریف ۳.۱.۱. (۱) مجموعه‌ای متناهی از بردارهای  $\{x_1, \dots, x_n\}$  را مستقل خطی گوئیم،

اگر به ازای هر  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0,$$

یعنی هر ترکیب خطی از بردارها برابر با صفر نیست، به جز وقتی که همه ضرایب صفر هستند. مجموعه  $\{x_1, \dots, x_n\}$  وابسته خطی است؛ هرگاه مستقل خطی نباشد، یعنی، اگر یک مجموعه از ضرایب  $a_1, \dots, a_n$ ، که همه صفر نیستند، موجود باشد؛ به طوری که

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

(۲) مجموعه نامتناهی از بردارهای  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  مستقل خطی است هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از آن مستقل خطی باشد. آن بردار وابسته خطی است؛ هرگاه مستقل خطی نباشد، یعنی هرگاه زیرمجموعه ای متناهی  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  وجود داشته باشد که وابسته خطی است.

در اینجا باید توجه داشت که یک مجموعه متناهی از بردارها، وابسته خطی است، اگر و تنها اگر یکی از بردارها را بتوان به صورت یک ترکیب خطی از بقیه نوشت (تمرین ۳.۱ را ببینید).

**تعریف ۴.۱.۱.** فرض کنید  $X$  یک فضای برداری است.

(۱) مجموعه  $A$  از بردارهای  $X$  را مولد  $X$  گوئیم اگر هر بردار  $X$  را بتوان به صورت ترکیب خطی از عناصر  $A$  بیان کرد. افزون بر این، اگر بردارهای  $A$  مستقل خطی باشند، آنگاه  $A$  یک پایه از  $X$  نامیده می شود.

(۲) زیرمجموعه  $Y$  از  $X$  زیرفضای  $X$  نامیده می شود، هرگاه هر ترکیب خطی از بردارهای  $Y$  در  $Y$  قرار گیرند. این معادل با این گفته است که  $Y$  یک فضای برداری درون خود است (روی همان میدان اسکالر  $X$ ).

اگر  $X$  یک پایه متناهی داشته باشد آنگاه هر پایه دیگر  $X$  نیز متناهی است و هر دو



پایه تعداد عناصر یکسانی دارند (تمرین ۴.۱). این عدد، بُعد  $X$  نامیده می‌شود و آن را با  $\dim X$  نشان می‌دهیم. اگر پایه نامتناهی باشد،  $\dim X = \infty$  در نظر می‌گیریم.

در مثال ۲.۱.۱، بردارهای

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

⋮

$$e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

پایه‌ای برای  $\mathbb{R}^n$  روی  $\mathbb{R}$  و  $\mathbb{C}^n$  روی  $\mathbb{C}$  تشکیل می‌دهند. بردارهای

$$d_1 = (i, 0, \dots, 0),$$

$$d_2 = (0, i, 0, \dots, 0),$$

⋮

$$d_n = (0, \dots, 0, i),$$

همراه با  $e_1, \dots, e_n$  پایه‌ای برای  $\mathbb{C}^n$  روی  $\mathbb{R}$  تشکیل می‌دهند. از سوی دیگر، توان‌های

$$x \in \mathbb{R}$$

$$1, x, x^2, x^3, \dots,$$

$\rho$  را تولید می‌کنند و مستقل خطی می‌شوند (تمرین ۵.۱). آنها پایه‌ای برای فضای چندجمله‌ای‌های

حقیقی (مختلط) روی  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ) تشکیل می‌دهند. بنابراین، بُعد  $\mathbb{R}^n$  حقیقی و  $\mathbb{C}^n$  مختلط هر

دو  $n$  است، درحالی که  $\mathbb{C}^n$  حقیقی بُعد  $2n$  دارد. از سوی دیگر، فضای چند جمله‌ای‌ها، بُعد نامتناهی دارد. بنابراین، فضای توابع پیوسته  $C(I)$ ، وقتی که شامل تمام چندجمله‌ای‌های  $I$  می‌شود دارای بُعد نامتناهی است (تمرین ۴.۱).

فرض کنید  $\rho_n(I)$  فضای برداری چندجمله‌ای‌ها روی بازه  $I$  با درجه کوچک‌تر از  $n$  یا مساوی  $n$  باشد. واضح است که زیرفضای  $\rho(I)$  دارای بُعد  $n+1$  است. به‌طور مشابه، اگر مجموعه توابع (حقیقی یا مختلط) روی  $I$  که مشتقات اولش پیوسته هستند با  $\mathbb{C}^1(I)$  نشان دهیم، آن‌گاه، با عملگرهای جمع توابع و ضرب اسکالرها،  $\mathbb{C}^1(I)$  یک زیرفضای برداری از  $\mathbb{C}(I)$  روی همان میدان (حقیقی یا مختلط) است. پس به‌طور معمول، وقتی که  $I$  در یک (یا هر دو) نقاط انتهایی بسته باشد، مشتق آن در نقطه انتهایی مشتق یک‌طرفه است. به‌طور کلی، با تعریف

$$\mathbb{C}^n(I) = \{f \in \mathbb{C}(I) : f^{(n)} \in \mathbb{C}(I), n \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{C}^\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^n(I),$$

یک دنباله از فضای برداری

$$\mathbb{C}(I) \supset \mathbb{C}^1(I) \supset \mathbb{C}^2(I) \supset \dots \supset \mathbb{C}^\infty(I)$$

به‌دست می‌آوریم، به‌طوری که اگر  $k > m$  باشد،  $\mathbb{C}^k(I)$  یک زیر فضای برداری (محض) از  $\mathbb{C}^m(I)$  است. اینجا  $\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup 0$  و  $\{1, 2, 3, \dots\}$  مجموعه اعداد طبیعی است. مجموعه اعداد صحیح  $\{0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots\}$  با  $\mathbb{Z}$  نشان داده می‌شود. اگر  $\mathbb{C}^0(I)$  را با  $\mathbb{C}(I)$  یکی بگیریم، همه فضاها  $\mathbb{C}^n(I)$ ،  $n \in \mathbb{N}$ ، وقتی که هر یک شامل چندجمله‌ای‌های

$\rho(I)$  باشند، بُعد نامتناهی دارند. وقتی که  $I = \mathbb{R}$ ، یا وقتی که  $I$  مورد نیاز نیست، ما آن را به اختصار  $\mathbb{C}^n$  می‌نویسیم.

### تمرین‌ها

۱.۱. با استفاده از ویژگی‌های فضای برداری  $X$  روی  $F$ ، گزاره‌های زیر را اثبات کنید.

الف) به ازای هر  $x$  در  $X$  داریم  $0 \cdot x = 0$ .

ب) به ازای هر  $a$  در  $F$  داریم  $a \cdot 0 = 0$ .

ج) به ازای هر  $x$  در  $X$  داریم  $(-1) \cdot x = -x$ .

د) اگر  $a \cdot x = 0$  باشد، آنگاه یا  $a = 0$  یا  $x = 0$  است.

۲.۱. تعیین کنید کدامیک از مجموعه‌های زیر یک فضای برداری با دو عملگرهای جمع و

ضرب اسکار است، و آیا این فضای برداری حقیقی یا مختلط است.

الف)  $\rho_n(I)$  با ضرایب مختلط روی  $\mathbb{C}$ .

ب)  $\rho(I)$  با ضرایب موهومی روی  $\mathbb{R}$ .

ج) مجموعه اعداد حقیقی روی  $\mathbb{C}$ .

د) مجموعه توابع مختلط از کلاس  $\mathbb{C}^n(I)$  روی  $\mathbb{R}$ .

۳.۱. ثابت کنید که بردارهای  $x_1, \dots, x_n$  مستقل خطی هستند، اگر و تنها اگر یک عدد

صحیح  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  وجود داشته باشد، به طوری که

$$x_k = \sum_{i \neq k} a_i x_i, \quad a_i \in F.$$

نتیجه می‌گیریم که هر مجموعه از بردارها، چه متناهی یا نامتناهی، وابسته خطی است، اگر

و تنها اگر یکی از آن بردارها یک ترکیب خطی از بقیه بردارها باشد.

۴.۱. فرض کنید  $X$  یک فضای برداری است. نشان دهید که، اگر  $A$  و  $B$  پایه‌های  $X$  باشند

و یکی از آنها متناهی باشد، آنگاه دیگری نیز متناهی است و تعداد عناصر یکسانی دارند.

۵.۱. نشان دهید که هر مجموعه متناهی از توان‌های  $x$ ،  $\{1, x, x^2, \dots, x^n : x \in I\}$

مستقل خطی است. بنابراین، نتیجه بگیرید که مجموعه نامتناهی  $\{1, x, x^2, \dots : x \in I\}$

مستقل خطی است.

۶.۱. اگر  $Y$  زیرفضای، فضای برداری  $X$  باشد، نشان دهید که  $\dim Y \leq \dim X$  است.

۷.۱. نشان دهید که بردارهای

$$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}),$$

⋮

$$\mathbf{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{nn}),$$

که  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ ، وابسته خطی هستند، اگر و تنها اگر  $\det(x_{ij}) = 0$ ، که  $\det(x_{ij})$  دترمینان

ماتریس  $(x_{ij})$  است.

## ۲.۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید  $X$  یک فضای برداری روی  $F$  است. یک تابع از  $X \times X$  به  $F$

ضرب داخلی روی  $X$  نامیده می‌شود، اگر برای هر جفت از بردارهای  $x$  و  $y$  در  $X$ ، ضرب

داخلی  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in F$  در شرایط زیر صدق کند.

$$(1) \text{ به‌ازای هر } x \text{ و } y \text{ در } X, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

(۲) به ازای هر  $x, y, z$  در  $X$  و  $a$  و  $b$  در  $F$ ،  $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ .

(۳) به ازای هر  $x$  در  $X$ ،  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .

(۴)  $x = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0$ .

فضای برداری که روی آن ضرب داخلی تعریف شده است، فضای ضرب داخلی می نامند.

نماد  $\overline{\langle y, x \rangle}$  در (۱)، مزدوج مختلط  $\langle y, x \rangle$  را نشان می دهد، به طوری که  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  اگر  $X$  یک فضای برداری حقیقی باشد. توجه داشته باشید شرایط (۱) و (۲) اشاره دارند به

$$\langle x, ay \rangle = \overline{\langle ay, x \rangle} = \bar{a}\langle x, y \rangle.$$

این به معنای آن است که ویژگی خطی که در مولفه نخست ضرب داخلی برقرار است، همان طور که در (۲) بیان شده است، برای مولفه دوم به کار نمی رود، مگر اینکه  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  باشد.

**قضیه ۲.۲.۱** (نامساوی کوشی-بیناکوفسکی-شوارتز). اگر  $X$  فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به ازای هر  $x$  و  $y$  در  $X$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

برهان. اگر  $x = 0$  یا  $y = 0$ ، نتیجه واضح است؛ پس می توان فرض کرد که  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$ .

افزون بر این، هیچ یک از طرفین نامساوی با جانشین کردن  $x$  با  $ax$  که  $|a| = 1$  تحت تأثیر قرار نمی گیرد.  $a$  را طوری انتخاب می کنیم که  $\langle ax, y \rangle$  یک عدد حقیقی باشد، یعنی، اگر

وارد شود، فرض می‌کنیم  $\langle x, y \rangle$  یک عدد حقیقی است. با استفاده از ویژگی ضرب داخلی در بالا، برای هر عدد حقیقی  $t$  داریم:

$$0 \leq \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle t + \langle y, y \rangle t^2. \quad (1.1)$$

این یک عبارت حقیقی درجه دو بر حسب  $t$  است که به مینیمم آن،  $t = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  می‌رسد. با جای‌گذاری این مقدار  $t$  در (۱.۱) داریم:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle},$$

□

ازاین‌رو، به نامساوی مطلوب می‌رسیم.

حال نرم بردار  $x$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

ازاین‌رو، با توجه به شرط (۳) و (۴) به‌ازای هر  $x \in X$ ،  $\|x\| \geq 0$ ،  $\|x\| = 0$  اگر و تنها اگر  $x = 0$  باشد. نامساوی کوشی-بیناکوفسکی-شوارتز، که از این پس نامساوی کوشی-شوارتز می‌نامیم، برحسب نرم‌ها شکل زیر را خواهد یافت:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.1)$$

نتیجه ۱. اگر  $X$  یک فضای ضرب داخلی باشد، آنگاه به‌ازای هر  $x$  و  $y$  در  $X$ ،

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (3.1)$$

برهان. با تعریف نرم،

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

ولی با کمک نامساوی کوشی-شوارتز داریم  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$  بنابراین  $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle|$

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

با جذرگیری از طرفین نامساوی بالا، نامساوی (۳.۱) حاصل می‌شود.  $\square$

با تعریف کردن فاصله بین بردارهای  $x$  و  $y$  که برابر با  $\|x - y\|$  می‌شود، می‌بینیم که

برای هر سه بردار  $x, y, z$  در  $X$  داریم:

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\|.\end{aligned}$$

این نامساوی، با توسیع (۳.۱)، نامساوی مثلثی نامیده می‌شود، زیرا یک نامساوی معروف بین اضلاع یک مثلث در صفحه که رئوس‌شان نقاط  $x, y, z$  هستند را تعمیم می‌دهد. فضای ضرب داخلی  $X$  یک فضای توپولوژیکی است، که توپولوژی توسط نرم  $\|\cdot\|$  تعریف شده و از فضای ضرب داخلی  $(\cdot, \cdot)$  گرفته شده است.

مثال ۳.۲.۱ الف) در  $\mathbb{R}^n$  ضرب داخلی بردارهای

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

به وسیله

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (۴.۱)$$

تعریف می‌شود که اشاره دارد به

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

در این توپولوژی، فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  مشابه فضای اقلیدسی  $n$ -بعدی است. توجه داریم که انتخاب‌های دیگری برای تعریف کردن ضرب داخلی  $\langle x, y \rangle$  وجود دارد، مانند  $c(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$  که  $c$  عدد مثبت است یا  $c_1 x_1 y_1 + \dots + c_n x_n y_n$  که به ازای هر  $i$ ،  $c_i > 0$  در هریک از دو حالت شرایط تعریف ۱.۲.۱ همگی صدق می‌کنند اما فضای ضرب داخلی در کل اقلیدسی نیست.

ب) در  $\mathbb{C}^n$  تعریف می‌کنیم:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n \quad (۵.۱)$$

برای هر زوج  $z, w \in \mathbb{C}^n$ . در نتیجه،

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$



ج) رابطه ۱.۲.۱ یک انتخاب معمول برای تعریف ضرب داخلی روی  $C([a, b])$  است:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in C([a, b]), \quad (۶.۱)$$

به طوری که

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

این یک مسئله ساده است که ویژگی‌های (۱) تا (۴) ضرب داخلی را به شرط آنکه  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$  وقتی که فضای برداری  $\mathbb{C}^n$  یا  $C(a, b)$  مختلط است، بررسی کنیم. برای بررسی شرط (۴) برای مثال ۳.۲.۱ (ج)، باید نشان دهیم که به ازای هر  $x \in [a, b]$

$$\left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

ما تنها کافی است،  $(\Rightarrow)$  را بررسی کنیم، اثبات در حالت  $(\Leftarrow)$  بدیهی است. ولی از خاصیت معروف توابع پیوسته و نامنفی این نتیجه حاصل می‌شود: اگر  $\varphi$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد،  $\varphi \geq 0$  و  $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$ ، آنگاه  $\varphi = 0$  (برای مثال [۱] را ببینید). چون  $|f|^2$  به ازای هر  $f \in C([a, b])$  پیوسته و نامنفی است، داریم:

$$\|f\| = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow |f|^2 = 0 \Rightarrow f = 0.$$

در این مطالعه، ما با فضاهای تابع که روی ضرب داخلی از نوع ۲.۲.۱ تعریف شده است، سروکار داریم. افزون بر ساختار توپولوژیکی که از نرم  $\|\cdot\|$  به دست می‌آید، این ضرب داخلی فضایی با ساختار هندسی القا می‌کند که برخی مفاهیم مطلوب را گسترش می‌دهد مانند تعامد، از فضای اقلیدسی به فضا با بُعد نامتناهی. این فضا در بخش (۳.۱) مورد

بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا ما فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگرچه ما نامساوی کوشی - شوارتز و نامساوی مثلثی را برای هر ضرب داخلی در قضیه ۲.۲.۱ و نتیجه آن ثابت کردیم، همچنین، می‌توانیم این نامساوی را به‌طور مستقیم در  $\mathbb{R}^n$  به‌دست آوریم. نامساوی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (۷.۱)$$

که برای هر زوج اعداد حقیقی  $a$  و  $b$  برقرار است. فرض کنید:

$$a = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, \quad b = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}.$$

اگر  $\sum_{j=1}^n x_j^2 \neq 0$  و  $\sum_{j=1}^n y_j^2 \neq 0$ ، آنگاه ۷.۱ اشاره دارد به

$$\frac{x_i y_i}{\sqrt{\sum x_j^2} \sqrt{\sum y_j^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sum x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\sum y_j^2},$$

که مجموع روی اندیس  $j$  از ۱ تا  $n$  است. پس از جمع‌کردن روی  $i$  از ۱ تا  $n$ ، سمت راست این نامساوی به یک تبدیل می‌شود و به‌دست می‌آوریم:

$$\sum x_i y_j \leq \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_j^2}.$$

این نامساوی صرف نظر از علامت‌های مثبت و منفی  $x_i$  و  $y_j$  نیز معتبر است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$|\sum x_i y_j| \leq \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_j^2}$$

به‌ازای هر  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}$  و  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \neq \mathbf{0}$  در  $\mathbb{R}^n$ . ولی چون نامساوی هر یک از  $\|\mathbf{x}\|$  یا  $\|\mathbf{y}\|$  صفر باشد مساوی است، این نامساوی کوشی-شوارتز

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

را به‌ازای هر  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  ثابت می‌کند.

از این رابطه بی‌درنگ، نامساوی مثلثی  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  نتیجه می‌شود.

اکنون زاویه  $\theta \in [0, \pi]$  را بین هر دو بردار ناصفر  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  در  $\mathbb{R}^n$  با معادله

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

تعریف می‌کنیم.

چون تابع  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  یک‌به‌یک است، این زاویه  $\theta$  را به‌طور منحصر‌به‌فرد

و موافق با تعریف معمول زاویه بین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  در هر دوی  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  تعریف می‌کند. با  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

و  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0,$$

که این شرطی برای بردارهای  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  است که متعامد باشند. در نتیجه، تعریف زیر را

می‌پذیریم.

تعریف ۴.۲.۱ (الف) به یک زوج از بردارهای غیرصفر  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  در فضای ضرب داخلی  $X$

متعامد گفته می‌شود، اگر  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ؛ که به‌طور نمادین با  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  بیان می‌شود. مجموعه

بردارهای غیرصفر  $\nu$  در  $X$  متعامد هستند، اگر هر زوج در  $\nu$  متعامد باشد.

(ب) مجموعه متعامد  $\nu \subseteq X$  را متعامد یکه می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر  $\mathbf{x} \in \nu$ ،  $\|\mathbf{x}\| = 1$ .

مثال رایج از مجموعه متعامد در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  معین می‌شود با:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1),$$

که همان‌طور که پیش از این دیده‌ایم، یک پایه از  $\mathbb{R}^n$  تشکیل می‌دهد.

در حالت کلی، اگر بردارهای

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \quad (۸.۱)$$

در فضای ضرب داخلی  $X$  متعامد باشند، آنگاه آنها لزوماً مستقل خطی‌اند. برای دیدن آن،

فرض کنید

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{F},$$

و ضرب داخلی طرفین این معادله را با  $\mathbf{x}_k$ ،  $1 \leq k \leq n$  در نظر می‌گیریم. زیرا به‌ازای

هر  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ،  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k \rangle = 0$ ،  $i \neq k$  و  $a_k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle = 0$  به‌دست می‌آوریم

$$a_k \|\mathbf{x}_k\|^2 = 0.$$

در نتیجه، به‌ازای هر  $k$ ،  $a_k = 0$ . با تقسیم‌کردن هر بردار در (۸.۱) بر نرمش، مجموعه متعامد یکه  $\{\mathbf{x}_i / \|\mathbf{x}_i\| : 1 \leq i \leq n\}$

را به‌دست می‌آوریم.

به فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  برگردید و فرض کنید که  $\mathbf{x}$  برداری در  $\mathbb{R}^n$  باشد. می‌توانیم آن

را برحسب پایه  $\{e_1, \dots, e_n\}$  با

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (9.1)$$

نمایش دهیم. با در نظر گرفتن ضرب داخلی معادله (9.1) با  $e_k$  و با استفاده از خاصیت متعامد یکته  $\{e_i\}$ ،

$$\langle \mathbf{x}, e_k \rangle = a_k, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

این ضرایب  $a_i$  در (9.1) را تعیین می‌کند و به این معنی است که هر بردار  $x$  در  $\mathbb{R}^n$  با فرمول زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, e_i \rangle e_i.$$

عدد  $\langle \mathbf{x}, e_i \rangle$  تصویر  $\mathbf{x}$  روی  $e_i$  نامیده می‌شود و  $\langle \mathbf{x}, e_i \rangle e_i$  بردار تصویر در جهت  $e_i$  است. به طور کلی، اگر بردارهای غیرصفر  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  در فضای ضرب داخلی  $X$  باشند، آنگاه

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \|\mathbf{y}\|$  تصویر  $\mathbf{x}$  روی  $\mathbf{y}$  است و بردار

$$\left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\rangle \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}$$

بردار تصویر  $\mathbf{x}$  در امتداد  $\mathbf{y}$  است.

فرض کنید که  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در فضای ضرب

داخلی  $X$  داریم. آیا می‌توانیم یک مجموعه متعامد بیرون از این مجموعه تشکیل دهیم؟

در ادامه مطلب، روش گرام-اشمیت را برای ساختن یک مجموعه متعامد  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$

بیرون از  $\{\mathbf{x}_i\}$  با داشتن همان تعداد از بردارها انجام می‌دهیم.

نخست قرار دهید:

$$y_1 = x.$$

بردار دوم از کم کردن تصویر بردار  $x_2$  در جهت  $y_1$  از  $x_2$  به دست می آید:

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1.$$

بردار سوم برابر با  $x_3$  منهای تصویر  $x_3$  از جهت های  $y_1$  و  $y_2$  است:

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2.$$

با ادامه این روند، داریم:

$$y_n = x_n - \frac{\langle x_n, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \dots - \frac{\langle x_n, y_{n-1} \rangle}{\|y_{n-1}\|^2} y_{n-1},$$

در نتیجه، خواننده می تواند نشان دهد که مجموعه  $\{y_1, \dots, y_n\}$  متعامد است.

### تمرین ها

۸.۱. دو بردار  $x$  و  $y$  در فضای ضرب داخلی داده شده است. با چه شرایطی تساوی

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

برقرار است؟ آیا این تساوی حتی اگر بردارها متعامد نباشد،

برقرار است؟

۹.۱. فرض کنید  $x, y \in X$ ، که  $X$  یک فضای ضرب داخلی است.

الف) اگر بردارهای  $x$  و  $y$  مستقل خطی باشند، ثابت کنید که  $x + y$  و  $x - y$  نیز

مستقل خطی اند.

(ب) اگر  $x$  و  $y$  متعامد و ناصفر باشند، چه زمانی  $x + y$  و  $x - y$  متعامدند؟

۱۰.۱. فرض کنید  $\varphi_1(x) = 1$ ،  $\varphi_2(x) = x$ ،  $\varphi_3(x) = x^2$ ،  $0 \leq x < 1$  است. با

استفاده از (۶.۱) محاسبه کنید:

(الف)  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ .

(ب)  $\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle$ .

(ج)  $\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2$ .

(د)  $\|2\varphi_1 - 3\varphi_2\|^2$ .

۱۱.۱. همه زوج‌های متعامد روی بازه  $[0, 1]$  را از میان توابع  $\varphi_1(x) = 1$ ،  $\varphi_2(x) = x$ ،

$\varphi_3(x) = \sin 2\pi x$ ،  $\varphi_4(x) = \cos 2\pi x$  تعیین نمایید. بزرگ‌ترین زیرمجموعه متعامد

$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$  است؟

۱۲.۱. تصویر  $f(x) = \cos^2(x)$  را روی هر کدام از توابع  $f_1(x) = 1$ ،  $f_2(x) = \cos x$ ،

$f_3(x) = \cos 2x$ ،  $-\pi \leq x \leq \pi$  تعیین نمایید.

۱۳.۱. ثابت کنید توابع  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  در تمرین ۱۰.۱ مستقل خطی اند و با استفاده از روش

گرام-اشمیت یک مجموعه متعامد متناظر به آن را بسازید.

۱۴.۱. نشان دهید که مجموعه توابع  $\{1, x, |x|\}$  روی بازه  $[0, 1]$  مستقل خطی اند، و یک

مجموعه متعامد یکه متناظر با آن را بسازید. آیا مجموعه‌ای مستقل خطی در  $[0, 1]$  وجود

دارد؟

۱۵.۱. با استفاده از نتیجه تمرین ۳.۱ و ویژگی درمیان‌ها ثابت کنید که هر مجموعه از

توابع  $\{f_1, \dots, f_n\}$  در  $C^{n-1}(I)$ ، فاصله حقیقی است، وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر روی  $I$ ،  $\det(f_i^{(j)}) = 0$  باشد که  $1 \leq i \leq n$ ،  $0 \leq j \leq n-1$ .  
 ۱۶.۱. نشان دهید که توابع زیر روی  $[-1, 1]$  متعامدند.

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x^2 + \frac{1}{3}, \quad \varphi_3(x) = \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

مجموعه متعامد یکه متناظر را مشخص کنید.

۱۷.۱. مقادیر ضرایب  $a$  و  $b$  را به گونه ای تعیین کنید که تابع  $x^2 + ax + b$  با هر دو بردار

$x+1$  و  $x-1$  روی  $[0, 1]$  متعامد باشد.

۱۸.۱. با استفاده از تعریف بیان شده از ضرب داخلی توسط معادله (۶.۱)، نشان دهید که

$\|f\| = 0$  لزوماً به  $f = 0$  اشاره ندارد، مگر اینکه  $f$  پیوسته باشد.

### ۳.۱ فضای $L^2$

برای هر دو تابع  $f$  و  $g$  در فضای برداری  $C([a, b])$  از توابع پیوسته مختلط روی بازه حقیقی

$[a, b]$ ، مانند  $\mathbb{R}^n$ ، ضرب داخلی را به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (10.1)$$

تعریف می‌کنیم که از آن تعریف نرم

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (11.1)$$



نتیجه می‌شود. همچنین، می‌توانیم به‌طور مستقیم نشان دهیم که نامساوی کوشی-شوارتز در  $C([a, b])$  برقرار است. برای هر  $f, g \in C([a, b])$  داریم:

$$\left| \frac{\|f\|}{\|g\|} - \frac{\|g\|}{\|f\|} \right|^2 = \int_a^b \left[ \frac{|f(x)|}{\|f\|} - \frac{|g(x)|}{\|g\|} \right]^2 dx \geq 0.$$

فرض می‌کنیم که  $\|f\| \neq 0$  و  $\|g\| \neq 0$ . از این رو،

$$\int_a^b \frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|\|g\|} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\|f\|^2}} \int_a^b |f(x)|^2 dx + \frac{1}{\sqrt{\|g\|^2}} \int_a^b |g(x)|^2 dx = 1 \\ \implies \langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|\|g\|.$$

با استفاده از ویژگی یکنوایی انتگرال

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx.$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$|\langle f, g \rangle| \leq \langle |f|, |g| \rangle \leq \|f\|\|g\|.$$

اگر هرکدام از  $\|f\| = 0$  یا  $\|g\| = 0$  باشد، نامساوی همچنان معتبر است و به تساوی تبدیل می‌شود. نامساوی مثلی

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

به‌آسانی از رابطه  $f\bar{g} + \bar{f}g = 2\operatorname{Re}f\bar{g} \leq 2|fg|$  به دست می‌آید.

همان‌طور که پیش از این مشاهده شد، عدد نامنفی  $\|f - g\|$  می‌تواند به‌عنوان یک اندازه

از فاصله بین توابع  $f, g \in C([a, b])$  در نظر گرفته شود. در این حالت به وضوح داریم  $\|f - g\| = 0$  اگر و تنها اگر  $f = g$  روی  $[a, b]$  باشد. این مزیت توابع پیوسته است که با آن سروکار داریم، زیرا اگر توابع ناپیوسته را بپذیریم، مثل

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in (1, 2] \end{cases}, \quad (12.1)$$

آن‌گاه  $\|h\| = 0$ ، در حالی که  $h \neq 0$ .

با وجود این،  $C([a, b])$  فضای ضرب داخلی مناسب برای ادامه مطالعه نیست، همان‌طور که در بخش بعدی نشان می‌دهیم، تحت عملیات حد بسته نیست. یعنی، اگر یک دنباله از توابع در  $C([a, b])$  همگرا باشد (به صورتی که در بخش ۴.۱ تعریف خواهیم کرد) حد آن ممکن است در  $C([a, b])$  نباشد. بنابراین، ما نیاز داریم که فضای توابع پیوسته را روی  $[a, b]$  به منظور جلوگیری از این مشکل بزرگ‌تر کنیم، ولی در این فضای بزرگ‌تر، آن را  $X([a, b])$  می‌نامیم. تنها توابعی را می‌توانیم بپذیریم که ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

برای هر دو زوج  $f, g \in X([a, b])$  تعریف شده باشد. حال نامساوی کوشی-شوارتز  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$  تضمین می‌کند که ضرب داخلی  $f$  و  $g$  اگر  $\|f\|$  و  $\|g\|$  وجود داشته باشند، خوش‌تعریف است (یعنی اگر  $|f|^2$  و  $|g|^2$  انتگرال‌پذیر باشند). اگر بخواهیم دقیق شویم، این فقط درست است، اگر انتگرال‌ها به‌عنوان انتگرال لبگ تفسیر شوند، انتگرال‌پذیری ریمان  $f^2$  و  $g^2$ ، انتگرال‌پذیری ریمان  $fg$  را تضمین نمی‌کنند (تمرین ۲۱.۱ را ببینید)، ولی در این مطالعه، توابعی را که به مفهوم لبگ انتگرال‌پذیرند ولی به مفهوم ریمان

انتگرال‌پذیر نیستند، در نظر نمی‌گیریم. برای رسیدن به هدفمان، انتگرال ریمان و گسترش آن به انتگرال‌های ناسره کافی است. فضای  $X([a, b])$  که ما در پی آن هستیم، باید از توابع  $f$  که  $f^2$  روی  $[a, b]$  انتگرال‌پذیر است، ترکیب شده باشد.

از نماد  $L^1(a, b)$  برای نشان دادن مجموعه توابع  $\mathbb{C} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  به طوری که

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

استفاده می‌کنیم.

با تعریف ضرب داخلی ۱۰.۱ و نرم ۱۱.۱ روی  $L^1(a, b)$ ، ما می‌توانیم از نامساوی مثلث برای به دست آوردن

$$\begin{aligned} \|\alpha f + \beta g\| &\leq \|\alpha f\| + \|\beta g\| \\ &= |\alpha| \|f\| + |\beta| \|g\| \end{aligned}$$

به ازای هر  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in L^1(a, b)$  استفاده کنیم.

از این رو، اگر  $f, g \in L^1(a, b)$ ، آن‌گاه  $\alpha f + \beta g \in L^1(a, b)$ . بنابراین، فضای  $L^1(a, b)$  برداری خطی است، که با ضرب داخلی ۱۰.۱، به یک فضای ضرب داخلی تبدیل می‌شود و شامل  $C([a, b])$  به عنوان یک زیرفضای سره است.

در  $L^1(a, b)$  تساوی  $\|f\| = 0$  لزوماً به این معنا نیست که در هر نقطه  $x \in [a, b]$ ،  $f(x) = 0$  باشد. برای مثال، در حالتی که  $f(x) = 0$  تقریباً روی یک تعداد متناهی از نقاط در  $[a, b]$  به وضوح داریم  $\|f\| = 0$ . می‌گوییم که  $f$  نقطه‌به‌نقطه روی فاصله حقیقی  $I$  برابر صفر است، هرگاه برای هر  $x \in I$ ،  $f(x) = 0$  اگر  $\|f\| = 0$ ، می‌گوییم که در  $L^1(a, b)$ ،

$f = 0$  است. بنابراین، تابع  $h$  تعریف شده در (۱۲.۱) در  $L^p(I)$  برابر صفر است، ولی نه نقطه به نقطه. تابع صفر در  $L^p(I)$ ، یک کلاس هم‌ارزی از توابع را نشان می‌دهد که هر یک از آنها نرم صفر دارد. تابعی که نقطه‌ای برابر صفر است فقط یک عضو است، واضح است فقط عضو پیوسته، از آن کلاس است. به‌طور مشابه، گوییم که دو تابع  $f$  و  $g$  که در  $L^p(I)$  قرار دارند در  $L^p(I)$  برابر هستند، هرگاه  $\|f - g\| = 0$ ، اگرچه  $f$  و  $g$  نمی‌توانند روی  $I$  نقطه‌ای برابر باشند. در اصطلاحات نظریه اندازه گفته می‌شود که  $f$  و  $g$  تقریباً همه‌جا برابر است. از این رو، فضای  $L^p(a, b)$  در حقیقت ساخته شده از کلاس‌های هم‌ارزی از توابع تعریف شده است، به طوری که  $L^p(a, b)$ ، یعنی، توابعی که تقریباً در همه‌جا برابرند.

ما تاکنون از نماد  $L^p(a, b)$  برای نشان دادن فضای خطی توابع  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  به طوری که  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$  باشد، استفاده کردیم، ولی چون این انتگرال تحت تاثیر تعویض فاصله بسته  $[a, b]$  با  $[a, b]$ ،  $(a, b)$  یا  $(a, b)$  نیست،  $L^p(a, b)$  منطبق بر  $L^p([a, b])$ ،  $L^p((a, b))$  و  $L^p((a, b))$  می‌شود. فاصله  $(a, b)$  نیازی نیست که در یکی یا هر دو انتها کران‌دار باشد و بنابراین،  $L^p(a, \infty)$ ،  $L^p(-\infty, b)$  و  $L^p(-\infty, \infty) = L^p(\mathbb{R})$  را داریم. در چنین حالت‌هایی، مثل حالتی که تابع غیرکران‌دار است، انتگرال  $|f|^p$  را روی  $(a, b)$  به عنوان انتگرال ریمان ناسره تفسیر می‌کنیم. گاهی وقت‌ها برای سادگی می‌نویسیم  $L^p$  وقتی که فاصله مربوطه مشخص نیست، یا به بحث مربوط نمی‌شود.

مثال ۱.۳.۱. هر تابعی که متعلق به  $L^p$  است را تعیین و نرم آن را محاسبه کنید.

$$(۱) \quad h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$(۲) \quad f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad 0 < x < 1.$$

$$(۳) \quad f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad 0 < x < 1.$$

$$(۴) \quad f(x) = 1/x, \quad 1 < x < \infty.$$

حل:

(۱)

$$\|f\|^r = \int_0^1 f^r(x) dx = \int_0^1 dx = \frac{1}{r}$$

بنابراین،  $f \in L^r(0, 1)$  و  $\|f\| = 1/\sqrt[r]{r}$ .

(۲)

$$\begin{aligned} \|f\|^r &= \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log \varepsilon = \infty \\ &\Rightarrow f \notin L^r(0, 1). \end{aligned}$$

(۳)

$$\begin{aligned} \|f\|^r &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{r/r}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} r(1 - \varepsilon^{1/r}) = r \\ &\Rightarrow f \in L^r(0, 1), \quad \|f\| = \sqrt[r]{r}. \end{aligned}$$

(۴)

$$\begin{aligned} \|f\|^r &= \int_1^\infty \frac{1}{x^r} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1}\right) = 1 \\ &\Rightarrow f \in L^r(1, \infty), \quad \|f\| = 1. \end{aligned}$$

مثال ۲.۳.۱. مجموعه نامتناهی از توابع  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$  در فضای ضرب داخلی حقیقی  $L^2(-\pi, \pi)$  متعامدند، که با محاسبه ضرب داخلی از هر زوج در مجموعه حاصل می‌شود.

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \langle \cos nx, \cos mx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sin nx, \sin mx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx \\ &= 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

$$\langle \cos nx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

زیرا  $\cos nx \sin mx$  تابع فرد است. افزون بر این،

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos nx\| = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx \right]^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

$$\|\sin nx\| = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \right]^{1/2} = \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین، مجموعه

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\},$$

که با تقسیم کردن هر تابع در مجموعه متعامد توسط نرم‌شان به دست آمده است، در  $L^2(-\pi, \pi)$  متعامد یکه است.

مثال ۳.۳.۱. مجموعه توابع

$$\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, e^{-ix}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{ix}, \dots\}$$

در فضای مختلط  $L^2(-\pi, \pi)$  متعامدند، زیرا به‌ازای هر  $n \neq m$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

با تقسیم کردن توابع در این مجموعه با

$$\|e^{inx}\| = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx \right]^{1/2} = \sqrt{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

مجموعه متعامد یکه متناظر

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

به دست می آید.

اگر  $\rho$  یک تابع پیوسته مثبت روی  $(a, b)$  باشد، ضرب داخلی دو تابع  $f, g \in C(a, b)$

نسبت به تابع وزن  $\rho$  را به صورت

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx, \quad (13.1)$$

تعریف می کنیم و بررسی همه ویژگی های ضرب داخلی را همان گونه که در تعریف ۱.۲.۱ معین شده است، به خواننده واگذار می کنیم. می گوئیم  $f$  و  $g$  نسبت به تابع وزن  $\rho$  متعامدند،

هرگاه  $\langle f, g \rangle_\rho = 0$  باشد. نرم القاشده

$$\|f\|_\rho = \left[ \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx \right]^{1/2}$$

در همه ویژگی های نرم ۱۱.۱، به همراه نامساوی کوشی-شوارتز و نامساوی مثلثی صدق

می کند. ما از  $L^2_\rho(a, b)$  برای نشان دادن همه مجموعه توابع  $\mathbb{C} \rightarrow (a, b) : f$ ، که  $(a, b)$

ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، به طوری که  $\|f\|_\rho < \infty$  استفاده می کنیم. این به

وضوح فضای ضرب داخلی است و  $L^2(a, b)$  حالت خاصی است که  $\rho \equiv 1$ .

### تمرین ها

۱۹.۱. نامساوی مثلثی  $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$  را برای هر  $f, g \in L^2(a, b)$  ثابت کنید.

۲۰.۱. نامساوی کوشی-شوارتز را برای توابع  $f(x) = 1$  و  $g(x) = x$  روی  $[0, 1]$  بررسی

کنید.



۲۱.۱. فرض کنید توابع  $f$  و  $g$  روی  $[0, 1]$  با

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}, \quad g(x) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

تعریف شده باشد که  $\mathbb{Q}$  مجموعه اعداد گویا است. نشان دهید که  $f^2$  و  $g^2$  روی  $[0, 1]$  انتگرال پذیر ریمان است ولی  $fg$  نیست.

۲۲.۱. تعیین کنید کدامیک از توابع زیر به  $L^1(0, \infty)$  تعلق دارد و نرمشان را محاسبه کنید.

$$(۱) e^{-x}, \quad (۲) \sin x, \quad (۳) \frac{1}{1+x}, \quad (۴) \frac{1}{\sqrt{x}}$$

۲۳.۱. اگر  $f$  و  $g$  توابع پیوسته و مثبت روی  $L^1(a, b)$  باشند، ثابت کنید که  $\langle f, g \rangle = \|f\| \|g\|$  اگر و تنها اگر  $f$  و  $g$  وابسته خطی باشند.

۲۴.۱. شرایطی را که تحت آن برابری  $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$  در  $L^1(a, b)$  برقرار است، بررسی کنید.

۲۵.۱. مقدار حقیقی  $\alpha$  را طوری تعیین کنید که  $x^\alpha$  در  $L^1(0, 1)$  قرار گیرد.

۲۶.۱. مقدار حقیقی  $\alpha$  را طوری تعیین کنید که  $x^\alpha$  در  $L^1(1, \infty)$  قرار گیرد.

۲۷.۱. اگر  $f \in L^1(0, \infty)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  وجود داشته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

۲۸.۱. فرض کنید فاصله  $(a, b)$  متناهی است، نشان دهید که اگر  $f \in L^1(a, b)$  باشد،

آنگاه انتگرال  $\int_a^b |f(x)| dx$  وجود دارد. با یک مثال از یک تابع  $f$  به طوری که  $|f|$  روی

$(a, b)$  انتگرال پذیر است، ولی  $f \notin L^1(a, b)$  نشان دهید که عکس آن نادرست است.

۲۹.۱. اگر تابع  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  کران دار باشد و  $|f|$  انتگرال پذیر باشد، ثابت کنید

که  $f \in L^1(0, \infty)$  با یک مثال از یک تابع کران دار در  $L^1(0, \infty)$  که روی  $[0, \infty)$  انتگرال پذیر نیست نشان دهید که عکس آن نادرست است.

۳۰.۱. در  $L^1(-\pi, \pi)$ ، تابع  $\sin^2(x)$  را به صورت یک ترکیب خطی از توابع متعامد  $\{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x, \dots\}$  بیان کنید.

۳۱.۱. یک تابع  $f \in L^1(-1, 1)$  تعریف کنید، به طوری که  $\langle f, x^2 + 1 \rangle = 2$  و  $\|f\| = 2$  باشد.

۳۲.۱. تابع  $p(x) = e^{-x}$  داده شده است. ثابت کنید که هر چند جمله ای بر حسب  $x$  به  $L^1_\rho(0, \infty)$  تعلق دارد.

۳۳.۱. نشان دهید که اگر  $\rho$  و  $\sigma$  دو تابع وزن باشند به طوری که روی  $(a, b)$ ،  $\rho \geq \sigma \geq 0$ ، آنگاه  $L^1_\rho(a, b) \leq L^1_\sigma(a, b)$ .

## ۴.۱ دنباله توابع

بسیاری از موضوع های این کتاب با دنباله و سری توابع سروکار دارد و این بخش پیش نیازهایی را که برای ویژگی های همگرایی آنها نیاز داریم، ارائه می دهد. فرض می کنیم که خواننده با نظریه مقدماتی دنباله های عددی و سری هایی که معمولاً در محاسبات پیشرفته گنجانده شده، آشنا است.

فرض کنید که برای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع (حقیقی یا مختلط)  $f_n : I \rightarrow F$  تعریف شده روی فاصله حقیقی  $I$  داریم. در این صورت می گوییم یک دنباله از توابع  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  تعریف شده روی  $I$  داریم. به علاوه، برای هر ثابت  $x \in I$ ، دنباله اعداد  $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$

وقتی  $n \rightarrow \infty$  به حدی در  $F$  همگراست. حال برای هر  $x$  متعلق به  $I$  تابع  $f : I \rightarrow F$  را با

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (۱۴.۱)$$

تعریف می‌کنیم. این به معنای آن است که برای هر عدد مثبت  $\varepsilon$ ، عدد صحیح مثبت  $N$  وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (۱۵.۱)$$

توجه داشته باشید که  $N$  به نقطه  $x$  و  $\varepsilon$  بستگی دارد، از این رو  $N = N(\varepsilon, x)$ . تابع  $f$  تعریف شده در معادله (۱۴.۱)، حد نقطه‌ای دنباله  $(f_n)$  نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. دنباله توابع  $f_n : I \rightarrow F$  نقطه‌ای به تابع  $f : I \rightarrow F$  همگرا می‌شود که با نمادهای

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \lim f_n = f, \quad \text{یا} \quad f_n \rightarrow f$$

نشان می‌دهیم، هرگاه به ازای هر  $x \in I$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

مثال ۲.۴.۱. (۱) فرض کنید  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin x$ ، به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin x.$$

حد نقطه‌ای این دنباله توابع،  $f(x) = 0$ ،  $x \in \mathbb{R}$  است.

(۲) به ازای هر  $x \in [0, 1]$ ،

$$f_n(x) = x^n \rightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

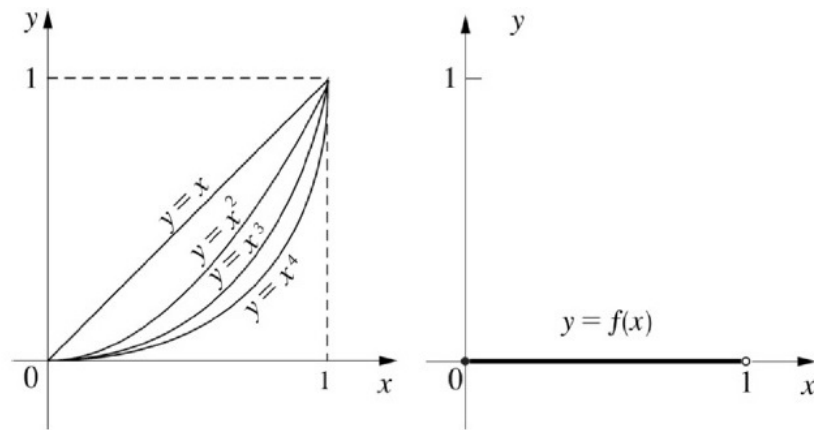
ازاین‌رو، حد تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad (۱۶.۱)$$

است که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

(۳) به‌ازای هر  $x \in [0, \infty)$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



شکل ۱.۱: دنباله  $f_n(x) = x^n$ .

مثال ۳.۴.۱. به‌ازای هر  $n \in \mathbf{N}$ ، دنباله  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

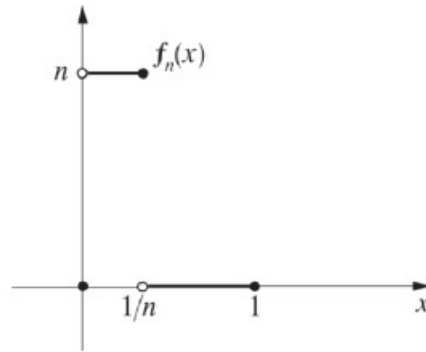
برای تعیین حد  $f$ ، ابتدا توجه کنید که به‌ازای هر  $n$ ،  $f_n(0) = 0$  است. اگر  $x > 0$

باشد، آن‌گاه عدد صحیح  $N$  وجود دارد به‌طوری‌که  $\frac{1}{N} < x$ ، که در این حالت

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x \Rightarrow f_n(x) = 0.$$

بنابراین،  $f_n \rightarrow 0$  (شکل ۲.۱ را ببینید).

اگر عدد  $N$  در رابطه (۱۵.۱) به  $x$  وابسته نباشد، به این معنا که اگر برای هر  $\varepsilon > 0$



شکل ۲.۱:  $f_n(x)$

عدد صحیح  $N = N(\varepsilon)$  وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر  $x \in I$

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad (17.1)$$

آنگاه همگرایی  $f_n \rightarrow f$  یکنواخت نامیده می‌شود و ما آن را از همگرایی نقطه‌ای با نوشتن

آن به صورت

$$f_n \xrightarrow{u} f$$

متمایز می‌کنیم.

به مثال ۲.۴.۱ برمی‌گردیم و موارد زیر را یادآور می‌شویم.

(۱) چون به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{1}{n} \sin x \right| \leq \frac{1}{n},$$

می بینیم که هر انتخاب  $N$  بزرگتر از  $\frac{1}{\varepsilon}$  در (۱۷.۱) صدق خواهد کرد. بنابراین، روی  $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \sin x \xrightarrow{u} 0.$$

(۲) همگرایی  $x^n \rightarrow 0$  روی  $(0, 1)$ ، یکنواخت نیست، زیرا

$$n \geq N \Rightarrow |x^n - 0| = x^n < \varepsilon$$

روی تمام فاصله  $(0, 1)$  اگر  $0 < \varepsilon < 1$  باشد، نمی تواند صدق کند، ولی تنها روی  $(0, \sqrt[n]{\varepsilon})$  برقرار است؛ زیرا به ازای هر  $x \in (\sqrt[n]{\varepsilon}, 1)$ ،  $x^n > \varepsilon$ . از این رو همگرایی  $f_n \rightarrow f$  که در (۱۷.۱) معین شده است، یکنواخت نیست.

(۳) همگرایی

$$\frac{nx}{1+nx} \rightarrow 1, \quad x \in (0, \infty)$$

یکنواخت نیست، زیرا نامساوی

$$\left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

برای مقادیر  $x$  در  $(0, (1-\varepsilon)/n\varepsilon]$  اگر  $0 < \varepsilon < 1$  باشد، برقرار نیست.

تبصره ۴.۴.۱. ۱. همگرایی یکنواخت  $f_n \xrightarrow{u} f$  به وضوح همگرایی نقطه ای  $f_n \rightarrow f$

نتیجه می دهد (ولی نه برعکس). از این رو، وقتی بخواهیم همگرایی یکنواخت یک دنباله  $f_n$

را بررسی کنیم، تابع  $f$  برای حد یکنواخت  $f_n$  باید همیشه حد نقطه ای باشد.

۲. در نامساوی (۱۵.۱) و (۱۷.۱) می توانیم رابطه  $< \leq$  را با  $\leq$  و عدد مثبت  $\varepsilon$  را با  $c\varepsilon$

عوض کنیم، که  $c$  ثابت مثبت است (به  $n$  وابستگی ندارد).

۳. چون  $\varepsilon$  به ازای هر  $x \in I$  معادل است با

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

می بینیم که  $f_n \xrightarrow{u} f$  روی  $I$ ، اگر و تنها اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  عدد صحیح  $N$  وجود داشته باشد؛ به طوری که

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

که معادل با گزاره

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (18.1)$$

است.

با استفاده از ضابطه (18.1) برای همگرایی یکنواخت روی دنباله مثال ۲.۴.۱ می بینیم که،

در (۱)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sin x \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

بنابراین، همگرایی یکنواخت  $\sin \frac{nx}{n}$  به صفر تأیید می شود. در (۲) و (۳)، داریم

$$\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1 \not\rightarrow 0,$$

$$\sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{nx}{1 + nx} - f(x) \right| = \sup_{x \in (0, \infty)} \left( 1 - \frac{nx}{1 + nx} \right) = 1 \not\rightarrow 0.$$

از این رو، هیچ یک از دنباله‌ها به طور یکنواخت همگرا نیست.

اگرچه هر سه دنباله بحث شده در مثال ۲.۴.۱ پیوسته هستند، تنها مورد اول،  $(\frac{\sin nx}{n})$ ، به یک حد پیوسته همگراست. این اشاره دارد به اینکه همگرایی یکنواخت خاصیت پیوستگی را حفظ می‌کند. جالب است بدانیم در چه شرایطی می‌توان عملیات انتگرال‌گیری یا مشتق‌گیری را با عملیات حدگیری تعویض کرد. به بیان دیگر، آیا روی  $I$ ،

$$\int_I \lim f_n(x) dx = \lim \int_I f_n(x) dx$$

یا

$$(\lim f_n(x))' = \lim f_n'(x)$$

صحیح است؟

پاسخ پرسش در قضیه زیر آمده است که شرایط کافی برای درستی این تساوی‌ها را فراهم می‌کند. این یک نتیجه استاندارد در آنالیز حقیقی کلاسیک است که اثبات آن در مراجع [۱] و [۱۴] یافت می‌شود.

**قضیه ۵.۴.۱.** فرض کنید  $(f_n)$  دنباله توابع تعریف شده روی فاصله  $I$  که نقطه به نقطه روی  $I$  به  $f$  همگرا می‌شود.

(۱) اگر  $f_n$  به ازای هر  $n$ ، پیوسته باشد و  $f_n \searrow f$  آن‌گاه  $f$  روی  $I$  پیوسته است.

(۲) اگر  $f_n$  به ازای هر  $n$  انتگرال‌پذیر و  $I$  کران‌دار و  $f_n \searrow f$ ، آن‌گاه  $f$  روی  $I$  انتگرال‌پذیر

است و

$$\int_I f(x) dx = \lim \int_I f_n(x) dx.$$



(۳) اگر به ازای هر  $n$ ،  $f_n$  روی  $I$  مشتق پذیر و  $I$  کران دار باشد و  $f'_n$  روی  $I$  به طور یکنواخت همگرا باشد، آن گاه  $f_n$  به طور یکنواخت به  $f$  همگراست،  $f$  روی  $I$  مشتق پذیر است، و روی  $I$ ،  $f'_n \rightarrow f'$ .

تبصره ۶.۴.۱. اگر همگرایی نقطه‌ای  $f_n$  روی  $I$  را با شرط ضعیف تری که  $f_n$  در هر نقطه منفرد در  $I$  همگرا می شود تعویض کنیم، بخش (۳) از قضیه ۵.۴.۱ درست باقی می ماند؛ چون چنین شرطی تنها برای تضمین همگرایی ثابت های انتگرال گیری است که از  $f'_n$  تا  $f_n$  می روند.

به مثال ۲.۴.۱ برمی گردیم، می بینیم که همگرایی یکنواخت  $\sin \frac{nx}{n}$  به صفر در بخش (۱) قضیه ۵.۴.۱ صدق می کند. همچنین، (۲) روی هر فاصله کران دار در  $\mathbb{R}$  صدق می کند. ولی (۳) تا وقتی که دنباله

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n} \sin nx \right) = \cos nx$$

همگرا نیست، صدق نمی کند. دنباله  $(x^n)$  روی  $[0, 1]$  به ازای هر  $n$  پیوسته است، ولی حد ندارد. این با شرط (۱) سازگار است، زیرا همگرایی یکنواخت نیست. نتیجه یکسان برای دنباله  $\frac{nx}{(1+nx)}$  به کار می رود.

در مثال ۳.۴.۱ به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim \int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

درحالی که

$$\lim \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

این به معنای آن است که همگرایی  $f_n \rightarrow 0$  یکنواخت نیست، زیرا با این واقعیت که

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} f_n = n$$

تأیید شده است. از طرف دیگر،

$$\lim \int_0^1 x^n dx = 0 = \int_0^1 \lim x^n dx,$$

اگرچه همگرایی  $x^n \rightarrow 0$  یکنواخت نیست. این نشان می‌دهد همه شرایط قضیه ۵.۴.۱ لازم نیست.

یک دنباله از توابع (حقیقی یا مختلط)  $(f_n)$  تعریف شده روی بازه حقیقی  $I$  مفروض

است، مجموع جزئی  $n$  امش توسط

$$S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad x \in I$$

تعریف می‌شود.

دنباله توابع  $S_n$  تعریف شده روی  $I$ ، یک سری نامتناهی (از توابع) نامیده می‌شود و با  $\sum f_k$

نمایش داده می‌شود. سری بیان شده روی  $I$  نقطه به نقطه همگرا است اگر دنباله  $(S_n)$

نقطه به نقطه روی  $I$  همگرا باشد، در این صورت  $\sum f_k$  همگرا نامیده می‌شود. حد آن،

مجموع سری

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in I$$

است. گاهی وقت‌ها تشخیص یک سری همگرا با مجموعش را راحت می‌یابیم، درست همان‌طور که گاهی تابع  $f$  را با مقدارش  $f(x)$  مشخص می‌کنیم. یک سری که در یک نقطه همگرا نمی‌شود، در آن نقطه واگرا گفته می‌شود. سری  $\sum f_k$  روی  $I$  به‌طور مطلق همگرا است، اگر سری مثبت  $\sum |f_k|$  روی  $I$  همگرای نقطه‌ای باشد، و روی  $I$  به‌طور یکنواخت همگرا است، اگر دنباله  $(S_n)$  روی  $I$  به‌طور یکنواخت همگرا باشد. در بررسی ویژگی‌های همگرایی سری توابع، ما به‌طور طبیعی بر ویژگی‌های همگرایی دنباله توابع متناظر متکی هستیم. همان‌طور که پیش از این بحث شد، یک سری در نهایت یک دنباله است ولی ما اغلب به خواص همگرایی سری اعداد متوسل می‌شویم که فرض می‌کنیم که خواننده با آن آشنا است، مانند آزمون‌های مختلف همگرایی (آزمون مقایسه، آزمون نسبت، آزمون ریشه، آزمون سری متناوب) و رفتار سری‌هایی مانند سری هندسی و  $p$  سری‌ها ( $[1]$  یا  $[3]$  را ببینید). با استفاده از قضیه ۵.۴.۱ سری‌ها، به نتیجه زیر می‌رسیم.

**نتیجه ۲.** فرض کنید سری  $\sum f_n$  روی فاصله  $I$  همگرای نقطه‌به‌نقطه است.

(۱) اگر  $f_n$  به‌ازای هر  $n$  روی  $I$  پیوسته و  $\sum f_n$  روی  $I$  همگرای یکنواخت باشد، آنگاه مجموعش  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  پیوسته است.

(۲) اگر  $f_n$  به‌ازای هر  $n$  روی  $I$  انتگرال‌پذیر باشد،  $I$  کران‌دار است، و اگر  $\sum f_n$  به‌طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  روی  $I$  انتگرال‌پذیر است و

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

(۳) اگر  $f_n$  به‌ازای هر  $n$ ، روی  $I$  مشتق‌پذیر باشد،  $I$  کران‌دار است، و اگر  $\sum f'_n$  به‌طور

یکنواخت روی  $I$  همگرا باشد، آنگاه  $\sum f_n$  به‌طور یکنواخت همگرا است و حدش روی  $I$

مشتق پذیر است و

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

این نتیجه، به وابستگی همگرایی یکنواخت با تغییر دادن سری‌ها اشاره می‌کند اگر ما یک آزمون ساده‌تر و عملی‌تر از تعریف برای همگرایی یکنواخت یک سری داشته باشیم کمک‌کننده خواهد بود. این مسأله به کمک قضیه زیر فراهم شده است که شرط کافی را برای همگرایی یکنواخت سری توابع معین می‌کند.

**قضیه ۷.۴.۱** (آزمون  $M$  – ویراشتراس). فرض کنید  $(f_n)$  یک دنباله از توابع روی  $I$  است و فرض کنید که یک دنباله (نامنفی) از اعداد  $M_n$  وجود دارد، به طوری که به ازای هر  $x \in I$  و  $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq M_n.$$

اگر  $\sum M_n$  همگرا باشد، آنگاه  $\sum f_n$  روی  $I$  به طور یکنواخت و مطلق همگراست.

**برهان.** فرض کنید  $\epsilon > 0$ ، به ازای هر  $x \in I$  و  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

چون سری  $\sum M_k$  همگراست، عدد صحیح  $N$  وجود دارد، به طوری که

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon.$$

آن‌گاه به‌ازای هر  $x \in I$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \epsilon.$$

این تعریف به معنای آن است که  $\sum f_k$  روی  $I$  همگرایی یکنواخت است و همگرایی مطلق

□

توسط مقایسه با  $M_n$  نتیجه می‌شود.

مثال ۸.۴.۱. (۱) سری مثلثاتی

$$\sum \frac{1}{n^r} \sin x$$

روی  $\mathbb{R}$  به‌طور یکنواخت همگراست، چون

$$\left| \sum \frac{1}{n^r} \sin x \right| \leq \frac{1}{n^r}$$

و سری  $\sum \frac{1}{n^r}$  همگراست. چون  $\sin \frac{nx}{n^r}$  روی  $\mathbb{R}$  به‌ازای هر  $n$  پیوسته است، تابع  $\sin \frac{nx}{n^r}$

نیز روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است. افزون بر این، طبق نتیجه ۲، انتگرال سری روی فاصله متناهی

$[a, b]$  هست،

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sin nx \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \int_a^b \sin nx dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} (\cos na - \cos nb) \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}, \end{aligned}$$

که همگراست. از طرف دیگر، سری مشتقات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n^r} \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx$$

به طور یکنواخت همگرا نیست. درحقیقت، حتی در برخی از مقادیر  $x$  مانند انتگرال مضارب

$2\pi$  همگرا نیست، از این رو نمی‌توانیم به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  بنویسیم:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^r} \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx.$$

(۲) به کمک آزمون  $M$ ، هر دو سری

$$\sum \frac{1}{n^r} \sin nx$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n^r} \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \cos nx$$

روی  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت همگرا هستند. از این رو، تساوی

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^r} \sin nx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \cos nx$$

به ازای هر  $x$  در  $\mathbb{R}$  معتبر است.

### تمرین‌ها

۳۴.۱. حدهای نقطه‌ای که در آن وجود دارد را محاسبه کنید.

الف)  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\frac{x^n}{1+x^n}$

ب)  $0 \leq x < \infty$ ،  $\sqrt{x}$

ج)  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\sin nx$

۳۵.۱. نوع همگرایی (نقطه‌ای یا یکنواخت) برای هریک از دنباله‌های زیر تعیین کنید.

$$\text{الف) } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$\text{ب) } 0 \leq x \leq 2, \sqrt[n]{x}$$

$$\text{ج) } 0 \leq x \leq 1, \sqrt[n]{x}$$

۳۶.۱. نوع همگرایی دنباله

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

را مشخص کنید و بررسی کنید که آیا تساوی

$$\lim \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim f_n(x) dx$$

معتبر است؟

۳۷.۱. حد دنباله

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ n(1-x)(n-1), & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases},$$

را محاسبه کنید و نوع همگرایی را مشخص کنید.

۳۸.۱. حد و نوع همگرایی برای دنباله  $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$  را روی  $[0, 1]$  مشخص

کنید.

۳۹.۱. ثابت کنید که همگرایی  $\frac{x}{n+x} \rightarrow 0$  روی  $[0, a]$  به ازای هر  $a > 0$  یکنواخت است،

ولی روی  $[0, \infty)$  نیست.

۴۰.۱. دنباله

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & |x| < n \\ 0, & |x| > n \end{cases},$$

داده شده است. نشان دهید که  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 0$  را محاسبه کنید و توضیح

دهید چرا حد آن صفر نیست.

۴۱.۱. اگر دنباله  $(f_n)$  به طور یکنواخت روی  $[a, b]$  به  $f$  همگرا باشد، ثابت کنید که

$|f_n - f|$  و از این رو  $|f_n - f|^2$  روی  $[a, b]$  به طور یکنواخت به صفر همگراست.

۴۲.۱. دامنه همگرایی سری  $\sum f_n$  را مشخص کنید، که

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \quad (\text{الف})$$

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (\text{ب})$$

۴۳.۱. اگر سری  $\sum a_n$  به طور مطلق همگرا باشد، ثابت کنید که  $\sum a_n \sin nx$  روی  $\mathbb{R}$

به طور یکنواخت همگرا است.

۴۴.۱. ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = 0$$

و با استفاده از این، نتیجه بگیرید که انتگرال ناسره

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

وجود دارد. نشان دهید که  $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$ . راهنمایی: از آزمون سری متناوب و

واگرایی سری های هارمونیک  $\sum \frac{1}{n}$  استفاده کنید.

۴۵.۱. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$



یک سری توانی در نقطه  $\bullet$  نامیده می‌شود. می‌دانیم که این سری در  $(-R, R)$  همگراست و بیرون  $[-R, R]$  واگراست (۱) را ببینید). قرار دهید

$$R = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \neq 0.$$

اگر  $R > 0$  باشد، با استفاده از آزمون  $M$ -وایراشتراس ثابت کنید که سری توانی به‌طور یکنواخت روی  $[-R + \epsilon, R + \epsilon]$  همگراست، که  $\epsilon$  عدد مثبت کمتر از  $R$  است.

۴۶.۱. با استفاده از نتیجه تمرین ۴۵.۱ نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

روی  $(-R, R)$  پیوسته است. آنگاه نشان دهید که  $f$  روی  $(-R, R)$  نیز مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

۴۷.۱. از تمرین ۴۶.۱ نتیجه بگیرید که سری توانی  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  روی  $(-R, R)$  از هر مرتبه مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $a_n = \frac{f^{(n)}(\bullet)}{n!}$  برقرار است.

۴۸.۱. با استفاده از نتیجه تمرین ۴۷.۱ سری توانی (سری تیلور)، توابع نمایی و مثلثاتی روی  $\mathbb{R}$  را به‌دست آورید.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

۴۹.۱. با استفاده از نتیجه تمرین ۴۸.۱، فرمول اویلر  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  را به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  که  $i = \sqrt{-1}$  ثابت کنید.

## ۵.۱ همگرایی در $L^1$

همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت برای دنباله‌ای از توابع بحث شده است، اکنون نوع سوم یعنی همگرایی در  $L^1$  را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. دنباله توابع  $(f_n)$  در  $L^1(a, b)$  همگرا در  $L^1$  گفته می‌شود، هرگاه تابع  $f \in L^1(a, b)$  وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0, \quad (19.1)$$

یعنی اگر برای هر  $\varepsilon > 0$  یک عدد صحیح  $N$  وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_1 < \varepsilon,$$

معادله ۱۹.۱ معادل است با

$$f_n \xrightarrow{L^1} f,$$

و  $f$  حد دنباله  $(f_n)$  در  $L^1$  نامیده می‌شود.

مثال ۲.۵.۱. (۱) در مثال ۲.۴.۱ (۲) دیدیم که به طور نقطه‌ای،

$$x_n \rightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

از آنجا که  $L^2([0, 1]) = L^2([0, 1])$  داریم:

$$\|x^n - 0\| = \left[ \int_0^1 x^{2n} dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{2n+1} \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

بنابراین،  $x^n \xrightarrow{L^2} 0$ .

(۲) دنباله توابع  $(f_n)$  تعریف شده در مثال ۳.۴.۱ با کمک

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

نیز نقطه‌ای به صفر روی  $[0, 1]$  همگرا می‌شود. ولی در این حالت، به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_n - 0\| &= \int_0^1 f_n^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx \\ &= n. \end{aligned}$$

بنابراین،  $\|f_n - 0\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$ ؛ این به معنای آن است که دنباله  $f_n$  در  $L^2$  به صفر همگرا نمی‌شود.

مثال پایانی نشان می‌دهد که همگرایی نقطه‌ای نمی‌تواند همگرایی در  $L^2$  را ایجاب کند. برعکس، همگرایی در  $L^2$  نمی‌تواند همگرایی نقطه‌ای را ایجاب کند، چون حد در این حالت یک کلاس از توابع است (که در  $L^2$  برابر هستند ولی نه نقطه‌ای). ولی سوال

اینجاست که، آیا دنباله‌ای که نقطه‌ای همگرا به حد  $f$  است، می‌تواند به حد متفاوت در  $L^p$  همگرا شود؟ برای مثال، دنباله  $f_n$  می‌تواند در مثال ۲.۵.۱ قسمت (۲) در  $L^p$  به تابعی غیر از توابع همگرا شود؟ پاسخ خیر است. به عبارت دیگر، اگر دنباله‌ای هم نقطه‌ای هم در  $L^p$  همگرا باشد، آنگاه حد آن در هر دو حالت یکسان است. به‌طور دقیق‌تر، باید بگوییم که این دو حد در  $L^p$  از هم متمایز نیستند چون آنها متعلق به یک کلاس هم‌ارزی هستند.

از طرف دیگر، همگرایی یکنواخت  $f_n \xrightarrow{u} f$  روی  $I$  همگرایی نقطه‌ای را ایجاب می‌کند. همان‌طور که پیش از این مشاهده کرده‌ایم و اکنون نشان می‌دهیم که این نیز اشاره دارد بر  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ، به شرط آنکه دنباله  $(f_n)$  و  $f$  در  $L^p(I)$  قرار گیرد و  $I$  کران‌دار باشد. وقتی  $f_n - f \xrightarrow{u} 0$ ، این موضوع ساده نشان می‌دهد که  $f_n - f \xrightarrow{L^p} 0$  (تمرین ۴۱.۱). با قضیه ۵.۴.۱ قسمت (۲)، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|^p dx \\ &= \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

شرط اینکه  $f$  به  $L^p(I)$  تعلق داشته باشد در واقع لازم نیست، همان‌طور که در قضیه ۵.۵.۱ خواهیم دید.

مثال ۳.۵.۱. در مثال ۸.۴.۱ دیدیم که

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \sin kx \xrightarrow{u} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R},$$

از این رو، تابع  $S(x)$  روی  $[-\pi, \pi]$  پیوسته است. افزون بر این، هر دو  $S_n$  و  $S$  در  $L^p(-\pi, \pi)$  قرار دارند، زیرا هر یک به‌طور یکنواخت توسط سری همگرای  $\sum \frac{1}{k^p}$  کران‌دار شده است.

بنابراین،  $S_n$  به  $S$  در  $L^p(-\pi, \pi)$  همگراست. به طور معادل، می‌گوییم که سری  $\sum \frac{\sin kx}{k^p}$  به  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}$  در  $L^p(-\pi, \pi)$  همگرا می‌شود و می‌نویسیم:

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \sin kx.$$

از طرف دیگر، سری  $\frac{\sin kx}{k}$ ، نمی‌تواند برای همگرایی در  $L^p$  با ابزارهای موجود آزمایش شود و باید نظریه را کمی بیشتر توسعه دهیم. ابتدا دنباله کوشی را در  $L^p$ ، در امتداد خطوط متناظر در  $\mathbb{R}$  تعریف می‌کنیم. این به ما اجازه می‌دهد که یک دنباله را برای همگرایی بدون نیاز به حدس حد آن از قبل آزمایش کنیم.

**تعریف ۴.۵.۱.** یک دنباله در  $L^p$  یک دنباله کوشی نامیده می‌شود، اگر برای هر  $\epsilon > 0$ ، عدد صحیح  $N$  وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر

$$m, n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

واضح است، هر دنباله همگرا  $(f_n)$  در  $L^p$  یک دنباله کوشی است، زیرا اگر  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ، آنگاه به کمک نامساوی مثلثی

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\|$$

می‌توانیم با گرفتن  $m$  و  $n$  به اندازه کافی بزرگ، سمت راست این نامساوی را به طور دلخواه کوچک کنیم. عکس این گزاره (یعنی، هر دنباله کوشی در  $L^p$  به تابعی در  $L^p$  همگرا می‌شود) درست است و ویژگی تمامیت  $L^p$  را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۵.۱ (تمامیت در  $L^p$ ). برای هر دنباله کوشی  $(f_n)$  در  $L^p$ ، یک تابع  $f \in L^p$  وجود دارد، به طوری که  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ .

قضیه دیگری وجود دارد که بیان می‌کند، برای هر تابع  $f \in L^p(a, b)$ ، یک دنباله از توابع پیوسته  $(f_n)$  روی  $[a, b]$  وجود دارد به طوری که  $f_n \xrightarrow{L^p} f$ . به عبارت دیگر، مجموعه توابع  $C([a, b])$  در  $L^p(a, b)$  به همان روشی که  $\mathbb{Q}$  چگال در  $\mathbb{R}$  است، چگال است. البته به خاطر داشته باشید که توپولوژی‌های مختلف  $\mathbb{R}$  و  $L^p$  به ترتیب توسط قدر مطلق  $|\cdot|$  و نرم  $\|\cdot\|$  تعریف می‌شود. برای مثال، تابع

$$f(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

در  $L^p(-1, 1)$  که در  $x = 0$  ناپیوسته است، می‌تواند با دنباله‌ای از توابع پیوسته

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx + 1, & -\frac{1}{n} < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

به نرم  $L^p$  نزدیک شود. این روشن است که

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\frac{1}{n}}^0 (nx + 1)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0. \end{aligned}$$

لازم به گفتن نیست که دنباله‌های بسیار دیگری در  $C([a, b])$  که به  $f$  در  $L^p(a, b)$  همگرا می‌شوند، وجود دارد؛ درست همان‌طور که دنباله‌های زیادی در  $\mathbb{Q}$  وجود دارد که به

عدد گنگ  $\sqrt{2}$  همگرا می‌شوند.

همان‌طور که در فصل بعدی به این نتیجه‌گیری اشاره خواهیم کرد، گزاره دقیق آن را در اینجا می‌گوییم.

**قضیه ۶.۵.۱** (چگالی  $C$  در  $L^2$ ). برای هر  $f \in L^2(a, b)$  و هر  $\epsilon > 0$ ، تابع پیوسته  $g$  روی  $[a, b]$  وجود دارد، به طوری که  $\|f - g\| < \epsilon$ .

اثبات قضایای ۵.۵.۱ و ۶.۵.۱ را در [۱۴] می‌توانید پیدا کنید. فضای  $L^2$  یکی از مثال‌های فضای هیلبرت است، که یک فضای ضرب داخلی است که تحت نرم تعریف شده به وسیله ضرب داخلی کامل است. این پس از دیوید هیلبرت<sup>۱</sup> (۱۸۶۲-۱۹۴۳)، ریاضی‌دان آلمانی که کار و ایده‌اش بر توسعه ایده‌های فضای هیلبرت کمک بسیاری کرد نام‌گذاری شده است [نگاه کنید به [۷]، جلد ۱]. بسیاری از ایده‌هایی که ما با آن کار می‌کنیم، در چهارچوب  $L^2$  بیان شده‌اند.

**مثال ۷.۵.۱**. با استفاده از قضیه ۵.۵.۱، اکنون می‌توانیم به همگرایی دنباله  $S_n(x) =$

$$\sum_{k=1}^n \sin \frac{kx}{k} \text{ در } L^2(-\pi, \pi) \text{ پردازیم. توجه کنید که}$$

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \sin kx \right\|^2, \quad m < n,$$

برای به دست آوردن معادله بالا می‌توانیم از تعامد  $\{\sin kx : k \in N\}$  در  $L^2(-\pi, \pi)$

استفاده کنیم (مثال ۲.۳.۱)

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \sin kx \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n b \frac{1}{k^2} \|\sin kx\|^2 = \pi \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2}.$$

<sup>1</sup>David Hilbert

فرض کنید  $\epsilon > 0$ . چون که  $\sum 1/k^2$  همگراست، می‌توانیم  $N$  را به گونه‌ای انتخاب کنیم، به طوری که برای

$$\begin{aligned} n > m \geq 0 &\Rightarrow \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\epsilon^2}{\pi} \\ &\Rightarrow \|S_n(x) - S_m(x)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

به این ترتیب  $\sum_{k=1}^n \sin \frac{kx}{k}$  یک دنباله کوشی است و از این رو، در  $L^1(-\pi, \pi)$  همگراست، اگرچه هنوز نمی‌توانیم حد آن را محاسبه کنیم.

به طور مشابه، سری  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{kx}{k}$  در  $L^1(-\pi, \pi)$  همگراست، اگرچه این سری نقطه به نقطه در مقادیر مشخص  $x$ ، مانند همه مضارب صحیح از  $2\pi$  واگراست.

این بخش به دلیل اهمیت آن به تئوری سری فوریه به همگرایی در  $L^1$  اختصاص داده شده بود، ولی ما به راحتی می‌توانستیم در فضای وزن  $L^p$  بحث همگرایی کنیم. تعاریف ۱.۵.۱ و ۴.۵.۱ و قضایای ۵.۵.۱ و ۶.۵.۱ با جایگزین کردن نرم  $|\cdot|_p$  به جای  $|\cdot|$  و همگرایی در  $L^p$  به جای همگرایی در  $L^1$  بدون تغییر باقی خواهند ماند.

### تمرین‌ها

۵.۰.۱. حد هر یک از دنباله‌های زیر را در جایی که وجود دارند، تعیین کنید.

الف)  $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ ،  $0 \leq x \leq 1$ .

ب)  $f_n(x) = \begin{cases} nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

ج)  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ،  $0 \leq x \leq 1$ .



۵۱.۱. سری‌های زیر را برای همگرایی در  $L^2$  امتحان کنید.

$$\text{الف) } -\pi \leq x \leq \pi, \sum \frac{1}{k^2} \sin kx$$

$$\text{ب) } -\pi \leq x \leq \pi, \sum \frac{1}{k} e^{ikx}$$

$$\text{ج) } -\pi \leq x \leq \pi, \sum \frac{1}{\sqrt{1+k}} \cos kx$$

۵۲.۱. اگر  $(f_n)$  یک دنباله در  $L^2(a, b)$  باشد که به  $f$  در  $L^2$  همگراست، نشان دهید که

$$\langle f_n, g \rangle_{L^2} \rightarrow \langle f, g \rangle, \quad g \in L^2(a, b)$$

۵۳.۱. ثابت کنید که  $\|f - g\| \leq \|f\| - \|g\|$  از این رو نتیجه بگیرید که اگر  $f_n \xrightarrow{L^2} f$

$$\text{باشد آن‌گاه } \|f_n\| \rightarrow \|f\|.$$

۵۴.۱. اگر سری عددی  $\sum |a_n|$  همگرا باشد، ثابت کنید که  $\sum |a_n|^2$  نیز همگراست،

$$\text{و هر دو سری } \sum a_n \sin nx, \sum a_n \cos nx \text{ روی } [-\pi, \pi] \text{ پیوسته‌اند.}$$

۵۵.۱. ثابت کنید که اگر توابع وزن  $\rho$  و  $\sigma$  توسط  $\rho \geq \sigma$  روی  $(a, b)$  وابسته باشند، آن‌گاه

$$\text{دنباله‌ای که در } L^2_\rho(a, b) \text{ همگرا می‌شود در } L^2_\sigma(a, b) \text{ نیز همگراست.}$$

## ۶.۱ توابع متعامد

فرض کنید  $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots\}$  یک مجموعه متعامد از توابع (ناصفر) در فضای مختلط

$L^2$  است که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، و فرض کنید که تابع  $f \in L^2$  یک

ترکیب خطی متناهی از عناصر در مجموعه  $\{\phi_i\}$  است،

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}. \quad (20.1)$$

با در نظر گرفتن ضرب داخلی  $f$  با  $\phi_k$ ، به ازای هر  $k = 1, \dots, n$ ،

$$\langle f, \phi_k \rangle = \alpha_k \|\phi_k\|^2$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2}$$

و نمایش (۲۰.۱) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$f = \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k.$$

به عبارت دیگر، ضرایب  $\alpha_k$  در ترکیب خطی (۲۰.۱) با کمک تصاویر  $f$  روی  $\phi_k$  مشخص

شده‌اند. برای جمله‌های مجموعه متناظر  $\{\psi_k = \phi_k / \|\phi_k\|\}$ ،

$$f = \sum_{k=1}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k,$$

و ضرایب منطبق با تصاویر  $f$  روی  $\psi_k$  می‌شوند.

از طرف دیگر، فرض کنید که  $f$  یک تابع دلخواه در  $L^2$  است و ما می‌خواهیم بهترین

تقریب  $f$  در  $L^2$  را با کمک ترکیب خطی از عناصر  $\{\phi_k\}$  به دست آوریم. در این صورت

باید ضرایب  $\alpha_k$  که عدد نامنفی

$$\|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\|$$

را به حداقل می‌رساند، جست‌وجو کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\|^2 &= \langle f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \rangle \\
&= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \overline{\alpha_k} \langle f, \phi_k \rangle + \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \|\phi_k\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\|\phi_k\|^2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \|\phi_k\|^2 \left[ |\alpha_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \overline{\alpha_k} \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} + \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\|\phi_k\|^4} \right] \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\|\phi_k\|^2} + \sum_{k=1}^n \|\phi_k\|^2 \left| \alpha_k - \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \right|^2.
\end{aligned}$$

چون ضرایب  $\alpha_k$  تنها در جمله پایانی آشکار می‌شود:

$$\sum_{k=1}^n \|\phi_k\|^2 \left| \alpha_k - \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \right|^2 \geq 0,$$

بنابراین، از  $\|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\|^2$  با انتخاب

$$\alpha_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2}$$

به وضوح به مینیمم  $\|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\|^2$  می‌رسیم. این مینیمم با

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\|\phi_k\|^2} \geq 0 \quad (21.1)$$

معین می‌شود که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\langle f, \phi_k \rangle|^2}{\|\phi_k\|^2} \leq \|f\|^2.$$

چون این رابطه به‌ازای هر  $n$  درست است، برای حد وقتی که  $n \rightarrow \infty$  است، نیز درست است. نابرابری حاصل

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \leq \|f\|^2 \quad (۲۲.۱)$$

به‌عنوان نابرابری بسل، برای هر مجموعه متعامد  $\{\phi_k : k \in \mathbf{N}\}$  و هر  $f \in L^2$  برقرار است. با توجه به (۲۱.۱)، نابرابری بسل به یک برابری تبدیل می‌شود، اگر و تنها اگر

$$\|f - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k\| = 0,$$

یا به‌طور معادل در  $L^2$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k.$$

این به معنای آن است که  $f$  در  $L^2$  توسط مجموع  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k$ ، که  $\alpha_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2}$  است، نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۱.۶.۱.** مجموعه متعامد  $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$  در  $L^2$  کامل گفته می‌شود، اگر برای هر  $f \in L^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k \xrightarrow{L^2} f.$$

بنابراین، یک مجموعه متعامد کامل در  $L^2$  پایه‌ای برای فضا می‌شود و چون  $L^2$  پایه‌ای با بُعد نامتناهی است، ناچار است یک مجموعه نامتناهی باشد. هنگامی که نابرابری بسل به یک برابری تبدیل شود، رابطه حاصل

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_k \rangle^2}{\|\phi_k\|^2} \quad (23.1)$$

رابطه پارسوال یا رابطه تمامیت نامیده می‌شود. جمله دوم توسط قضیه زیر توجیه شده است، که درحقیقت اصلاح تعریف ۱.۶.۱ است.

**قضیه ۲.۶.۱.** مجموعه متعامد  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  کامل است، اگر و تنها اگر به ازای هر  $f \in L^2$  در رابطه پارسوال (۲۳.۱) صدق کند.

**تبصره ۳.۶.۱.** ۱. مجموعه متعامد  $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$  در  $L^2$  را در نظر می‌گیریم. ما نشان داده‌ایم که بهترین  $L^2$ -تقریب از توابع  $f \in L^2$  با انتخاب  $\alpha_k = \langle f, \pi_k \rangle / \|\phi_k\|^2$  به دست می‌آید. این انتخاب، مستقل از  $n$  است. اگر  $\phi_n$  کامل باشد آنگاه برابری  $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$  در  $L^2$  برقرار است.

۲. هنگامی که مجموعه متعامد  $\{\phi_n\}$  با  $\{\psi_k = \phi_k / \|\phi_k\|\}$  نرمال شود، نابرابری بسل را به صورت  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$  در نظر می‌گیریم و رابطه پارسوال آن  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2$  است.

۳. به ازای هر  $f \in L^2$ ، چون  $\|f\| < \infty$  است، از نابرابری بسل نتیجه می‌گیریم که  $\langle f, \psi_n \rangle \rightarrow 0$ . به هر حال، مجموعه متعامد  $\{\psi_n\}$  کامل است.

رابطه پارسوال را می‌توان به عنوان تعمیم قضیه فیثاغورث از  $\mathbb{R}^n$  به  $L^2$  در نظر گرفت که  $\|f\|^2$  جایگزین مربع طول بردار می‌شود و  $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \psi_n \rangle|^2$  مجموع مربع‌های تصویرشان را روی پایه متعامد یکه نشان می‌دهد. این یکی از دلایلی است که  $L^2$  تعمیم

طبیعی فضای اقلیدسی با بُعد متناهی به بُعدهای نامتناهی در نظر گرفته شده است.  $L^2$  برخی از ساختار هندسی پایه‌ای  $\mathbb{R}^n$  را حفظ می‌کند و خاصیت تمامیت (قضیه ۵.۵.۱) بسته بودن را تحت عملیات محدودکننده، دنباله‌های کوشی تضمین می‌کند.

### تمرین‌ها

۵۶.۱. اگر  $l$  عدد مثبت باشد، نشان دهید مجموعه‌های  $\{\sin(\frac{n\pi x}{l}) : n \in \mathbb{N}\}$  و  $\{\cos(\frac{n\pi x}{l}) : n \in \mathbb{N}\}$  روی  $L^2(0, l)$  متعامد هستند. مجموعه‌های متعامد یکه متناظر آنها را مشخص کنید.

۵۷.۱. ضرایب  $c_i$  در ترکیب خطی

$$c_1 + c_2 \sin \pi x + c_3 \sin 2\pi x$$

که بهترین تقریب را در  $L^2(0, 2)$  از تابع  $f(x) = x$ ،  $0 < x < 2$  معین می‌کند مشخص کنید.

۵۸.۱. ضرایب  $a_i$  و  $b_i$  در ترکیب خطی

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

که بهترین تقریب را در  $L^2(-\pi, \pi)$  از  $f(x) = |x|$ ،  $-\pi \leq x \leq \pi$  می‌دهد مشخص کنید.

۵۹.۱. فرض کنید  $p_1, p_2$  و  $p_3$  سه چندجمله‌ای متعامد تشکیل شده از مجموعه  $\{1, x, x^2\}$  با روش گرام-اشمیت که  $-1 \leq x \leq 1$  باشد. ضرایب ثابت در چندجمله‌ای درجه دوم

مشخص کنید. آیا چندجمله‌ای  $p$  دیگری از درجه دو که  $e^x$  را روی  $(-1, 1)$  به مفهوم دیگری تقریب بزند، وجود دارد؟

۶۰.۱. فرض کنید

$$1 - x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

با استفاده از اتحاد پارسوال ثابت کنید که

$$\pi^4 = 96 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

۶۱.۱. یک دنباله حقیقی  $(a_k)$  تعریف کنید، به طوری که  $\sum a_k$  همگرا و  $\sum a_k$  واگرا باشد،

سری  $\sum a_n \cos x$  روی  $-\pi \leq x \leq \pi$  چه نوع همگرایی می‌تواند داشته باشد؟

۶۲.۱. فرض کنید  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  یک مجموعه متعامد در  $L^2(0, l)$  است و فرض کنید:

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} [f_n(x) + f_n(-x)] \\ \psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} [f_n(x) - f_n(-x)], \quad -l \leq x \leq l, \end{aligned}$$

به ترتیب، بسط‌های زوج و فرد  $f_n$  از  $[0, l]$  به  $[-l, l]$  هستند. نشان دهید که مجموعه  $\{\phi_n\} \cup \{\psi_n\}$  در  $L^2(-l, l)$  متعامد است. اگر  $\{f_n\}$  در  $L^2(0, l)$  متعامد باشد، مجموعه متعامد یکه متناظر آن در  $L^2(-l, l)$  چیست؟

## فصل ۲

### نظریه اشتروم-لیوویل

مجموعه‌های متعامد کامل از توابع در  $L^2$  به‌طور طبیعی به‌عنوان جواب‌های معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم تحت شرایط مرزی مناسب، که معمولاً به‌عنوان مسائل مقدار مرزی اشتروم-لیوویل نامیده می‌شوند، پس از ریاضی‌دان سوئیسی ژاک اشتروم<sup>۱</sup> (۱۸۰۳-۱۸۵۵ م.) و ریاضی‌دان فرانسوی جوزف لیوویل<sup>۲</sup> (۱۸۰۹-۱۸۸۲ م.) کسانی که این مسائل و ویژگی‌های جواب‌های آنها را مورد مطالعه قرار دادند به وجود آمدند. معادلات دیفرانسیل در نظر گرفته‌شده در اینجا، به‌طور مستقیم به‌عنوان مدل‌های ریاضی حرکت طبق قانون نیوتن به وجود می‌آیند، ولی بیشتر به‌عنوان یک نتیجه از کاربرد روش جداسازی متغیرها معادلات دیفرانسیل جزئی کلاسیک فیزیک مانند معادله‌های لاپلاس، معادله گرما و معادله موج را حل می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup>Jacques Sturm

<sup>۲</sup>Joseph Liouville



## ۱.۲ معادله‌های خطی مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر را روی فاصله حقیقی  $I$  در نظر بگیرید.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1.2)$$

که  $a_0, a_1, a_2$  و  $f$  توابع مختلط روی  $I$  هستند. برای  $f = 0$  روی  $I$ ، معادله همگن نامیده می‌شود، وگرنه ناهمگن است، هر تابع (مختلط)  $\varphi \in \mathbb{C}^2(I)$  جواب معادله (۱.۲) است، هرگاه با جای‌گذاری  $y$  توسط  $\Phi$  اتحاد زیر به‌ازای هر  $x \in I$  نتیجه شود.

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x).$$

اگر عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم

$$a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

را با  $L$  نمایش دهیم، آنگاه معادله (۱.۲) به صورت  $Ly = f$  نوشته می‌شود. عملگر  $L$  خطی است، یعنی

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi,$$

برای توابع  $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^2(I)$  و ثابت‌های  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ، ازاین‌رو، (۱.۲) معادله دیفرانسیل خطی نامیده می‌شود. به غیر از مواردی که مشخص شده باشد تمام معادلات دیفرانسیل و عملگرهایی که با آنها سروکار داریم خطی هستند. یک ویژگی اساسی معادلات همگن خطی این است که هر ترکیب خطی از جواب‌های معادله نیز یک جواب معادله است، زیرا

اگر  $\varphi$  و  $\psi$  در

$$L\psi = 0, \quad L\varphi = 0$$

صدق کنند، آنگاه به‌وضوح برای هر زوج از ثابت‌های  $c_1$  و  $c_2$  داریم:

$$L(c_1\varphi, c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi = 0$$

این به‌عنوان اصل انطباق شناخته می‌شود.

اگر تابع  $a_0$  در هر نقطه از  $I$  صفر نباشد، با تقسیم معادله (۱.۲) بر  $a_0$  داریم:

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x), \quad (2.2)$$

که  $q = a_1/a_0$ ،  $r = a_2/a_0$  و  $g = f/a_0$ . معادلات (۱.۲) و (۲.۲) به‌وضوح معادل

هستند، یعنی مجموعه جواب‌های یکسانی دارند. اگر نقطه  $c \in I$  وجود داشته باشد که

$a_0(c) = 0$ ، معادله منفرد است و  $c$  به‌عنوان یک نقطه منفرد معادله است، وگرنه، معادله

(۱.۲) را روی  $I$  منظم می‌گویند.

بر طبق قضیه وجود و منحصربه‌فردی معادلات خطی ([۶] را ببینید)، اگر توابع  $q$ ،  $r$ ،

و  $g$  همگی روی  $I$  پیوسته باشند و  $x_0$  یک نقطه در  $I$  باشد، آنگاه، برای هر دو عدد  $\xi$  و  $\eta$ ،

جواب منحصربه‌فرد  $\varphi$  از (۲.۲) روی  $I$  وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\varphi(x_0) = \xi, \quad \varphi'(x_0) = \eta. \quad (3.2)$$

معادله (۳.۲) شرایط اولیه نامیده می‌شود و دستگاه معادله‌های (۲.۲) و (۳.۲) مسئله مقدار

اولیه نامیده می‌شود.

در اینجا برخی ویژگی‌های معروف جواب‌های معادله (۲.۲) که در بسیاری از کتاب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مشاهده می‌شود را بیان می‌کنیم.

۱. معادله همگن

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (4.2)$$

دو جواب مستقل خطی  $y_1(x)$  و  $y_2(x)$  روی  $I$  دارد. یک ترکیب خطی از این دو جواب

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (5.2)$$

که  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌های دلخواه هستند، این جواب عمومی معادله (۴.۲) است. یعنی، هر جواب معادله برای مقادیر  $c_1$  و  $c_2$  باکمک (۵.۲) داده شده است. وقتی  $c_1 = c_2 = 0$  جواب بدیهی صفر را به دست می‌آوریم، که همیشه یک جواب معادله همگن است. توسط قضیه منحصر به فردی، اگر در (۳.۲)،  $\xi = \eta = 0$  باشد، آن تنها جواب است.

۲. اگر  $y_p(x)$  یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (۲.۲) باشد، آن‌گاه

$$y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

جواب عمومی برای معادله (۲.۲) است. با به کارگیری شرایط اولیه (۳.۲) ثابت‌های  $c_1$  و  $c_2$  تعیین می‌شوند و جواب منحصر به فرد دستگاه معادلات (۲.۲) و (۳.۲) را به دست می‌آوریم.

۳. وقتی که ضرایب  $q$  و  $r$  ثابت باشند جواب عمومی معادله (۴.۲) به صورت

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x},$$

است که  $m_1$  و  $m_2$  ریشه‌های متمایز معادله درجه دوم  $m^2 + qm + r = 0$  هستند. اگر  $m_1 = m_2 = m$  باشد آن‌گاه، جواب به صورت  $c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$  در نظر گرفته می‌شود که در آن توابع  $e^{mx}$  و  $x e^{mx}$  مستقل خطی هستند.

۴. وقتی  $a_1(x) = x^2$ ،  $a_2(x) = ax$  و  $a_3(x) = b$  که  $a$  و  $b$  ثابت هستند. همگن معادله (۱.۲) به صورت

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

در می‌آید که آن را معادله کوشی-اویلر می‌نامیم. جواب عمومی آن به صورت

$$c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

است که  $m_1$  و  $m_2$  ریشه‌های متمایز معادله  $m^2 + (a-1)m + b = 0$  هستند. وقتی  $m_1 = m_2 = m$  باشد، جواب به صورت  $c_1 x^m + c_2 x^m \log x$  است.

۵. اگر ضرایب  $q$  و  $r$  توابع تحلیلی در نقطه  $x_0$  در درون  $I$  باشند یعنی  $q$  و  $r$  در یک بازه باز به مرکز  $x_0$  با کمک سری توانی برحسب  $(x - x_0)$  نمایش داده شوند، آن‌گاه جواب عمومی (۴.۲) نیز در  $x_0$  تحلیلی است و توسط سری توانی به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

نمایش داده می‌شود. سری در اشتراک دو فاصله همگرایی (از  $q$  و  $r$ ) و  $I$  همگرا می‌شود. جای‌گذاری این سری در معادله (۴.۲) به ما اجازه می‌دهد تا ضرایب  $c_n$ ، به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  برحسب  $\{2, 3, 4, \dots\}$ ،  $c_1$  و  $c_0$  که اختیاری هستند بیان می‌شوند.

با  $I = [a, b]$ ، جواب‌های معادله (۱.۲) به شرایط مرزی در  $a$  و  $b$  واگذار می‌شوند.

این‌ها یکی از فرم‌های زیر را می‌توانند اختیار کنند:

$$(۱) \quad y(c) = \xi, \quad y'(c) = \eta, \quad c \in \{a, b\}$$

$$(۲) \quad y(a) = \xi, \quad y(b) = \eta,$$

$$(۳) \quad y'(a) = \xi, \quad y'(b) = \eta.$$

هنگامی که شرایط مرزی در نقطه  $c$  داده شوند، مانند (۱) می‌بینیم، آنها اغلب به‌عنوان شرایط اولیه هستند همان‌طور که پیش از این گفته شد، به منظور به‌دست آوردن یک جواب منحصر به فرد معادله (۱.۲)، نقطه  $c$  لازم نیست به‌طور کلی، یکی از نقاط انتهایی بازه  $I$  باشد و می‌تواند نقطه درونی باشد، ولی در این کتاب، مانند بیشتر کاربردهای فیزیکی، همیشه شرایط مرزی (یا اولیه) در نقاط انتهایی بازه  $I$  هستند. قسمت‌های (۱) تا (۳) شرایط مرزی می‌توانند با جفت معادله‌های زیر تعمیم داده شوند:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \xi, \quad (۶.۲)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y'(a) = \eta, \quad (۷.۲)$$

که  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ثابت‌هایی هستند که در  $\sum_{i=1}^4 |\alpha_i| > 0$  و  $\sum_{i=1}^4 |\beta_i| > 0$  صدق می‌کنند، یعنی به‌گونه‌ای که همه  $\alpha_i$ ها یا  $\beta_i$ ها صفر نیستند. دستگاه معادلات (۱.۲)، (۶.۲) و (۷.۲) مسئله مقدار مرزی نامیده می‌شود.

شرایط مرزی معادله‌های (۶.۲) و (۷.۲) اگر  $\xi = \eta = 0$  همگن نامیده و اگر  $\beta_4 =$

$\beta_3 = \alpha_4 = \alpha_3 = 0$  جداشده نامیده می‌شوند. شرایط مرزی جداشده که به‌صورت

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta, \quad (۸.۲)$$

هستند، در این کتاب اهمیت خاصی دارند. یک جفت مهم دیگر از شرایط همگن، که نتیجه انتخاب خاص ضرایب در (۶.۲) و (۷.۲) است به صورت

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b). \quad (۹.۲)$$

است. معادله (۹.۲) شرایط مرزی متناوب نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که شرایط متناوب جفت شده نه جدا شده هستند.

تعریف ۱.۱.۲. برای هر دو تابع  $f, g \in C^1$ ، دترمینان

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

رونسکی  $f$  و  $g$  نامیده می‌شود. نماد  $W(f, g)(x)$  را به اختصار با  $W(x)$  نشان می‌دهیم.

رونسکی اهمیت خود را در مطالعه معادلات دیفرانسیل از لم زیر به دست می‌آورد.

لم ۲.۱.۲. اگر  $y_1$  و  $y_2$  جواب‌های معادله همگن زیر باشند

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (۱۰.۲)$$

که  $q \in C(I)$ ، آنگاه به ازای هر  $x \in I$  یا  $W(y_1, y_2)(x) = 0$  یا  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ .

برهان. با استفاده از تعریف ۱.۱.۲

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

چون  $y_1$  و  $y_2$  جواب‌های معادله (۱۰.۲) هستند، داریم

$$y_1'' + qy_1' + ry_1 = 0,$$

$$y_2'' + qy_2' + ry_2 = 0.$$

با ضرب معادله اول در  $y_2$  و معادله دوم در  $y_1$ ، و کم کردن آنها از هم، داریم:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + q(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

$$\Rightarrow W' + qW = 0$$

با حل معادله دیفرانسیل آخر، به دست می‌آوریم:

$$W(x) = c \exp\left(-\int_a^x q(t) dt\right), \quad x \in I, \quad (11.2)$$

که  $c$  ثابت دلخواه است. تابع نمایی برای هر توان (حقیقی یا مختلط) صفر نمی‌شود.

بنابراین،  $W(x) = 0$  اگر و تنها اگر  $c = 0$  باشد.  $\square$

تبصره ۳.۱.۲. برای  $q \in C(I)$ ، عبارت (۱۱.۲) نشان می‌دهد که هر دوی  $W$  و  $W'$

پیوسته هستند.

لم ۴.۱.۲. هر دو جواب  $y_1$  و  $y_2$  از معادله (۱۰.۲) مستقل خطی هستند، اگر و تنها اگر

روی  $I$ ،

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0.$$

برهان. اگر  $y_1$  و  $y_2$  وابسته خطی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است، بنابراین، روی  $I$ ،  $W(y_1, y_2)(x) = 0$ . برعکس، اگر در هر نقطه در  $I$ ،  $W(y_1, y_2)(x) = 0$  باشد، آنگاه بنا بر لم ۲.۱.۲،  $W(y_1, y_2)(x) = 0$ . از خواص دترمینانها، نتیجه می‌شود که توابع برداری  $(y_1, y_1')$  و  $(y_2, y_2')$  وابسته خطی هستند و ازاین‌رو،  $y_1$  و  $y_2$  وابسته خطی‌اند.  $\square$

تبصره ۵.۱.۲. ما از این حقیقت که  $y_1$  و  $y_2$  جواب‌های معادله (۱۰.۲) هستند تنها در قسمت دوم اثبات، قسمت « تنها اگر » استفاده کردیم. به این دلیل که رونسکی دو تابع مستقل خطی ممکن است در برخی از نقاط  $I$  ولی در همه‌جا، صفر شود، برای مثال  $x$  و  $x^2$  را روی  $[-1, 1]$  در نظر بگیرید.

مثال ۶.۱.۲. معادله

$$y'' + y = 0 \quad (12.2)$$

دو جواب مستقل خطی  $\sin x$  و  $\cos x$  دارد. ازاین‌رو، جواب عمومی آن به صورت

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

است. توجه داریم که به‌ازای هر  $x$  در  $\mathbb{R}$

$$W(\cos x, \sin x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

اگر معادله (۱۲.۲) را با توجه به شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$



روی فاصله  $[0, \pi]$  در نظر بگیریم جواب منحصر به فرد

$$y(x) = \sin x,$$

را به دست می آوریم. ولی شرایط مرزی همگن

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

همان طور که انتظار می رود، جواب بدیهی  $y = 0$  را نتیجه می دهد.

از طرف دیگر، شرایط مرزی

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

جواب منحصر به فرد نمی دهد چون جفت معادله های

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1 = 0$$

ثابت  $c_2$  را تعیین نمی کنند، دترمینان ضرایب در این دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix} = 0.$$

مثال پایانی نشان می دهد که شرایط مرزی (۶.۲) و (۷.۲) در همه موارد، ثابت های  $c_1$

و  $c_2$  را در جواب عمومی به طور منحصر به فرد تعیین نمی کنند، ولی شرایط اولیه

$$y(x_0) = \xi, \quad y'(x_0) = \eta,$$

همیشه یک جواب منحصر به فرد را به دست می‌دهد، چون دترمینان ضرایب در دستگاه معادله‌های

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \xi$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \eta$$

توسط

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0),$$

معین می‌شود، که با توجه به لم ۴.۱.۲، نمی‌تواند صفر شود.

در حالت کلی، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم روی  $[a, b]$  با شرایط مرزی جدا شده

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta,$$

که روی جواب عمومی  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  اعمال شده است، دستگاه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$c_1 [\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a)] + c_2 [\alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a)] = \xi,$$

$$c_1 [\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2 [\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = \eta.$$

از این رو، ثابت‌های  $c_1$  و  $c_2$  به صورت منحصر به فرد معین می‌شوند، اگر و تنها اگر،

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1')(a) & (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2')(a) \\ (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_1')(b) & (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_2')(b) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (13.2)$$

## تمرین‌ها

۱.۲. جواب عمومی هریک از معادله‌های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } y'' - 4y' + 7y = e^x$$

$$\text{ب) } xy'' - y' = 3x^2$$

$$\text{ج) } x^2 y'' + 3xy' + y = x - 1$$

۲.۲. با استفاده از تبدیل  $t = \sqrt{x}$  معادله  $xy'' + y'/2 - y = 0$  را حل کنید.

۳.۲. با استفاده از سری‌های توانی، معادله  $y'' + 2xy' + 4y = 0$  را حول نقطه  $x = 0$

حل کنید و فاصله همگرایی جواب را نیز مشخص کنید.

۴.۲. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + \frac{1}{1-x}(xy' - y) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

۵.۲. اگر  $\varphi_1, \varphi_2$  و  $\varphi_3$  جواب‌های معادله (۴.۲) باشند ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

۶.۲. اگر  $y_1$  و  $y_2$  جواب‌های مستقل خطی معادله ۴.۲ باشند، نشان دهید که

$$q = \frac{y_2 y_1'' - y_1 y_2''}{W(y_1, y_2)}, \quad r = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}.$$

۷.۲. برای هر زوج از جواب‌های زیر، معادله دیفرانسیل متناظر به صورت  $a_2 y'' + a_1 y' +$

$a_0 y = 0$  را تعیین کنید.

الف)  $e^{-x} \cos 2x, e^{-x} \sin 2x$ .

ب)  $x^{-1}, x$ .

ج)  $\log x, 1$ .

## ۲.۲ صفرهای جواب‌ها

حل دقیق معادله دیفرانسیل از نوع

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (۱۴.۲)$$

به منظور مطالعه ویژگی‌های جواب‌های آن نه ضروری است و نه همیشه امکان‌پذیر است. در شرایط خاص، پارامترهای معادله و شرایط مرزی آن کاملاً این ویژگی‌ها را تعیین می‌کنند. به طور خاص، چنین ویژگی‌های کیفی از جواب، مانند تعداد و توزیع صفرهای آن، نقاط تکین آن، رفتار مجانبی آن، و ویژگی‌های تعامدی آن همه توسط ضرایب  $q$  و  $r$  و شرایط مرزی داده‌شده اداره می‌شوند. بنابراین، می‌توانیم با تجزیه و تحلیل اثر این ضرایب روی رفتار جواب برخی از این ویژگی‌ها را دریافت کنیم. در این بخش، به بررسی اثر  $q$  و  $r$  روی توزیع صفرهای جواب‌ها خواهیم پرداخت. تعامد در دو بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در مثال (۶.۱.۲)، دریافتیم که دو جواب  $y'' + y = 0$  در  $\mathbb{R}$  یک دنباله نامتناهی از

صفرهای متناوب به‌طور یکنواخت توزیع شده دارد که به‌صورت

$$\dots < -\pi < \frac{-\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{3\pi}{2} < \dots$$

معین می‌شود که  $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$  صفرهای  $\sin x$  و  $\{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$  صفرهای

$\cos x$  هستند. در حال حاضر باید دریابیم که این کاملاً اتفاقی نیست.

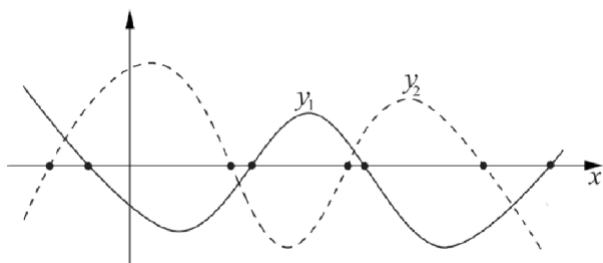
تابع  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  گفته می‌شود که در  $x \in I$  صفر منزوی دارد، اگر  $f(x) = 0$  و همسایگی  $U$  از  $x$  موجود باشد، به طوری که به ازای هر  $x \in I \cap U$ ،  $f(x) \neq 0$ .  
 لم ۱.۲.۲. اگر  $y$  یک جواب غیربدیهی معادله همگن (۱۴.۲) باشد، آن‌گاه صفرهای  $y$  در  $I$  منزوی هستند.

برهان. فرض کنید  $y(x) = 0$ ، که  $y$  جواب (۱۴.۲) است. اگر  $y'(x) = 0$ ، آن‌گاه  $y$  توسط قضیه منحصر به فردی متحد با صفر است. اگر  $y'(x) \neq 0$  باشد، آن‌گاه چون  $y'$  روی  $I$  پیوسته است، که همسایگی  $U$  از  $x$  وجود دارد که روی  $U \cup I$ ،  $y' \neq 0$  را (۱) را ببینید. در نتیجه،  $y$  روی  $U \cup I$  اکیداً افزایشی یا اکیداً کاهشی است.  $\square$

قضیه ۲.۲.۲ (قضیه جداسازی اشتروم). اگر  $y_1$  و  $y_2$  دو جواب مستقل خطی معادله

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I$$

باشند، آن‌گاه صفرهای  $y_1$  و  $y_2$  متمایز و یک‌درمیان خواهند بود. به این معنا که  $y_1$  درست یک‌بار بین دو صفر متوالی  $y_2$  صفر می‌شود و برعکس.



شکل ۱.۲: صفرهای متمایز  $y_1$  و  $y_2$

برهان. چون  $y_1$  و  $y_2$  مستقل خطی هستند، رونسکی آنها

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

صفر نمی‌شود، بنابراین، یک علامت روی  $I$  دارد (لم ۴.۱.۲). ابتدا توجه داشته باشید که  $y_1$  و  $y_2$  نمی‌توانند صفر مشترکی داشته باشند، چرا که در این صورت، رونسکی در آن نقطه صفر خواهد شد که این شدنی نیست. اکنون، فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  دو صفر متوالی  $y_2$  هستند، آن‌گاه

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0,$$

$$W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0,$$

و مقادیر  $y_1(x_1)$ ،  $y_1(x_2)$ ،  $y_2'(x_1)$  و  $y_2'(x_2)$  همگی ناصفرند. چون  $y_2'$  روی  $I$  پیوسته است،  $x_1$  یک همسایگی  $U_1$  دارد که علامت  $y_2'$  روی آن تغییر نمی‌کند. به‌طور مشابه،  $x_2$  یک همسایگی  $U_2$  دارد که علامت  $y_2'$  روی آن تغییر نمی‌کند. ولی علامت‌های  $y_2'$  روی  $U_1 \cap I$  و  $U_2 \cap I$  نمی‌تواند یکسان باشد، زیرا اگر  $y_2$  روی یکی افزایش یابد روی دیگری کاهش می‌یابد. برای آنکه  $W(x)$  علامت ثابتی روی  $I$  داشته باشد باید  $y_1(x_1)$  و  $y_1(x_2)$  مختلف‌العلامه باشند و بنابراین، با توجه به پیوستگی،  $y_1$  باید در نقطه‌ای بین  $x_1$  و  $x_2$  صفر شود. توجه می‌کنیم که  $y_1$  نمی‌تواند بیش از یک بار بین  $x_1$  و  $x_2$  صفر شود، زیرا اگر  $x_3$  و  $x_4$  دو صفر از  $y_1$  باشند که بین  $x_1$  و  $x_2$  قرار دارند، با بحث مشابهی نشان می‌دهیم که  $y_2$  باید بین  $x_3$  و  $x_4$  صفر شود. ولی این با فرض اولیه درمورد اینکه  $x_1$  و  $x_2$  دو صفر  $y_2$  هستند، تناقض دارد.  $\square$

نتیجه ۳. اگر دو جواب  $y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$  یک صفر مشترک در  $I$  داشته باشند، آنگاه آنها وابسته خطی هستند.

به این ترتیب، برای معادله توزیع صفرهای معادله (۱۴.۲)، راحت تر است که جمله  $qy'$

را با تبدیل معادله به

$$u'' + \rho(x)u = 0 \quad (15.2)$$

از بین ببریم. برای این منظور،

$$y(x) = u(x)v(x),$$

را در نظر می‌گیریم، به طوری که

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$y''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x),$$

با جای‌گذاری در معادله (۱۴.۲) نتیجه می‌شود:

$$vu'' + (2v' + qv)u' + (v'' + qv' + rv)u = 0.$$

بنابراین، با انتخاب  $2v' + qv = 0$ ، معادله (۱۵.۲) را به دست می‌آوریم، که نشان می‌دهد

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_a^x q(t) dt\right), \quad (16.2)$$

$$\rho(x) = r(x) - \frac{1}{4}q^2(x) - \frac{1}{2}q'(x).$$

تابع نمایی  $\nu$  روی  $\mathbb{R}$  هرگز صفر نمی‌شود، بنابراین، صفرهای  $u$  برابر با صفرهای  $y$  نمی‌شود و ممکن است ما به منظور بررسی توزیع صفرهای (۱۴.۲)، توجه‌مان را به معادله (۱۵.۲) محدود کنیم.

**قضیه ۳.۲.۲** (قضیه مقایسه اشتروم). فرض کنید  $\varphi$  و  $\psi$  به ترتیب جواب‌های غیرصفر معادله‌های

$$y'' + r_1(x)y = 0,$$

$$u'' + r_2(x)u = 0, \quad x \in I,$$

هستند و فرض کنید به ازای هر  $x \in I$ ،  $r_1(x) \geq r_2(x)$ . آنگاه  $\varphi$  بین هر دو صفر متوالی  $\psi$  حداقل یک بار صفر می‌شود، مگر اینکه  $r_1(x) \equiv r_2(x)$  و  $\varphi$  یک مضرب از  $\psi$  باشد.

برهان. فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  دو صفر متوالی  $\psi$  روی  $I$  هستند و فرض کنید که  $\varphi$  در فاصله  $(x_1, x_2)$  صفر نشود. همچنین، فرض می‌کنیم که هر دو تابع  $\varphi$  و  $\psi$  روی  $(x_1, x_2)$  مثبت هستند، زیرا اگر لازم باشد، می‌توانیم منفی تابع را به جای آن بگذاریم. چون  $\varphi'$  و  $\psi'$  پیوسته هستند، نتیجه می‌دهد که  $\psi'(x_1) \geq 0$  و  $\psi'(x_2) \leq 0$  و بنابراین، رونسکی  $\varphi$  و  $\psi$  در

$$W(x_1) = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geq 0, \quad W(x_2) = \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0 \quad (17.2)$$

صدق می‌کند. ولی چون به ازای هر  $x \in (x_1, x_2)$

$$W'(x) = \varphi(x)\psi''(x) - \varphi''(x)\psi(x)$$



$$= [r_1(x) - r_2(x)]\varphi(x)\psi(x) \geq 0,$$

$W$  یک تابع صعودی روی  $(x_1, x_2)$  است. این مسئله با معادله (۱۷.۲) در تناقض است، مگر اینکه  $0 \equiv r_1(x) - r_2(x)$  و  $0 \equiv W(x)$  باشد، در این صورت،  $\varphi$  و  $\psi$  وابسته خطی‌اند (توسط لم ۴.۱.۲). □

نتیجه ۴. فرض کنید  $\varphi$  یک جواب غیرصفر معادله  $y'' + r(x)y = 0$  روی  $I$  باشد. اگر  $0 \leq r(x)$  آن‌گاه  $\varphi$  حداکثر یک صفر روی  $I$  دارد.

برهان. اگر جواب  $\varphi$  دو صفر روی  $I$  داشته باشد، مثلاً،  $x_1$  و  $x_2$ ، آن‌گاه، با کمک قضیه ۱۰.۲، جواب  $\Psi(x) \equiv 1$  از  $u'' = 0$  باید روی  $(x_1, x_2)$  صفر شود، که این شدنی نیست. □

مثال ۴.۲.۲. (الف) هر جواب غیرصفر از  $y'' = 0$  روی  $\mathbb{R}$  یک حالت خاص از

$$\varphi(x) = c_1x + c_2$$

است که با یک خط راست نمایش داده می‌شود و حداکثر یک صفر دارد.

(ب) معادله  $y'' - y = 0$  دارای جواب عمومی زیر است:

$$\varphi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

اگر  $c_1$  و  $c_2$  هر دو صفر نباشند، آن‌گاه به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $\varphi(x) \neq 0$  است، مگر اینکه  $c_2 = -c_1$ ، که در این حالت  $\varphi$  یک صفر در  $x = 0$  دارد.

(ج) جواب  $y'' + y = 0$  به صورت

$$\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = a \sin(x - b),$$

معین می‌شود که  $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  و  $b = -\arctan(c_1/c_2)$ . اگر  $a \neq 0$  باشد  $\varphi$  یک تعداد نامتناهی از صفرهای معین شده با  $x_n = b + n\pi$ ،  $n \in \mathbb{Z}$  دارد.

جواب غیرصفر

$$y'' + r(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (18.2)$$

نوسانی نامیده می‌شود، اگر آن یک تعداد نامتناهی صفر داشته باشد، مانند قسمت (ج) مثال ۴.۲.۲. بر اساس قضیه ۳.۲.۲، این معادله جواب‌های نوسانی وابسته به تابع  $r$  دارد. اگر  $r(x) \leq 0$  باشد، جواب‌ها نمی‌توانند توسط نتیجه ۴ نوسان کنند، ولی اگر

$$r(x) > k^2 > 0, \quad x \in I,$$

برای  $k$  ثابت مثبت، آن‌گاه هر جواب (۱۸.۲) روی  $I$  یک تعداد نامتناهی از صفرهای توزیع شده بین صفرهای جواب  $y'' + k^2 y = 0$  دارد، مثل  $a \sin k(x - b)$ ، که با

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}$$

معین می‌شود. بنابراین، هر زیربازه از  $I$  با طول  $\pi/k$ ، حداقل یک صفر از معادله (۱۸.۲) دارد و وقتی  $k$  افزایش می‌یابد، انتظار داریم که تعداد صفرها افزایش یابد. البته وقتی که  $r$  ثابت است، این حالت واضح است.

همچنین از قضیه جداسازی اشتروم، نتیجه می‌گیریم که، اگر فاصله  $I$  نامتناهی و یک

جواب معادله

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

نوسانی باشد، آن‌گاه همه جواب‌های آن نوسانی هستند.

مثال ۵.۲.۲. معادله

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (19.2)$$

به معادله بسل از مرتبه  $\nu$  معروف است، و موضوع فصل پنجم است. با استفاده از فرمول

$$u = \sqrt{xy} \quad (16.2) \text{ معادله بسل به صورت زیر درمی‌آید:}$$

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}\right)u = 0. \quad (20.2)$$

با مقایسه معادله (۲۰.۲) و  $u'' + u = 0$  می‌بینیم که

$$r(x) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} \begin{cases} \geq 1, & 0 \leq \nu < \frac{1}{2} \\ < 1, & \nu > \frac{1}{2} \end{cases}$$

با استفاده از قضیه ۱۴.۲، نتیجه می‌گیریم:

(الف) اگر  $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$  آن‌گاه، در هر زیربازه از  $(0, \infty)$  با طول  $\pi$ ، هر جواب معادله بسل

حداقل یک صفر دارد.

(ب) اگر  $\nu > \frac{1}{2}$  باشد، آن‌گاه، در هر زیربازه از  $(0, \infty)$  با طول  $\pi$ ، هر جواب غیرصفر

معادله بسل حداکثر یک صفر دارد.

(ج) اگر  $\nu = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه فاصله بین صفرهای متوالی از هر جواب غیرصفر معادله بسل دقیقاً

$\pi$  است.

### تمرین‌ها

۸.۲. ثابت کنید که هر جواب غیرصفر از  $y'' + r(x)y = 0$  روی یک بازه متناهی، حداکثر تعداد متناهی صفر دارد.

۹.۲. ثابت کنید که هر جواب غیربدیهی از معادله

$$y'' + \frac{k}{x^2}y = 0$$

روی  $(0, \infty)$  نوسانی است، اگر و تنها اگر  $k > \frac{1}{4}$ . راهنمایی: از جانشینی  $x = e^t$  استفاده شود.

۱۰.۲. با استفاده از نتیجه تمرین (۹.۲) نتیجه بگیرید که هر جواب غیرصفر معادله  $y'' + r(x)y = 0$  روی  $(0, \infty)$ ، اگر  $r(x) > \frac{k}{x^2}$  برای  $k > \frac{1}{4}$  تعداد نامتناهی از صفرها و اگر  $r(x) < \frac{1}{4x^2}$  تنها یک تعداد متناهی از صفرها را دارد.

۱۱.۲. فرض کنید  $\varphi$  یک جواب غیرصفر از  $y'' + r(x)y = 0$  روی  $(0, \infty)$  است که  $r(x) > 0$ . اگر روی  $(0, a)$  برای عدد مثبت مشخص  $a$ ،  $\varphi(x) > 0$  و اگر نقطه  $x_0 \in (0, a)$  وجود داشته باشد که  $\varphi'(x_0) < 0$ ، ثابت کنید که  $\varphi$  در نقطه  $x_1 > x_0$  صفر می‌شود.

۱۲.۲. مشخص کنید کدام معادله‌های زیر روی  $(0, \infty)$  جواب نوسانی دارند.

الف)  $y'' + (\sin^2(x) + 1)y = 0$

ب)  $y'' - x^2y = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0 \quad (\text{ج})$$

۱۳.۲. جواب عمومی معادله بسل از مرتبه  $\frac{1}{2}$  را پیدا کنید و صفرهای هر جواب مستقل را تعیین کنید.

۱۴.۲. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ، ثابت کنید که جواب‌های  $y'' + (1 + f(x))y = 0$  نوسانی هستند.

۱۵.۲. ثابت کنید که هر جواب معادله آیری<sup>۱</sup>  $y'' + xy = 0$  یک تعداد نامتناهی از صفرها روی  $(0, \infty)$  و حداکثر یک صفر روی  $(-\infty, 0)$  دارد.

## ۳.۲ عملگر دیفرانسیل خودالحاق

به صورت کلی، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم (۱.۲) برمی‌گردیم که با کمی تغییرات به صورت زیر است:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad (21.2)$$

اکنون می‌خواهیم ویژگی‌های تعامدی جواب‌های آن را مورد بررسی قرار دهیم. این به معنای آن است که ما باید جواب‌های  $C^2$  از (۲۱.۲) را که در  $L^2$  قرار دارند را جست‌وجو کنیم. معادله (۲۱.۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$Ly = 0,$$

---

<sup>1</sup>Airy's equation

که

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x), \quad (22.2)$$

یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است و مقدار  $y$  در  $L^2(I) \cap C^2(I)$  قرار دارد که یک فضای برداری خطی است. این دو فضا با همان اعمال گفته شده اشتراک دارند.

برای ایجاد انگیزه بحث، در این مرحله، برخی از مفاهیم جبرخطی یادآوری می‌شود.  $A$

یک عملگر خطی در فضای برداری  $X$  به صورت نگاشت

$$A : X \rightarrow X$$

است که به ازای هر  $a, b \in F$  و  $x, y \in X$  در شرط زیر صدق می‌کند:

$$A(ax + by) = aAx + bAy.$$

اگر  $X$  یک فضای ضرب داخلی باشد، الحاق  $A$ ، اگر وجود داشته باشد، عملگر  $A'$  است

که به ازای هر  $x, y \in X$  در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\langle Ax, a \rangle = \langle x, A'y \rangle.$$

اگر  $A' = A$  باشد، آن‌گاه  $A$  را خودالحاق می‌گویند.

اگر  $X$  یک فضای ضرب داخلی با بُعد متناهی باشد، مانند  $\mathbb{C}^n$  روی  $\mathbb{C}$ ، می‌دانیم که هر

عملگر خطی، نسبت به پایه متعامد  $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ ، توسط ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

نمایش داده می‌شود. ماتریس خودالحاق آن توسط

$$A' = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = (\bar{a}_{ji}) = \bar{A}^T,$$

معین می‌شود که  $\bar{A}$  مزدوج مختلط  $A$  است. داریم:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

و  $A^T$  ترانهادۀ آن است،

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

عدد مختلط  $a$  مقدار ویژه  $A$  نامیده می‌شود اگر بردار غیرصفر مانند  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  وجود داشته باشد، به طوری که

$$A\mathbf{x} = a\mathbf{x},$$

و  $\mathbf{x}$  در این حالت یک بردار ویژه عملگر  $A$  متناظر با مقدار ویژه  $a$  نامیده می‌شود. از جبرخطی (مثال [۱۱] را ببینید) می‌دانیم که، اگر  $A$  ماتریس خودالحاق (یا هرمیتی) باشد، آنگاه:

(۱) مقادیر ویژه  $A$  همگی اعداد حقیقی هستند.

(۲) بردارهای ویژه  $A$  متناظر با مقادیر ویژه متمایز متعامد هستند.

(۳) بردارهای ویژه  $A$  یک پایه از  $X$  تشکیل می‌دهند.

به این ترتیب برای گسترش این نتایج به فضای  $L^2$ ، نخستین کار این است که فرم الحاقی عملگر

$$L : L^2(I) \cap C^2(I) \rightarrow L^2(I)$$

تعریف شده توسط معادله (۲۲.۲) را به دست آوریم، که برای شروع فرض می‌کنیم ضرایب  $p$ ،  $q$  و  $r$  توابع  $C^2$  روی  $I$  هستند. دقت کنید وقتی  $I$  یک فاصله بسته و کران‌دار باشد،  $C^2(I) \cap L^2(I) = C^2(I)$  است. با نشان دادن الحاق  $L$  توسط  $L'$ ، به‌ازای هر  $f, g \in C^2(I) \cap L^2(I)$  داریم:

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L'g \rangle. \quad (23.2)$$

قرار می‌دهیم  $I = (a, b)$ ، که فاصله  $I$  ممکن است منتهای یا نامنتهای باشد. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء با تغییر دادن سمت چپ معادله (۲۳.۲)، عملگر دیفرانسیل را از  $f$  به  $g$  تغییر می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf)\bar{g} dx \\ &= pf'\bar{g}|_a^b - \int_a^b f'(p\bar{g})' dx + qf\bar{g}|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})' dx + \int_a^b fr\bar{g} dx \\ &= [pf'\bar{g} - f(q\bar{g})']|_a^b + \int_a^b f(p\bar{g})'' dx + qf\bar{g}|_a^b - \int_a^b f'(p\bar{g})' dx \\ &\quad + \int_a^b fr\bar{g} dx \\ &= \langle f, (p\bar{g})'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \rangle + [p(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - p)f\bar{g}]_a^b, \end{aligned}$$



که انتگرال‌ها اگر  $(a, b)$  نامتناهی باشد یا هر یک از انتگرالده‌ها در  $a$  و  $b$  بی‌کران باشد ناسره در نظر گرفته شده‌اند. دقت کنید که سمت راست معادله فوق اگر  $p \in C^1(a, b)$ ،  $q \in C^1(a, b)$  و  $r \in C(a, b)$  باشند خوش‌تعریف است جمله پایانی، تفاوت بین حدها در  $a$  و  $b$  را نشان می‌دهد. بنابراین، به‌ازای هر  $f, g \in L^1(I) \cap C^1(I)$  داریم:

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + [p(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - p')f\bar{g}]_a^b, \quad (24.2)$$

که

$$\begin{aligned} L^*g &= (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \\ &= \bar{p}g'' + (\bar{p}' - \bar{q})g' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g. \end{aligned}$$

عملگر

$$L^* = \bar{p} \frac{d^2}{dx^2} + (\bar{p}' - \bar{q}) \frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})$$

را الحاق  $L$  می‌نامند.  $L$  را خودالحاق می‌گویند، وقتی که  $L^* = L$  باشد، که در این صورت،

$$\bar{p} = p, \quad \bar{p}' - \bar{q} = q, \quad \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r.$$

این سه معادله، اگر و تنها اگر توابع  $p, q, r$  و حقیقی و  $q = p'$  باشند، برقرار هستند. در این حالت،

$$\begin{aligned} Lf &= p'' + p'f' + rf \\ &= (pf')' + rf. \end{aligned}$$

بنابراین، وقتی  $L$  خودالحاق است، صورت زیر را دارد:

$$L = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + r,$$

و معادله (۲۴.۲) به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(f'\bar{g} - f\bar{g}')|_a^b. \quad (۲۵.۲)$$

با مقایسه معادله‌های (۲۳.۲) و (۲۵.۲) می‌بینیم که عملگر خودالحاق  $L$ ، خودالحاق است، اگر به‌ازای هر  $f, g \in L^2(I) \cap C^1(I)$  داشته باشیم:

$$p(f'\bar{g} - f\bar{g}')|_a^b = 0. \quad (۲۶.۲)$$

گفتنی است که در این مرحله، وقتی  $q = p'$  باشد، جمله  $\bar{q}' - \bar{p}''$  در عبارت  $L^*$  از بین می‌رود، از این رو، پیوستگی  $p''$  و  $q'$  دیگر لازم نیست.

ما به مسئله مقدار ویژه برای عملگر  $-L$  علاقه‌مند هستیم، یعنی جواب‌های معادله

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (۲۷.۲)$$

وقتی که  $u = 0$  است، این معادله برای هر مقدار  $\lambda$  برقرار است. وقتی  $u \neq 0$  است ممکن است برای مقادیر خاصی از  $\lambda$  برقرار باشد. این‌ها مقادیر ویژه  $-L$  هستند. هر تابع  $u \neq 0$  در  $L^2 \cap C^2$  که در معادله (۲۷.۲) صدق می‌کند، برای عدد مختلط  $\lambda$  یک تابع ویژه  $-L$  متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  است. همچنین، به مقادیر ویژه و توابع ویژه  $-L$  به‌عنوان مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله (۲۷.۲) اشاره می‌کنیم. چون این معادله همگن است، توابع ویژه

$L$  - با یک ثابت ضربی تعیین می‌شوند. هنگامی که شرایط مرزی مناسب به معادله (۲۷.۲) اضافه شود، دستگاه به دست آمده یک مسئله مقدار ویژه اشتروم-لیویل نامیده می‌شود، که در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد. واضح است که،  $L$  - خودالحاق است، اگر و تنها اگر  $L$  خودالحاق باشد. دلیلی که ما به دنبال مقادیر ویژه  $L$  - به جای  $L$  هستیم، این است که، همان‌طور که پیداست،  $L$  وقتی  $p$  مثبت است، مقادیر ویژه منفی دارد (مثال ۳.۳.۲ را ببینید). قضیه زیر نتایجی را که تاکنون به دست آوردیم را به‌طور خلاصه بیان می‌کند، زیرا ویژگی‌های (۱) و (۲) بالا را از فضای با بُعد متناهی به فضای با بُعد نامتناهی  $L^2 \cap C^2$  تعمیم می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید  $L : L^2(a, b) \cap C^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم تعریف شده توسط

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a, b),$$

است، که  $p \in C^2(a, b)$ ،  $q \in C^1(a, b)$  و  $r \in C(a, b)$ . آنگاه

(۱)  $L$  خودالحاق است، یعنی  $L^* = L$  است، اگر ضرایب  $p$ ،  $q$  و  $r$  حقیقی و  $q \equiv p'$  باشد.

(۲)  $L$  خودالحاق است، یعنی  $L' = L$  است، اگر  $L$  خودالحاق و معادله (۲۶.۲) برقرار باشد.

(۳) اگر  $L$  خودالحاق باشد، آنگاه مقادیر ویژه معادله

$$Lu + \lambda u = 0$$

همگی حقیقی هستند و هر زوج از توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز در  $L^2(a, b)$  متعامد هستند.

برهان. ما پیش از این (۱) و (۲) را ثابت کرده‌ایم. برای اثبات (۳) فرض می‌کنیم  $\lambda \in C$  یک مقدار ویژه  $L$  باشد آن‌گاه تابع  $f \in L^2(a, b) \cap C^1(a, b)$ ،  $f \neq 0$  وجود دارد، به طوری که

$$Lf + \lambda f = 0$$

$$\lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle.$$

چون  $L$  خودالحاق است،

$$-\langle Lf, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|^2.$$

از این رو،  $\bar{\lambda} \|f\|^2 = \lambda \|f\|^2$  چون  $\|f\| \neq 0$ ،  $\bar{\lambda} = \lambda$ . اگر  $\mu$  مقدار ویژه دیگری از  $-L$  متناظر با تابع ویژه  $g \in L^2(a, b) \cap C^1(a, b)$  باشد، آن‌گاه

$$\lambda \langle f, g \rangle = -\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle = \mu \langle f, g \rangle$$

$$(\lambda - \mu) \langle f, g \rangle = 0$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle f, g \rangle = 0.$$

□

تبصره ۲.۳.۲. همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، وقتی در عملگر  $L$ ،  $q = p'$  باشد، نتایج این قضیه تحت شرط ضعیف‌تر که  $p'$  پیوسته باشد، معتبر است.

مثال ۳.۳.۲. عملگر  $(\frac{d^2}{dx^2}) -$  با  $p = 1$ ،  $r = 0$  خودالحاق است. برای تعیین توابع ویژه آن در  $C^2(0, \pi)$ ، ما باید معادله زیر را حل کنیم:

$$u'' + \lambda u = 0.$$

نخست، حالتی که  $\lambda > 0$  است را در نظر می‌گیریم. جواب عمومی معادله به صورت

زیر معین می‌شود:

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (28.2)$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

معادله (۲۶.۲)، برقرار است، بنابراین،  $-\frac{d^2}{dx^2}$  در واقع خودالحاق است. با به‌کاربردن شرایط مرزی برای معادله (۲۸.۲) به دست می‌آوریم:

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین، مقادیر ویژه  $-\frac{d^2}{dx^2}$  توسط دنباله

$$(n^2 : n \in \mathbb{N}) = (1, 4, 9, \dots),$$

معین می‌شوند و توابع ویژه متناظر به آنها به صورت زیر هستند:

$$(\sin nx : n \in \mathbb{N}) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots).$$

توجه داشته باشید که برای سادگی،  $c_2 = 1$  را در نظر می‌گیریم، چون شرایط مرزی همچنین مقدار ویژه معادله همگی همگن هستند. همچنین، با تقسیم هریک از توابع ویژه بر نرم آن

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 x dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx : n \in \mathbb{N}\right),$$

را به دست می‌آوریم.

اگر  $\lambda = 0$  باشد، جواب معادله دیفرانسیل،  $c_1 x + c_2$  می‌شود. اگر  $\lambda < 0$  باشد، جواب آن  $c_1 \cosh x \sqrt{-\lambda} + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda} x$  می‌شود. در هر مورد، استفاده از شرایط مرزی  $x = 0$  و  $x = \pi$  به نتیجه  $c_1 = c_2 = 0$  منجر می‌شود. ولی جواب بدیهی به عنوان یک تابع ویژه قابل قبول نیست، بنابراین، در فاصله  $[-\infty, 0]$  هیچ مقدار ویژه‌ای نداریم. مقادیر ویژه  $\lambda_n = n^2$  اعداد حقیقی هستند، طبق قضیه ۱.۳.۲، توابع ویژه  $u_n(x) = \sin nx$  در  $L^2(0, \pi)$  متعامدند، چون به ازای هر  $n \neq m$

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right] \Big|_0^\pi = 0.$$

همان‌طور که در مثال بعد نشان می‌دهیم، گاهی وقت‌ها تعیین دقیق مقادیر ویژه یک

دستگاه ممکن نیست.

مثال ۴.۳.۲. معادله

$$u'' + \lambda u = 0$$

را روی فاصله  $(0, l)$ ، با شرایط مرزی جداشده

$$u(0) = 0, \quad hu(l) + u'(l) = 0,$$

که  $h$  یک ثابت مثبت است، در نظر می‌گیریم.

بررسی این مورد که این دستگاه روی فاصله  $(-\infty, 0]$  مقدار ویژه ندارد آسان است.

وقتی که  $\lambda > 0$  است، جواب عمومی

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

است. نخستین شرط مرزی ایجاب می‌کند  $c_1 = 0$ . از شرط مرزی دوم نتیجه می‌شود:

$$c_2(h \sin \sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l) = 0.$$

چون  $c_2$  نمی‌تواند صفر باشد، در این صورت تابع ویژه‌ای به دست نمی‌آوریم، بنابراین،

$$h \sin \sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0$$

چون  $\sin \sqrt{\lambda}l$  و  $\cos \sqrt{\lambda}l$  هر دو نمی‌توانند صفر شوند، نتیجه می‌شود که هیچ‌یک از آنها

صفر نیستند. بنابراین، با تقسیم طرفین بر  $\cos \sqrt{\lambda}l$ ، به دست می‌آوریم:

$$\tan \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}.$$

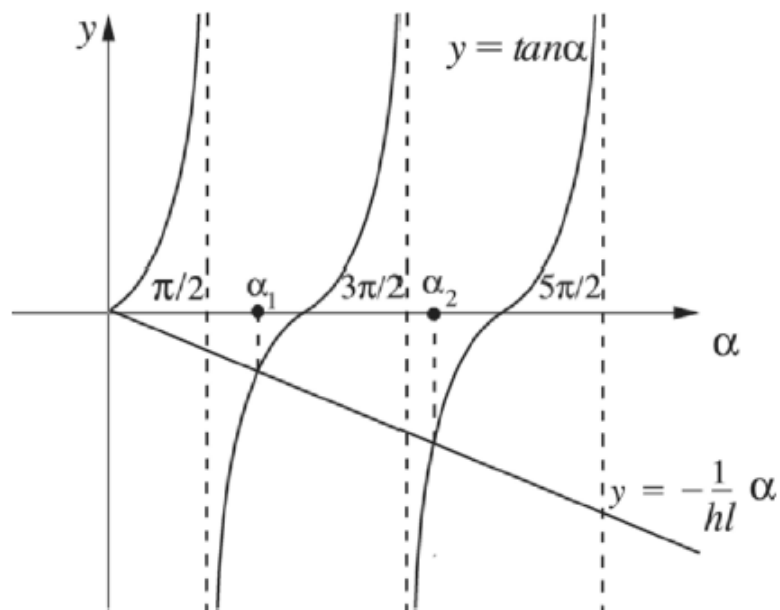
با جای‌گذاری  $\alpha = \sqrt{\lambda}l$ ، مشاهده می‌شود که  $\alpha$  توسط معادله

$$\tan \alpha = -\frac{\alpha}{hl}$$

معین می‌شود. این یک معادله غیرجبری است که توسط نقاط تقاطع نمودارهای

$$y = \tan \alpha, \quad \tan \alpha = -\frac{\alpha}{hl}$$

حل می‌شود، همان‌طور که توسط دنباله  $(\alpha_n)$  در شکل ۲.۲ نشان داده شده است.



شکل ۲.۲:  $y = \tan \alpha$

مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله به صورت زیر هستند:

$$\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^n,$$



$$u_n(x) = \sin\left(\frac{\alpha_n x}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N},$$

و نتایج در قضیه ۱.۳.۲ قسمت (۳) به وضوح برقرار است.

مثال زیر نشان می‌دهد، اگر روی  $I$ ،  $p' \neq q$  باشد، عملگر  $L$  در قضیه ۱.۳.۲ ممکن است وقتی که در یک تابع مناسب ضرب شود، به یک عملگر به‌طور صوری خودالحاق تبدیل شود.

مثال ۵.۳.۲. فرض کنید

$$L = p(x) \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x), \quad x \in I = [a, b],$$

که  $p \in C^{\alpha}(I)$  روی  $I$  صفر نمی‌شود،  $q \in C^1(I)$  و  $r \in C(I)$ . بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر  $x \in I$ ،  $p(x) > 0$  باشد. اگر  $p \neq q'$  باشد، با ضرب تابع  $\rho$  در  $L$  عملگر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{L} = \rho L = \rho p(x) \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} + \rho q(x) \frac{d}{dx} + \rho r(x).$$

$\tilde{L}$  خودالحاق است، اگر

$$\rho q = (\rho p)' = \rho p' + \rho' p.$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برحسب  $\rho$  است، که جواب آن به‌صورت

$$\rho(x) = \frac{c}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{q(t)}{p(t)} dt\right), \quad (29.2)$$

است که  $c$  ثابت است. توجه داشته باشید که  $\rho$  یک تابع  $C^2$  است که روی  $I$  کاملاً مثبت است. وقتی که  $q = p'$  باشد، این تابع به یک ثابت (ناصفر) تبدیل می‌شود، یعنی، زمانی که  $L$  خودالحاق است.

نتیجه مثال ۵.۳.۲ به ما اجازه می‌دهد که بخش (۳) قضیه ۱.۳.۲ را برای عملگرهای دیفرانسیل که خودالحاق نیستند، تعمیم دهیم. اگر  $Lu = pu'' + qu' + ru$ ، که  $p > 0$  و  $q \neq p'$  باشد، با ضرب معادله مقدار ویژه

$$Lu + \lambda u = 0,$$

در تابع مثبت  $\rho$  تعریف شده در (۲۶.۲)، به دست می‌آوریم:

$$\rho Lu + \lambda \rho u = 0, \quad (30.2)$$

که  $\rho L$  خودالحاق است. با در نظر گرفتن  $\rho > 0$ ، معادله (۲۶.۲) برابر است با

$$\rho p (f' \bar{g} - f \bar{g}') \Big|_a^b = 0.$$

با این کار، عملگر  $\rho L$  خودالحاق می‌شود. اگر  $u \in L_\rho^2$  یک تابع ویژه  $L$  متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|_\rho^2 &= \langle \lambda \rho u, u \rangle \\ &= \langle -\rho Lu, u \rangle \\ &= \langle u, -\rho Lu \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle u, \lambda \rho u \rangle \\
 &= \bar{\lambda} \|u\|_{\rho}^2.
 \end{aligned}$$

این به معنای آن است که  $\lambda$  یک عدد حقیقی است. افزون بر این، اگر  $v \in L_{\rho}^2$  تابع ویژه دیگری از  $L$  متناظر با مقدار ویژه  $\mu$  باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \mu) \langle u, v \rangle_{\rho} &= \lambda \langle \rho u, v \rangle - \mu \langle \rho u, v \rangle \\
 &= \langle \lambda \rho u, v \rangle - \langle u, \mu \rho v \rangle \\
 &= \langle -\rho Lu, v \rangle - \langle u, -\rho Lv \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

زیرا  $\rho L$  خودالحاق است. بنابراین، اگر  $\lambda \neq \mu$  باشد، آنگاه  $u$  با  $v$  در  $L_{\rho}^2$  متعامد است. بنابراین، تعمیم زیر از قضیه ۱.۳.۲ (ج) را ثابت کرده‌ایم:

**نتیجه ۵.** اگر  $L : L^2(a, b) \cap C^1(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$  یک عملگر خطی خودالحاق باشد و  $\rho$  یک تابع پیوسته و مثبت روی  $[a, b]$  باشد، آنگاه مقادیر ویژه معادله

$$Lu + \lambda \rho u = 0$$

همگی حقیقی هستند و هر جفت توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز در  $L_{\rho}^2(a, b)$  متعامدند.

**تبصره ۶.۳.۲.** (۱) در این نتیجه، مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله  $Lu + \lambda \rho u = 0$  در واقع مقادیر ویژه و توابع ویژه عملگر  $-\rho^{-1}L$  هستند.

(۲) فرض کنید فاصله  $(a, b)$  متناهی است. چون تابع وزن  $\rho$  روی  $[a, b]$  پیوسته و مثبت است، مینیمم مقدار  $\alpha$  و ماکزیمم مقدار  $\beta$  آن در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$0 < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \infty.$$

این به معنای آن است که

$$\sqrt{\alpha}\|u\| \leq \|u\|_{\rho} \leq \sqrt{\beta}\|u\|,$$

و بنابراین،  $\|u\|_{\rho} < \infty$  اگر و تنها اگر  $\|u\| < \infty$ . به این دو، نرم معادل گفته می‌شود و دو فضای  $L^2(a, b)$  و  $L^2_{\rho}(a, b)$  به‌طور وضوح شامل توابع مشابه هستند، اگرچه ضرب‌های داخلی متفاوتی دارند.

(۳) در اثبات این نتیجه نیازی نیست که  $L$  عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم باشد. درحقیقت، نتیجه برای هر عملگر خطی خودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی درست است.

مثال ۷.۳.۲. توابع ویژه و مقادیر ویژه مسئله مقدار مرزی زیر را پیدا کنید.

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < b, \quad (31.2)$$

$$y(1) = y(b) = 0. \quad (32.2)$$

حل: معادله (۳۱.۲) معادله کوشی-اویلر است که جواب‌های آن به شکل  $x^m$  است. با جای‌گذاری آن در معادله داریم:

$$m(m-1) + m + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

با فرض اینکه  $\lambda > 0$  است، داریم:

$$x^{i\sqrt{\lambda}} = e^{i\sqrt{\lambda} \log x} = \cos(\sqrt{\lambda} \log x) + i \sin(\sqrt{\lambda} \log x),$$

و جواب عمومی معادله (۲۱.۳) برابر است با

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \log x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \log x).$$

با به‌کارگیری شرایط مرزی (۳۲.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$y(1) = c_1 = 0, \quad y(b) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \log b) = 0.$$

چون نمی‌توانیم هر دو ثابت  $c_1$  و  $c_2$  را برابر صفر قرار دهیم، این به معنای آن است که

$$\sin(\sqrt{\lambda} \log b) = 0,$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} \log b = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین، مقادیر ویژه مسئله مقدار مرزی توسط دنباله اعداد حقیقی مثبت

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\log b}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

و دنباله توابع ویژه متناظر به‌صورت زیر است:

$$y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{\log b} \log x\right).$$

در اینجا مشاهده شد که عملگر دیفرانسیل

$$x^{\lambda} \frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}} + x \frac{d}{dx}$$

به طور صوری خودالحاق نیست، اما پس از ضرب در تابع وزن

$$\rho(x) = \frac{1}{x^{\lambda}} \exp\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{x}$$

به طور صوری خودالحاق می شود. آن گاه عملگر حاصل به صورت زیر است:

$$L = x \frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}} + \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} \right).$$

توابع ویژه  $(y_n : n \in \mathbb{N})$  این مسئله در واقع توابع ویژه  $-xL = -p^{-1}L = -xL$  هستند که در

$L^{\lambda}(1, b)$ ، نه  $L^{\lambda}(1, b)$  متعامد هستند. واضح است که به ازای هر  $m \neq n$ ،

$$\begin{aligned} \langle y_m, y_n \rangle_{\rho} &= \int_1^{\rho} \sin\left(\frac{mx}{\log b} \log x\right) \sin\left(\frac{nx}{\log b} \log x\right) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\log b}{\pi} \int_0^{\pi} \sin m\xi \sin n\xi d\xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

به عنوان یک تمرین نشان دهید که در فاصله  $(-\infty, 0]$  هیچ مقادیر ویژه ای وجود ندارد.

تمرین ها

۱۶.۲. با توجه به  $L = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + r$ ، اتحاد لاگرانژ

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'$$

را ثابت کنید. انتگرال این اتحاد،

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = [p(uv' - vu')]_a^b$$

به فرمول گرین معروف است.

۱۷.۲. توابع مشخصه و مقادیر ویژه عملگرهای دیفرانسیل زیر را تعیین کنید.

$$\cdot \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} : C^{\nu}(\cdot, \infty) \rightarrow C(\cdot, \infty) \text{ (الف)}$$

$$\cdot \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} : L^{\nu}(\cdot, \infty) \cap C^{\nu}(\cdot, \infty) \rightarrow L^{\nu}(\cdot, \infty) \text{ (ب)}$$

$$-\left(\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\right) : L^{\nu}(\cdot, \pi) \cap C^{\nu}(\cdot, \pi) \rightarrow L^{\nu}(\cdot, \pi) \text{ (ج)}$$

با شرایط مرزی  $u(\cdot) = u'(\pi) = 0$  خودالحاق است. بررسی کنید که مقادیر ویژه و توابع

مشخصه آن در قضیه ۱.۳.۲ قسمت (ج) صدق می‌کند.

۱۹.۲. هریک از عملگرهای دیفرانسیل زیر را با ضرب در یک تابع وزن مناسب در فرم

$$p > 0, p\left(\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\right) + p'\left(\frac{d}{dx}\right) + r$$

$$.x > 0, x^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \text{ (الف)}$$

$$.x \in \mathbb{R}, \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} - x \frac{d}{dx} \text{ (ب)}$$

$$.x > 0, \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} - x^{\nu} \frac{d}{dx} \text{ (ج)}$$

$$.x > 0, x^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} - x \frac{d}{dx} + (x^{\nu} - \lambda) \text{ (د)}$$

۲۰.۲. مقادیر ویژه و توابع مشخصه  $u'' + u = 0$  را روی  $(\cdot, l)$  تحت شرایط مرزی

$$hu(l) + u'(l) = 0, u(\cdot) = 0, \text{ تعیین کنید. } h \leq 0$$

۲۱.۲. مقدار ویژه معادله  $u'' + 2u' + \lambda u = 0$  را در فرم استاندارد  $Lu + \lambda \rho u = 0$  قرار

دهید که  $L$  خودالحاق است. آنگاه مقادیر ویژه و توابع مشخصه آن را روی  $[\cdot, l]$  با شرایط

مرزی  $u(0) = u(1) = 0$  پیدا کنید. بررسی کنید با نتیجه ۵ موافق است.  
 ۲۲.۲. مقادیر ویژه و توابع مشخصه معادله  $x^2 u'' + \lambda u = 0$  را روی  $[1, e]$  با شرایط مرزی  $u(1) = u(e) = 0$  به دست آورید.

## ۴.۲ مسئله اشتروم-لیوویل

در بخش ۳.۲ دیدیم که چگونه یک معادله دیفرانسیل خطی ممکن است به عنوان یک مسئله مقدار ویژه برای یک عملگر دیفرانسیل در فضای برداری با بُعد نامتناهی مطرح شود. مفهوم خودالحاق پذیری با ترسیم روی قیاس با تبدیلات خطی در فضای با بُعد متناهی تعریف شده بود و دیدیم که چطور دو ویژگی اول ماتریس خودالحاق، یعنی اینکه مقادیر ویژه آن حقیقی و بردارهای ویژه آن متعامد هستند، (تقریباً واژه به واژه) در قضیه ۱.۳.۲ تفسیر شد. ویژگی سوم این است که بردارهای ویژه آن فضا را تولید می کند و درحقیقت ماتریس بردارهای ویژه، تعداد آنها را نشان می دهد. این بخش، به نتیجه متناظر به دست آمده برای عملگرهای دیفرانسیل مربوط می شود که توسط قضایای ۵.۴.۲ و ۶.۴.۲ بیان می شود.

فرض کنید  $L$  یک عملگر خودالحاق به صورت زیر است:

$$L = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x). \quad (33.2)$$

معادله مقدار ویژه

$$Lu + \lambda p(x)u = 0, \quad x \in (a, b), \quad (34.2)$$



با شرایط مرزی همگن مجزا،

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad (35.2)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \quad (36.2)$$

که  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ثابت هستند، مسئله مقدار ویژه اشتروم-لیوویل نامیده می‌شود، یا به اختصار مسئله اشتروم-لیوویل می‌نامند.

چون  $L$  با این شرایط مرزی خودالحاق است، از نتیجه ۵ درمی‌یابیم که اگر آنها موجود باشند، مقادیر ویژه معادله (۳۴.۲) حقیقی و توابع ویژه‌شان در  $L^2_\rho(a, b)$  متعامد هستند. هنگامی که فاصله  $(a, b)$  کران‌دار و  $p$  روی  $[a, b]$  صفر نباشد، دستگاه معادله‌های (۳۴.۲) تا (۳۶.۲) مسئله اشتروم-لیوویل منظم نامیده می‌شود، وگرنه منفرد است. در مسئله منظم، بدون ازدست‌دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم که روی  $[a, b]$ ،  $p(x) > 0$  است. جواب‌های مسئله اشتروم-لیوویل به وضوح توابع ویژه عملگر  $-\frac{L}{\rho}$  در  $C^2$  هستند که در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق می‌کنند.

اکنون نشان می‌دهیم که مسئله اشتروم-لیوویل منظم نه تنها جواب دارد، بلکه تعداد کافی از آنها وجود دارد که  $L^2_\rho(a, b)$  را تولید می‌کنند. این نتیجه اساسی به صورت مرحله‌ای اثبات می‌شود. برای سادگی، فرض می‌کنیم که  $\rho(x) = 1$  است. نخست، تابع گرین را برای عملگر  $L$  با شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) می‌سازیم. این انتخاب  $\rho$  از برخی جزئیات گیج‌کننده، بدون پیچیده‌کردن اصل کلی جلوگیری می‌کند. از تابع گرین برای رسیدن به یک

عبارت انتگرال برای  $L^{-1}$  (معکوس  $L$ )، استفاده می‌کنیم. توابع ویژه  $-L$ ،

$$Lu + \lambda u = 0,$$

منطبق با توابع ویژه  $L^{-1}$ ،

$$L^{-1}u + \mu u = 0,$$

است و مقادیر ویژه متناظر وابسته به  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  هستند. با تجزیه و تحلیل ویژگی‌های طیفی

$L^{-1}$ ، یعنی مقادیر ویژه و توابع ویژه آن به نتایج مطلوب می‌رسیم.

درباره مسئله منفرد (تکین) در پایان این بخش بیشتر توضیح خواهیم داد.

## ۱.۴.۲ وجود توابع ویژه

تابع گرین برای عملگر دیفرانسیل خودالحاق

$$L = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + r,$$

با شرایط مرزی

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0,$$

تابع

$$G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

با ویژگی‌های زیر است.

۱.  $G$  متقارن است، یعنی به ازای هر  $x, \xi \in [a, b]$

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

و  $G$  در شرایط مرزی صدق می‌کند.

۲.  $G$  یک تابع پیوسته روی  $[a, b] \times [a, b]$  و از کلاس  $C^2$  روی  $\{(x, \xi) : [a, b] \times [a, b]\}$

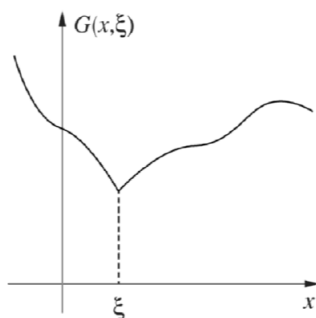
$\{x = \xi\}$  است که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$L_x G(x, \xi) = p(x)G_{xx}(x, \xi) + p'(x)G_x(x, \xi) + r(x)G(x, \xi) = 0.$$

۳. مشتق  $\partial G / \partial x$  در  $x = \xi$  ناپیوستگی جهشی دارد (شکل ۳.۲ را ببینید). داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\partial G}{\partial x}(\xi + \delta, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi - \delta, \xi) \right] \\ &= \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned} \quad (37.2)$$

فرض می‌کنیم که معادله همگن  $Lu = 0$ ، با شرایط مرزی می‌جزای (۳۵.۲) و (۳۶.۲) تنها



شکل ۳.۲: تابع گرین

جواب بدیهی  $u = 0$  را داراست. این به معنای آن است که  $0$ ، مقدار ویژه  $-L$  نیست. در این فرض، کلیت مسئله حفظ می‌شود، زیرا اگر  $\tilde{\lambda}$  یک عدد حقیقی باشد که مقدار ویژه  $-L$  نیست، می‌توانیم عملگر زیر را تعریف کنیم:

$$\tilde{L} = L + \tilde{\lambda} = p \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} + p' \frac{d}{dx} + \tilde{r},$$

که  $\tilde{r}(x) = r(x) + \tilde{\lambda}$  اکنون، چون

$$Lu + \lambda u = \tilde{L}u + (\lambda - \tilde{\lambda})u,$$

می‌بینیم که  $\lambda$  مقدار ویژه  $-L$  متناظر با تابع ویژه  $u$  است، اگر و تنها اگر  $\lambda - \tilde{\lambda}$  یک مقدار ویژه  $\tilde{L}$  متناظر با همان ویژه  $u$  باشد. چون  $\tilde{\lambda}$  یک مقدار ویژه  $-L$  نیست، صفر نمی‌تواند مقدار ویژه  $\tilde{L}$  باشد. بنابراین، از لم بعدی نتیجه می‌شود که اعداد حقیقی وجود دارند که مقادیر ویژه  $-L$  نیستند.

لم ۱.۴.۲. مقادیر ویژه  $-L$  با ثابت حقیقی از پایین کران‌دار شده‌اند.

برهان. به‌ازای هر  $u \in C^{\alpha}([a, b])$  که در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned} \langle -Lu, u \rangle &= \int_a^b [-(pu')' \bar{u} - r |u|^{\alpha}] dx \\ &= \int_a^b [p |u'|^{\alpha} - r |u|^{\alpha}] dx + p(a)u'(a)u(a) - p(b)u'(b)u(b) \\ &= \int_a^b [p |u'|^{\alpha} - r |u|^{\alpha}] dx + p(b) \frac{\beta_1}{\beta_2} u^{\alpha}(b) - p(a) \frac{\alpha_1}{\alpha_2} u^{\alpha}(a). \end{aligned}$$

اگر  $\beta_2 = 0$  باشد، آنگاه شرط مرزی دوم اشاره دارد که  $u(b) = 0$  و جمله دوم سمت راست از بین می‌رود. به‌طور مشابه جمله سوم اگر  $\alpha_2 = 0$  باشد، صفر است. در حالتی که  $u$  تابع ویژه  $-L$  با مقادیر مرزی  $u(a) = u(b) = 0$  است، فوری نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|^2 &= \int_a^b p(x) |u'(x)|^2 dx - \int_a^b r(x) |u(x)|^2 dx \\ &\geq -\|u\|^2 \max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

ازاین‌رو،  $l = -\max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\}$  یک کران پایین  $\lambda$  است.

از سوی دیگر، اگر  $u$  در شرایط مرزی مجزای  $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$  و  $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$  صدق کند، آنگاه استدلال ابعادی زیر نشان می‌دهد که نمی‌تواند بیش از دو تابع ویژه مستقل خطی از  $-L$  با مقدار ویژه کمتر از  $l$  وجود داشته باشد.

به دنبال یک تناقض هستیم. فرض کنید  $-L$  دارای سه تابع ویژه مستقل خطی  $u_1, u_2, u_3$  و با مقادیر ویژه متناظر  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  همگی کمتر از  $l$  است. بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که توابع مشخصه متعامدند. چون

$$\alpha_1 u_i(a) + \alpha_2 u_i'(a) = 0,$$

$$\beta_1 u_i(b) + \beta_2 u_i'(b) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

می‌بینیم که هر شش بردار  $(u_i(a), u_i'(a))$  و  $(u_i(b), u_i'(b))$  در یک زیرفضای یک بُعدی  $\mathbb{R}^2$  قرار می‌گیرند. بنابراین، سه بردار  $\mathbf{u}_i = (u_i(a), u_i'(a), u_i(b), u_i'(b))$  در زیر فضای دو بُعدی  $\mathbb{R}^4$  قرار می‌گیرند بنابراین، ما می‌توانیم ترکیب خطی  $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3$  را

تشکیل دهیم که در آن همه ضرایب صفر نیستند، به طوری که

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0.$$

این به آن معناست که،

$$c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) + c_3 u_3(a) = 0,$$

$$c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) + c_3 u_3(b) = 0.$$

بنابراین، تابع

$$v(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x)$$

یک تابع ویژه  $-L$  است که در  $v(a) = v(b) = 0$  صدق می‌کند و در نتیجه، مقدار ویژه

آن از پایین با  $l$  کران‌دار می‌شود، ولی با نامساوی زیر در تناقض است:

$$\begin{aligned} \langle -Lv, v \rangle &= \lambda_1 |c_1|^2 + \lambda_2 |c_2|^2 + \lambda_3 |c_3|^2 \\ &< l(|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) = l\|v\|^2. \end{aligned}$$

□

اکنون، تابع گرین را برای عملگر  $L$  با شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) می‌سازیم:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0.$$

بر طبق قضیه وجودی استاندارد برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم [۶]،  $Lu = 0$  دارای دو جواب منحصر به فرد (ناصفر)  $v_1$  و  $v_2$  است، به طوری که

$$v_1(a) = \alpha_2, \quad v_1'(a) = -\alpha_1,$$

$$v_1(b) = \beta_2, \quad v_1'(b) = -\beta_1.$$

بنابراین،  $v_1$  در نخستین شرط مرزی در  $x = a$  صدق می‌کند:

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0,$$

و  $v_2$  در شرط دوم صدق می‌کند:

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0$$

واضح است که  $v_1$  و  $v_2$  مستقل خطی هستند، وگرنه هر کدام مضرب ثابتی (غیر صفر) از دیگری است و آنگاه هر دو در  $Lu = 0$  و در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق می‌کنند. ولی این با فرض اینکه صفر مقدار ویژه  $L$  نیست، تناقض دارد.

اکنون، تعریف می‌کنیم:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c^{-1} v_1(\xi) v_2(x) & a \leq \xi \leq x \leq b \\ c^{-1} v_1(x) v_2(\xi) & a \leq x \leq \xi \leq b, \end{cases} \quad (39.2)$$

که

$$c = p(x)[v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)] = p(x)W(v_1, v_2)(x) \quad (40.2)$$

ثابت غیرصفر است. این از این حقیقت نتیجه می‌شود که نه  $p$  و نه  $W$  روی  $[a, b]$  صفر نمی‌شوند و اتحاد لاگرانژ (تمرین ۱۶.۲ را ببینید) روی  $[a, b]$  به صورت زیر است:

$$[p(v_1 v_2' - v_1' v_2)]' = v_1 L v_2 - v_2 L v_1 = 0.$$

اکنون این یک مسئله ساده است که نشان دهیم که همه ویژگی‌های  $G(\xi, x)$  که در بالا آمده است، برقرار هستند. در اینجا معادله (۳۷.۲) را بررسی می‌کنیم. با دیفرانسیل‌گیری از (۳۹.۲) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(x + \delta) - \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, x - \delta) = \frac{1}{c} [v_1(x) v_2'(x, x + \delta) - v_1'(x - \delta) v_2(x)],$$

که  $\delta > 0$  است. با توجه به معادله (۴۰.۲) و پیوستگی  $v_1'$  و  $v_2'$ ، این عبارت وقتی  $\delta \rightarrow 0$  است، به  $\frac{1}{p(x)}$  میل می‌کند.

اکنون عملگر  $T$  را روی  $C([a, b])$  با کمک

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (41.2)$$

تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که  $Tf$  از کلاس  $C^1([a, b])$  است و معادله دیفرانسیل  $Lu = 0$  را حل می‌کنیم. با بازنویسی معادله (۴۱.۲) و دیفرانسیل‌گیری، داریم:

$$(Tf)(x) = \int_a^x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$(Tf)'(x) = \int_a^x G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$



$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + G_x(x, x^-) f(x^-) \\ + \int_x^b G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + G_x(x, x^+) f(x^+),$$

که ما از پیوستگی  $G$  و  $f$  در  $x = \xi$  برای به دست آوردن  $(Tf)'(x)$  استفاده کرده ایم. از آنجا که

$$G_x(x, x^-) - G_x(x, x^+) = \frac{1}{c} [v_1(x^-) v_2'(x) - v_1'(x) v_2(x^+)] = \frac{1}{p(x)},$$

با استفاده از پیوستگی  $v_1$  و  $v_2$  داریم:

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{f(x)}{p(x)}.$$

نتیجه می شود که  $Tf$  در  $C^1([a, b])$  قرار دارد و با توجه به این حقیقت که به ازای هر

$$\text{در } L_x G(x, \xi) = 0, \xi \neq x$$

$$L(Tf)(x) = p(x)(Tf)''(x) + p'(x)(Tf)'(x) + r(x)(Tf)(x) \\ = \int_a^x L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^b L_x G(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x) \\ = f(x),$$

صدق می کند.

از ویژگی (۱) از تعریف تابع  $G$  واضح است که  $Tf$  در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲)

صدق می کند. از طرف دیگر، اگر  $u \in C^1([a, b])$  در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲)

صدق کند، آنگاه با انتگرال گیری جزء به جزء و با استفاده از پیوستگی  $p$ ،  $u$  و  $u'$  و ویژگی های

$G$  به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} T(Lu)(x) &= \int_a^x G(x, \xi) Lu(\xi) d\xi + \int_x^b G(x, \xi) Lu(\xi) d\xi \\ &= p(\xi)[u'(\xi)G(x, \xi) - u(\xi)G_\xi(x, \xi)]\Big|_a^x + \int_a^x u(\xi)L_\xi G(x, \xi) d\xi \\ &\quad + p(\xi)[u'(\xi)G(x, \xi) - u(\xi)G_\xi(x, \xi)]\Big|_x^b + \int_x^b u(\xi)L_\xi G(x, \xi) d\xi \\ &= p(\xi)u(\xi)G_\xi(x, \xi)\Big|_a^x + p(\xi)[u'(\xi)G(x, \xi) - u(\xi)G_\xi(x, \xi)]\Big|_a^b \\ &= u(x), \end{aligned}$$

که از معادله (۳۷.۲) و این حقیقت که  $u$  و  $G$  در شرایط مرزی مجزا صدق می‌کنند، استفاده کرده‌ایم. بنابراین، عملگر  $T$  به‌عنوان نوعی معکوس برای عملگر  $L$  عمل می‌کند و دستگاه معادلات اشتروم-لیوویل

$$Lu + \lambda u = 0,$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,$$

معادل با معادله مقدار ویژه

$$Tu = \mu u,$$

با  $\mu = -\frac{1}{\lambda}$  است. به بیان دیگر،  $u$  تابع ویژه مسئله اشتروم-لیوویل متناظر با مقدار ویژه  $\lambda$  است، اگر و تنها اگر آن یک تابع ویژه از  $T$  متناظر با مقدار ویژه  $-\frac{1}{\lambda}$  باشد. ما باید ویژگی طیفی مسئله اشتروم-لیوویل منظم را از عملگر انتگرال  $T$  استنتاج کنیم.

مثال زیر، روشی را که ما برای ساختن تابع گرین توضیح داده‌ایم، در حالت خاص که عملگر  $L$  در فاصله  $[0, 1]$  برابر  $\frac{d^2}{dx^2}$  است، شرح می‌دهد.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید،

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

ما پیش از این در مثال ۳.۳.۲ دیده‌ایم که این دستگاه معادلات تنها مقادیر ویژه مثبت دارد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$v(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

با توجه به اینکه  $\alpha_1 = \beta_1 = 1$  و  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ، ما جواب  $v_1$  را که در شرایط اولیه زیر در  $x = 0$  صدق می‌کند، جست‌وجو می‌کنیم:

$$v_1(0) = \alpha_2 = 0, \quad v_1'(0) = -\alpha_1 = -1.$$

این شرایط ایجاب می‌کند:

$$c_1 = 0, \quad \sqrt{\lambda}c_2 = -1.$$

از این رو،

$$v_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x.$$

به طور مشابه، جواب  $v_2$  که در شرایط

$$v_2(1) = \beta_2 = 0, \quad v_2'(0) = -\beta_2 = 1,$$

صدق می‌کند، به صورت زیر است:

$$v_2(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x.$$

اکنون تابع گرین را با توجه به معادله (۳۹.۲) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c^{-1} v_1(\xi) v_2(x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ c^{-1} v_1(x) v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases},$$

ثابت  $c$  را می‌توان با استفاده از معادله (۳۹.۲) محاسبه کرد و توسط  $\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$  معین می‌شود.

بنابراین،

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} (\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} (\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \xi - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} G_\xi(x, x^+) - G_\xi(x, x^-) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sin \sqrt{\lambda}} (\cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x^+ + \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x^+) \\ &\quad - \frac{\cos \sqrt{\lambda} x^-}{\sin \sqrt{\lambda}} (\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

سایر ویژگی‌های  $G$  به راحتی قابل بررسی است.

مجموعه نامتناهی  $F$  از توابع تعریف شده و پیوسته روی  $[a, b]$  هم پیوسته روی  $[a, b]$

گفته می‌شود، اگر به‌ازای هر  $\epsilon > 0$  داده شده، یک  $\delta > 0$  طوری موجود باشد که تنها به  $\epsilon$  وابسته است، به‌طوری‌که به‌ازای هر  $f \in F$  و  $x, \xi \in [a, b]$  با شرط  $|x - \xi| < \delta$  نامساوی زیر برقرار است:

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

این شرایط به وضوح نشان می‌دهد که هر عضو یک مجموعه از توابع هم‌پیوسته، یک تابع به‌طور یکنواخت پیوسته روی  $[a, b]$  است. ولی بیشتر از آن، همان  $\delta$  برای همه توابع در  $F$  کار می‌کند. مجموعه  $F$  به‌طور یکنواخت کران‌دار است، هرگاه عددی مثبت مانند  $M$  موجود باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر  $f \in F$

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in [a, b],$$

طبق قضیه آرزلا-آسکولی [۱۴]، هرگاه  $F$  نامتناهی، به‌طور یکنواخت کران‌دار و مجموعه‌ای از توابع هم‌پیوسته روی فاصله کران‌دار  $[a, b]$  باشد، آن‌گاه  $F$  دارای دنباله  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  است که روی  $[a, b]$  به‌طور یکنواخت همگراست. حد  $f_n$ ، با توجه به قضیه ۵.۴.۱ لزوماً یک تابع پیوسته روی  $[a, b]$  است.

لم ۳.۴.۲. فرض کنید  $T$  یک عملگر انتگرال تعریف‌شده توسط معادله (۴۱.۲) باشد. مجموعه توابع  $Tu$ ، که  $u \in C([a, b])$  و  $\|u\| \leq 1$ ، به‌طور یکنواخت کران‌دار و هم‌پیوسته است.

برهان. تابع گرین  $G$  روی میدان بسته  $[a, b] \times [a, b]$  پیوسته است، بنابراین،  $|G(x, \xi)|$  به‌طور یکنواخت پیوسته و با ثابت مثبت  $M$  کران‌دار شده است. از معادله (۴۱.۲) و

نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$|Tu(x)| = |\langle G(x, \xi), u(\xi) \rangle| \leq M\sqrt{b-a}\|u\|.$$

از این رو، مجموعه  $\{Tu : \|u\| \leq 1\}$  با  $M\sqrt{b-a}$  از بالا کران دار است. چون  $G$  روی میدان  $[a, b] \times [a, b]$  به طور یکنواخت پیوسته است، به ازای هر  $\epsilon > 0$  مفروض،  $\delta > 0$  وجود دارد، به طوری که به ازای هر  $\xi \in [a, b]$

$$x_1, x_2 \in [a, b], \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |G(x_2, \xi) - G(x_1, \xi)| < \epsilon.$$

اگر  $u$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد، آنگاه

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |Tu(x_2) - Tu(x_1)| \leq \epsilon\sqrt{b-a}\|u\|.$$

بنابراین، توابع  $\{Tu : u \in C[a, b], \|u\| < 1\}$  هم پیوسته هستند.  $\square$

نرم عملگر  $T$ ، مشخص شده توسط  $\|T\|$ ، به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|T\| = \sup\{\|Tu\| : u \in C([a, b]), \|u\| = 1\}. \quad (42.2)$$

از این مسئله نتیجه می شود که، اگر  $u \neq 0$  باشد، آنگاه

$$\|Tu\| = \|T(u/\|u\|)\|\|u\| \leq \|T\|\|u\|.$$

ولی چون این نامساوی در حالت  $u = 0$  نیز برقرار است، به ازای هر  $u \in C([a, b])$  برقرار

است. این نیز یک تمرین ساده (تمرین ۳۳.۲ را ببینید) است که نشان می دهد

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, u \rangle|. \quad (43.2)$$

اکنون می‌توانیم نخستین قضیه وجودی را برای مسئله مقدار ویژه تحت بررسی بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۴.۲. هر یک از  $\|T\|$  یا  $-\|T\|$  مقدار ویژه  $T$  است.

برهان.  $\|T\| = \sup\{|\langle Tu, u \rangle| : u \in C([a, b]), \|u\| = 1\}$  و  $\langle Tu, u \rangle$  یک عدد حقیقی است. از این رو،  $\|T\| = \sup\langle Tu, u \rangle$  یا  $\|T\| = -\inf\langle Tu, u \rangle$ ،  $\|u\| = 1$ . فرض کنید  $\|T\| = \sup\langle Tu, u \rangle$  است. آن‌گاه دنباله توابع  $u_k \in C([a, b])$ ، با شرط  $\|u_k\| = 1$  وجود دارد، به طوری که وقتی  $k \rightarrow \infty$  است،

$$\langle Tu_k, u_k \rangle \rightarrow \|T\|.$$

چون  $\{Tu_k\}$  به طور یکنواخت کران‌دار و هم‌پیوسته است، از قضیه آرزلا-آسکولی نتیجه می‌شود که یک زیردنباله  $\{Tu_{k_j}\}$  دارد که روی  $[a, b]$  به طور یکنواخت به یک تابع پیوسته  $\phi$  همگراست. اکنون، ثابت می‌کنیم که  $\phi$  یک تابع ویژه  $T$ ، متناظر با مقدار ویژه  $\mu = \|T\|$  است.

وقتی  $j \rightarrow \infty$  است، داریم:

$$\sup_{x \in [a, b]} |Tu_{k_j}(x) - \phi(x)| \rightarrow 0,$$

که نشان می‌دهد

$$\|Tu_{k_j} - \phi\| \rightarrow 0 \quad (44.2)$$

و بنابراین،  $\|Tu_{k_j}\| \rightarrow \|\phi.\|$  افزون بر این، چون  $\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \mu.$

$$\|Tu_{k_j} - \mu.u_{k_j}\|^2 = \|Tu_{k_j}\|^2 + \mu.^2 - 2\mu.\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \|\phi.\|^2 - \mu.^2. \quad (۴۵.۲)$$

از این رو،  $\|\phi.\|^2 \geq \mu.^2 > 0$  و تابع  $\phi.$  نمی‌تواند روی  $[a, b]$  صفر شود. چون

$$\|Tu_{k_j}\|^2 \leq \|T\|^2 \|u_{k_j}\|^2 = \mu.^2.$$

همچنین از معادله (۴۵.۲) نتیجه می‌شود که

$$0 \leq \|Tu_{k_j} - \mu.u_{k_j}\|^2 \leq 2\mu.^2 - 2\mu.\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle.$$

ولی  $\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \mu.$  از این رو،

$$\|Tu_{k_j} - \mu.u_{k_j}\| \rightarrow 0. \quad (۴۶.۲)$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم:

$$0 \leq \|T\phi. - \mu.\phi.\|$$

$$\leq \|T\phi. - T(Tu_{k_j})\| + \|T(Tu_{k_j}) - \mu.Tu_{k_j}\| + \|\mu.Tu_{k_j} - \mu.\phi.\|.$$

وقتی  $j \rightarrow \infty$  است، با استفاده از نابرابری  $\|Tu\| \leq \|T\|\|u\|$  همراه با معادله‌های

$$(۴۴.۲) \text{ و } (۴۶.۲)، \text{ نتیجه می‌گیریم که } \|T\phi. - \mu.\phi.\| = 0 \text{ است. پیوسته بودن } T\phi. -$$

$$\mu.\phi. \text{ اشاره دارد که به ازای هر } x \in [a, b] \text{، } T\phi.(x) = \mu.\phi.(x).$$

اگر  $\|T\| = -\inf \langle Tu, u \rangle$  باشد، با یک استدلال مشابه به نتیجه یکسان منجر می‌شود.

□

فرض کنید به ازای هر  $u \in C([a, b])$

$$\phi. = \frac{\phi.}{\|\phi.\|},$$



$$\begin{aligned}
 G(x, \xi) &= G(x, \xi) - \mu \cdot \psi \cdot (x) \overline{\psi} \cdot (x), \\
 (T_1 u)(x) &= \int_a^b G_1(x, \xi) u(\xi) d\xi \\
 &= Tu(x) + \mu \cdot \langle u, \psi \cdot \rangle \psi \cdot (x). \quad (47.2)
 \end{aligned}$$

تابع  $G_1$  دارای همان ویژگی‌های منظم و متقارن است که  $G$  دارد، از این رو، لم ۳.۴.۲ و قضیه ۴.۴.۲ به وضوح برای عملگر خودالحاق  $T_1$  به کار می‌رود. اگر  $\|T_1\| \neq 0$  باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\sup\{|\langle T_1 u, u \rangle| : u \in C([a, b]), \|u\| = 1\} = |\mu_1|,$$

که  $\mu_1$  یک عدد حقیقی (غیرصفر) است که، توسط قضیه ۴.۴.۲ یک مقدار ویژه  $T_1$  متناظر با تابع ویژه (غیرصفر)  $\phi_1 \in C([a, b])$  است، یعنی

$$T_1 \phi_1 = \mu_1 \phi_1.$$

فرض کنید  $\psi_1 = \phi_1 / \|\phi_1\|$ . آنگاه، به ازای هر  $u \in C([a, b])$

$$\begin{aligned}
 \langle T_1 u, \psi \cdot \rangle &= \langle Tu, \phi \cdot \rangle - \mu \cdot \langle \langle u, \psi \cdot \rangle \psi \cdot, \psi \cdot \rangle \\
 &= \langle u, T\psi \cdot \rangle - \mu \cdot \langle u, \psi \cdot \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

چون  $T\psi \cdot = \mu \cdot \psi \cdot$  است. به ویژه،  $\langle T_1 \psi_1, \psi \cdot \rangle = \langle \mu_1 \psi_1, \psi \cdot \rangle = 0$  و بنابراین، با  $\psi_1$  متعامدند. اکنون معادله (۴۷.۲) نتیجه می‌دهد:

$$T\psi_1 = T_1 \psi_1 = \mu_1 \psi_1.$$

بنابراین،  $\psi_1$  نیز یک تابع ویژه  $T$  است و مقدار ویژه مربوطه در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|\mu_1| = \|T\psi_1\| \leq \|T\| = |\mu_0|.$$

جای‌گذاری

$$G_2(x, \xi) = G_1(x, \xi) - \mu_1 \psi_1(x) \overline{\psi_1}(\xi) = G(x, \xi) - \sum_{k=0}^1 \mu_k \psi_k(x) \overline{\psi_k}(\xi)$$

$$T_2 u = T_1 u - \mu_1 \langle u, \psi_1 \rangle \psi_1 = Tu - \sum_{k=0}^1 \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k,$$

با ادامه روند بالا، وجود یک تابع ویژه نرمال  $\psi_2$  از  $T$  متناظر با مقدار ویژه حقیقی  $\mu_2$ ، به طوری که  $\psi_2$  با هر دوی  $\psi_1$  و  $\psi_0$  متعامد است و  $|\mu_2| \leq |\mu_1|$  استنتاج می‌کنیم. بنابراین، دنباله متعامد یکه از توابع ویژه  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  را از  $T$  متناظر با دنباله مقادیر ویژه  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$  به دست می‌آوریم. دنباله توابع ویژه تنها اگر برای  $n$  ای،

$$\|T_n\| = 0, \text{ متوقف می‌شود. در این حالت، به ازای هر } u \in C([a, b])$$

$$0 = LT_n u = LTu - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle L\psi_k = u - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle L\psi_k.$$

که نتیجه می‌دهد:

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle L\psi_k b = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \psi_k \rangle LT\psi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \psi_k \rangle \psi_k.$$

ولی چون هیچ مجموعه متناهی از توابع ویژه نمی‌تواند  $C([a, b])$  را تولید کند، این برابری

آخر نمی‌تواند به ازای هر  $u \in C([a, b])$  برقرار باشد. در نتیجه، به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n\| > 0 \text{ و قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.}$$

قضیه ۵.۴.۲ (قضیه وجودی). عملگر انتگرال  $T$  تعریف شده به کمک معادله (۴۱.۲) یک دنباله نامتناهی از توابع ویژه  $(\psi_n)$  دارد که در  $L^2(a, b)$  متعامد یکه هستند.

## ۲.۴.۲ تمامیت توابع ویژه

اگر  $f$  تابعی در  $L^2(a, b)$  باشد، آنگاه از نامساوی بسل (۲۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

برای اثبات تمامیت توابع ویژه  $(\psi_n)$  در  $L^2(a, b)$  باید نشان دهیم که این نابرابری درحقیقت یک برابری است. نخست ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر  $f \in C^2([a, b])$ ,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

که در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق می‌کند، و سپس با استفاده از چگال بودن  $C^2(a, b)$  در  $L^2(a, b)$ ، این برابری را به  $L^2(a, b)$  گسترش می‌دهیم.

قضیه ۶.۴.۲. هر تابع مفروض  $f \in C^2([a, b])$  که در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق کند، سری نامتناهی  $\sum \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$  به‌طور یکنواخت به  $f$  روی  $[a, b]$  همگرا می‌شود.

برهان. به‌ازای هر  $x \in [a, b]$  و به‌ازای هر  $k \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\langle G(x, \cdot), \psi_k \rangle = T\overline{\psi_k}(x) = \mu_k \overline{\psi_k}(x).$$

با به‌کارگیری نابرابری بسل برای  $G$  به‌عنوان تابعی از  $\xi$ ، به‌ازای هر  $x \in [a, b]$  داریم:

$$\sum_{k=0}^n \mu_k |\psi_k|^2 \leq \int_a^b |G(x, \xi)|^2 d\xi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به  $x$  با فرض  $n \rightarrow \infty$ ، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \leq M^2 (b-a)^2, \quad (48.2)$$

که  $M$  بیشترین مقدار  $|G(x, \xi)|$  روی میدان  $[a, b] \times [a, b]$  است. از نابرابری (۴۸.۲) فوری نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = 0. \quad (49.2)$$

با

$$G_n(x, \xi) = G(x, \xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \psi_k(x) \overline{\psi_k}(\xi),$$

همان‌طور که پیش از این دیده‌ایم، عملگر انتگرال

$$T_n : u(x) \rightarrow \int_a^b G_n(x, \xi) \cap u(\xi) d\xi, \quad u \in C([a, b]),$$

مقدار ویژه  $\mu_n$  و نرم زیر را دارد:

$$\|T_n\| = |\mu_n|.$$

بنابراین، به‌ازای هر  $u \in C([a, b])$ ، وقتی  $n \rightarrow \infty$  است، با توجه به (۴۹.۲) داریم:

$$\|T_n u\| = \left\| T_u - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \leq |\mu_n| \|u\| \rightarrow 0. \quad (50.2)$$

اگر  $n > m$  باشد، آن‌گاه

$$\sum_{k=m}^n \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k = T \left( \sum_{k=m}^n \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right);$$

ولی چون به ازای هر  $u \in C([a, b])$ ،  $\|Tu\| \leq M\sqrt{b-a}\|u\|$  است، نتیجه می‌گیریم که

$$\left| \sum_{k=m}^n \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right| \leq \|T\| \left\| \sum_{k=m}^n \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \\ \leq M\sqrt{b-a} \left( \sum_{k=m}^n |\langle u, \psi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

با کمک نابرابری بسل، سمت راست این نابرابری وقتی  $n, m \rightarrow \infty$  است، به صفر میل می‌کند، از این رو، سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k$$

روی  $[a, b]$  به طور یکنواخت به یک تابع پیوسته همگرا می‌شود. پیوستگی  $Tu$  و (۵۰.۲) اشاره دارد که به ازای هر  $x \in [a, b]$

$$Tu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k(x). \quad (51.2)$$

اگر  $f \in C^2([a, b])$  در شرایط مرزی (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق کند، آنگاه  $u = Lf$

روی  $[a, b]$  تابعی پیوسته و  $f = Tu$  است. چون

$$\mu_k \langle u, \psi_k \rangle = \langle u, \mu_k \psi_k \rangle = \langle u, T\psi_k \rangle = \langle Tu, \psi_k \rangle = \langle f, \psi_k \rangle,$$

معادله (۵۱.۲) به ازای هر  $x \in [a, b]$  نتیجه می‌دهد:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x).$$

□

اکنون باید ثابت کنیم که هر تابع  $f$  در  $L^\infty(a, b)$  با یک تابع  $C^\infty$  روی  $[a, b]$  که در شرایط مرزی جداشده (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق می‌کند (در نرم  $L^\infty$ )، قابل تقریب است. درحقیقت، کافی است ثابت کنیم که  $C^\infty([a, b])$  در  $L^\infty([a, b])$  بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی چگال است؛ زیرا اگر  $g \in C^\infty([a, b])$  باشد، آنگاه می‌توانیم یک دنباله به‌طور یکنواخت کران‌دار از توابع  $g_n \in C^\infty([a, b])$  تشکیل دهیم؛ به‌طوری‌که روی  $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$   $g_n(x) = g(x)$  و  $g_n(a) = g'_n(a) = g_n(x) = g'_n(x) = 0$  باشد. به وضوح چنین دنباله‌ای در شرایط مرزی صدق می‌کند و نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\| = 0.$$

اگر  $f \in L^\infty(a, b)$  باشد، از قضیه (۶.۵.۱) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر  $\epsilon > 0$

مفروض، تابع پیوسته  $h$  روی  $[a, b]$  وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\|f - h\| < \epsilon. \quad (52.2)$$

ازاین‌رو، باید ثابت کنیم که به‌ازای هر  $h \in C([a, b])$ ، تابع  $g \in C^\infty([a, b])$  وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\|h - g\| < \epsilon. \quad (53.2)$$

این را می‌توان از قضیه تقریب ویراشتراس استنتاج کرد ([۱] یا [۱۴] را ببینید)، ولی در اینجا یک اثبات مستقیم از این نتیجه وجود دارد.

تابع  $C^\infty$  مثبت

$$\alpha(x) = \begin{cases} c \exp(\frac{1}{x^2-1}), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

را که

$$c = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) dx \right]^{-1},$$

به طوری که  $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1$  تعریف می‌کنیم. سپس دنباله توابع

$$\alpha_n(x) = n\alpha(nx), \quad n \in \mathbb{N},$$

را که در  $C^\infty(\mathbb{R})$  قرار دارد، تعریف می‌کنیم. از آنجا که  $\alpha$  روی  $|x| \geq 1$  صفر می‌شود، هر

تابع  $\alpha_n$  روی  $|x| > \frac{1}{n}$  برابر صفر است و به ازای هر  $n$ ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1.$$

سرانجام،  $h$  را به صورت تابعی پیوسته از  $[a, b]$  به  $\mathbb{R}$  با جای‌گذاری

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < a - 1, x > b + 1 \\ h(a)(x - a + 1), & a - 1 \leq x < a \\ h(b)(-x + b + 1), & b \leq x < b + 1, \end{cases}$$

گسترش می‌دهیم و تلفیق  $h$  و  $\alpha_n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (h * \alpha_n)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\alpha_n(x - y) dy \\ &= \int_{x - (\frac{1}{n})}^{x + (\frac{1}{n})} h(y)\alpha_n(x - y) dy \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(x - y)\alpha_n(y) dy. \end{aligned}$$

با  $\alpha_n \in C^\infty$  تابع  $h * \alpha_n$  نیز یک تابع  $C^\infty$  روی  $\mathbb{R}$  است. افزون بر این،

$$|h(x) - (h * \alpha_n)(x)| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} [h(x - y)\alpha_n(y) dy - h(x)\alpha_n(y) dy] \right|$$

$$\leq \sup\{|h(x-y) - h(x)| : x \in [a, b], |y| \leq \frac{1}{n}\}.$$

چون  $h$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است، روی هر فاصله حقیقی متناهی به طور یکنواخت پیوسته است. از این رو، وقتی  $n \rightarrow \infty$  است،

$$|h(x) - (h * \alpha_n)(x)| \leq \sup\{|h(x-y) - h(x)| : x \in [a, b], |y| \leq \frac{1}{n}\} \rightarrow 0.$$

در واقع، در اینجا نشان داده ایم که  $C^\infty$ ، که زیرمجموعه ای از  $C^1$  است، در نرم سوپریمم در  $C([a, b])$  چگال است، که چیزی بیشتر از آن است که ما انجام داده ایم. در نتیجه، عدد صحیح  $N$  وجود دارد، به طوری که به ازای هر  $n \geq N$

$$\|h - h * \alpha_n\| \leq \epsilon.$$

با قراردادن  $h * \alpha_n$  به جای  $g$  در معادله (۵۳.۲)، به ازای هر  $f \in L^1(a, b)$ ، به دست

می آوریم:

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| + \|h - g\| < 2\epsilon. \quad (54.2)$$

همچنین، با استفاده از نابرابری های بسل و مثلثی، داریم:

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k\| &\leq \|f - g\| + \|g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k\| \\ &\quad + \|\sum_{k=0}^n \langle g - f, \psi_k \rangle \psi_k\| \\ &\leq 2\|f - g\| + \|g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k\|. \end{aligned} \quad (55.2)$$



با توجه به قضیه ۶.۴.۲، می‌توانیم با انتخاب  $n$  به اندازه کافی بزرگ، مثلاً  $n \geq M$  داشته باشیم  $\epsilon > \epsilon$   $\| \| g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k \| \| < \epsilon$ . این همراه با معادله‌های (۵۴.۲) و (۵۵.۲) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر  $n \geq \max\{N, M\}$

$$\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \| < 5\epsilon.$$

بنابراین، قضیه (۷.۴.۲) را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۷.۴.۲ (قضیهٔ تمامیت). اگر  $f \in L^2(a, b)$  باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \| = 0. \quad (56.2)$$

معادله (۵۶.۲)، معادل با اتحاد

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k,$$

است که این برابری در  $L^2(a, b)$  است. همچنین، معادل با رابطهٔ پارسوال

$$\| f \|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2,$$

است. هریک از این معادله‌ها، این حقیقت را بیان می‌کند که دنبالهٔ  $(\psi_k)$  از توابع مشخصهٔ متعامد  $T$ ، یک مجموعهٔ کامل در  $L^2(a, b)$  تشکیل می‌دهد.

به معادلهٔ اشتروم-لیوویل

$$Lu + \lambda u = 0,$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0,$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,$$

برمی‌گردیم که  $u \in C^2([a, b])$ . نشان داده‌ایم که این دستگاه معادلات، معادل معادله انتگرال منفرد

$$Tu = \mu u = -\frac{u}{\lambda}$$

است. شرایط مرزی یک جواب منحصر به فرد برای معادله دیفرانسیل  $Lu + \lambda u = 0$  تعیین می‌کند. از این رو، هر مقدار ویژه  $\lambda$  از  $-L$  متناظر به یک تابع ویژه منحصر به فرد  $u$  است. این معادل این گفته است که هر مقدار ویژه  $\mu$  از  $T$  متناظر به یک تابع ویژه منحصر به فرد  $u$  است.

از معادله (۴۹.۲)،  $|\mu_n| = \frac{1}{|\lambda_n|} \rightarrow 0$ ، و لم ۱.۴.۲ نتیجه می‌شود وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $\lambda_n \rightarrow \infty$  است. به این ترتیب، با وارد کردن تابع وزن  $\rho$ ، به قضیه اساسی زیر می‌رسیم.

**قضیه ۸.۴.۲.** با فرض  $p', r, \rho \in C([a, b])$ ،  $p, \rho > 0$ ، مسئله مقدار ویژه اشتروم-لیوویل تعریف شده

توسط معادله‌های (۳۴.۲) تا (۳۶.۲)، یک دنباله نامتناهی از مقادیر ویژه حقیقی

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

دارد، به طوری که  $\lambda_n \rightarrow \infty$ . به هر مقدار ویژه  $\lambda_n$ ، یک تابع ویژه منفرد  $\phi_n$  متناظر می‌شود و دنباله توابع ویژه  $(\phi_n : n \in \mathbb{N})$  یک پایه متعامد برای  $L_\rho^2(a, b)$  تشکیل می‌دهد.

تبصره ۹.۴.۲. ۱. اگر شرایط مرزی جدا از هم معادله‌های (۳۵.۲) و (۳۶.۲) با شرایط متناوب

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

جایگزین شوند، این مسئله، ساده است که بررسی کنیم معادله (۲۶.۲) در شرط  $p(a) = p(b)$  صدق می‌کند (تمرین ۲۶.۲). عملگر تعریف شده توسط (۲۳.۲) خودالحاق است و مقادیر ویژه آن توسط  $\max\{|r(x)| : a < x < b\} -$  از پایین کران‌دار است (به معادله (۳۸.۲) رجوع کنید). نتایج به دست آمده در بالا معتبر است، به جز مواردی که منحصر به فردی توابع ویژه برای هر مقدار ویژه تضمین نشود. این مسئله توسط مثال ۱.۱.۳ در فصل بعدی نشان داده شده است. برای آگاهی بیشتر در مورد مسئله اشتروم-لیوویل تحت شرایط مرزی متناوب به [۷] مراجعه کنید.

۲. همچنین، می‌توان نشان داد که هر تابع ویژه  $\phi_n$  در فاصله  $(a, b)$  دقیقاً دارای  $n$  صفر است و ارزش دارد که این ادعا در برابر مثال‌هایی که از این پس مورد بحث قرار می‌گیرد، بررسی شود. اثبات این نتیجه را می‌توان در [۶] یافت.

۳. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای دسترسی به مرجع جامع و به روز در مورد مسئله اشتروم-لیوویل و تاریخچه آن از اوایل قرن نوزدهم به [۱۸] رجوع کند.

مثال ۱۰.۴.۲. مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

را با یکی از شرایط مرزی جدا از هم

$$(۱) \quad u(۰) = u(l) = ۰,$$

$$(۲) \quad u'(۰) = u'(l) = ۰,$$

بیابید.

حل: عملگر دیفرانسیل، خودالحاق است و شرایط مرزی (۱) و (۲) همگن و جدا از هم هستند، بنابراین، هر دو قضیه (۱.۳.۲) و (۸.۴.۲) مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که پیش از این در مثال (۳.۳.۲) مشاهده کرده‌ایم، معادله با شرایط مرزی (۱)، تنها مقادیر ویژه مثبت دارد. با شرایط مرزی (۲)  $u'' + \lambda u = ۰$  به آسانی می‌توان نشان داد که آن بدون مقادیر ویژه نامنفی است. این با تبصره (۹.۴.۲) چون  $r(x) \equiv ۰$  سازگار است. اگر  $\lambda > ۰$  باشد، جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (۵۷.۲)$$

با به‌کار بردن شرایط (۱)، به‌دست می‌آوریم:

$$u(۰) = c_1 = ۰,$$

$$u(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = ۰ \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

طبق قضیه ۸.۴.۲ مقادیر ویژه  $\lambda_n$  به  $\infty$  میل می‌کنند و توابع ویژه متناظر

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x$$

در  $L^2(0, l)$  متعامدند، زیرا به ازای هر  $m \neq n$

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l [\cos(m-n)\frac{\pi}{l}x - \cos(m+n)\frac{\pi}{l}x] dx = 0.$$

همچنین، از قضیه ۸.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که دنباله توابع

$$\sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

در  $L^2(0, l)$  کامل است.

اکنون به شرایط مرزی (۲) برمی‌گردیم. اگر  $\lambda = 0$  باشد، جواب عمومی معادله

$$u'' = 0$$

$$u(x) = c_1 x + c_2,$$

است و شرایط (۲) ایجاب می‌کند  $c_1 = 0$  است. بنابراین،  $u$  ثابت است، آن را یک در نظر

می‌گیریم. بنابراین،

$$\lambda = 0, \quad u(x) = 1$$

اولین زوج مقدار ویژه - تابع ویژه است. ولی اگر  $\lambda > 0$  باشد، نخستین شرط (۲) برای

(۵۷.۲) داریم:

$$u'(0) = \sqrt{\lambda} c_1 = 0,$$

از این رو،  $c_1 = 0$  است. شرط در  $x = l$  نتیجه می‌دهد:

$$u'(l) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$u_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین، مقادیر ویژه و توابع ویژه تحت شرایط (۲) به صورت زیر هستند:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad u_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N}..$$

دوباره می‌توانیم بررسی کنیم که دنباله  $(\cos(n\pi/lx) : n \in \mathbb{N})$  در  $L^2(0, l)$  متعامد

است و همچنین از قضیه ۸.۴.۲ نتیجه می‌گیریم که این فضا را تولید می‌کند.

بر طبق مثال ۱۰.۴.۲، هر تابع  $f \in L^2(0, l)$  را می‌توان با یک سری نامتناهی به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x, \quad (58.2)$$

یا به صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad (59.2)$$

مشخص کرد. برابری در هر کدام از حالت‌ها در  $L^2(0, l)$  برقرار است. توجه داشته باشید

که این دو نمایش از  $f(x)$  لزوماً مقدار یکسان در هر نقطه در  $[0, l]$  نمی‌دهد. برای مثال،

در  $x = 0$ ، در نخستین نمایش  $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  و در دومی  $f(0) = 0$  را به دست

می‌آوریم. این به این دلیل است که تساوی‌ها در معادله‌های (۵۸.۲) و (۵۹.۲) نقطه‌ای

نیستند و تساوی‌ها در  $L^2(0, l)$  برقرار است و بنابراین، باید به صورت زیر تفسیر شوند:

$$\|f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x\| = 0, \quad \|f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x\| = 0.$$

با تعریف ۱.۶.۱، ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  توسط فرمول‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$a_n = \frac{\langle f, \cos(n\pi x/l) \rangle}{\|\cos(n\pi x/l)\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\langle f, \sin(n\pi x/l) \rangle}{\|\sin(n\pi x/l)\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

چون

$$\|\cos(\frac{n\pi}{l}x)\|^2 = \int_0^l \cos^2(\frac{n\pi}{l}x) dx = \begin{cases} l, & n = 0 \\ \frac{l}{2}, & n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

$$\|\sin(\frac{n\pi}{l}x)\|^2 = \int_0^l \sin^2(\frac{n\pi}{l}x) dx = \frac{l}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

بنابراین، ضرایب در بسط‌های (۵۸.۲) و (۵۹.۲) به صورت زیر هستند:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad (۶۰.۲)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (۶۱.۲)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (۶۲.۲)$$

برای مثال، تابع ثابت  $f(x) = 1$  را روی  $[0, 1]$  در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle 1, \sin(n\pi x/l) \rangle = \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{l}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

بنابراین،  $b_n = (\frac{2}{n\pi})(1 - (-1)^n)$  و می‌توانیم بنویسیم:

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

همان‌طور که در بالا اشاره شد، البته این برابری باید به معنای زیر باشد:

$$\left\| 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \right\| = 0.$$

یا وقتی  $n \rightarrow \infty$  است،

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \xrightarrow{L^1} 1.$$

از طرف دیگر، چون

$$\left\langle 1, \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\rangle = \int_0^l \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ l, & n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

$$\|1\|^2 = l,$$

ضرایب  $a_n$  در بسط (۵۸.۲) هم جز مورد اول، که  $a_0 = 1$  است، صفر می‌شود. از این‌رو، سری به یک کاهش می‌یابد. ولی این انتظار می‌رود چون تابع  $f$  منطبق با نخستین عنصر از دنباله زیر است

$$\left( \cos \frac{n\pi}{l} x : n \in \mathbb{N} \right) = \left( 1, \cos \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots \right).$$

به همین دلایل، بر اساس قضیه ۸.۴.۲، دنباله توابع ویژه برای مسئله اشتروم-لیوویل

بحث‌شده در مثال ۷.۳.۲ در  $L^1_\rho(1, b)$  که  $\rho(x) = \frac{1}{x}$  کامل است. از این‌رو، هر تابع  $f \in$

$L^1_\rho(1, b)$  را می‌توان با یک سری از فرم زیر گسترش داد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\log b} \log x\right),$$

که

$$b_n = \frac{\langle f, \sin\left(\frac{n\pi}{\log b} \log x\right) \rangle_\rho}{\left\| \sin\left(\frac{n\pi}{\log b} \log x\right) \right\|_\rho}.$$



## ۳.۴.۲ مسئله اشتروم-لیوویل تکین

ما این بخش را با توضیح مختصر درباره مسئله اشتروم-لیوویل پایان می‌دهیم. در معادله

$$Lu + \lambda \rho u = (pu')' + ru + \lambda \rho u = 0, \quad a < x < b,$$

که  $p$  هموار و مثبت و پیوسته است، تا اینجا فرض کرده بودیم که  $p$  در بازه بسته و کران‌دار  $[a, b]$  صفر نمی‌شود. هر تضعیفی از این شرایط، به یک مسئله تکین منجر می‌شود. در این کتاب، مسئله اشتروم-لیوویل تکین را که از یک یا هر دو وضعیت زیر نتیجه می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.  $p(x)$  در  $x = a$  و یا  $x = b$  صفر است.

۲. فاصله نامتناهی  $(a, b)$  است.

در نمونه نخست عبارت  $\rho p(f'g - fg')$  در نقطه پایانی که  $p = 0$  است، صفر می‌شود، از این رو، هیچ شرط مرزی در نقطه پایانی لازم نیست. به‌ویژه، اگر  $p(a) = p(b) = 0$  و حدهای  $u$  در  $a$  و  $b$  موجود باشد، آنگاه معادله

$$\rho p(f'g - fg')|_a^b = 0 \quad (۴۳.۲)$$

برقرار است و  $L$  خودالحاق است. اگر  $(a, b)$  نامتناهی باشد، آنگاه لازم است وقتی  $|x| \rightarrow \infty$ ، برای  $u$  ای که در  $L^2_\rho$  قرار دارد،  $\sqrt{\rho}u(x)$  به صفر میل کند. نتایج قضیه ۸.۴.۲، با این شرایط معتبر باقی می‌ماند، اگرچه ما این را اثبات نمی‌کنیم. برای تفسیر گسترده‌تر موضوع، خواننده به [۱۵] و [۱۸] مراجعه کند. اخیراً، آنتون زتل<sup>۱</sup>، گزارشی تازه از تاریخچه

<sup>۱</sup>Anton Zettl

و توسعه مسئله تکین و برخی نتایج، با ماهیت کلی‌تر از آنچه در این کتاب بحث کرده‌ایم، ارائه داده است. به‌طور ویژه، با استفاده از روش‌های کلی‌تر از اندازه لبگ و انتگرال‌گیری، شرایط همواری به کاررفته روی ضرایب در معادله اشتروم-لیوویل ممکن است با شرایط انتگرال‌پذیری ضعیف‌تر جایگزین شود.

در فصل‌های زیر، نمونه‌ای از معادله‌های اشتروم-لیوویل تکین را مورد بررسی قرار

می‌دهیم.

۱. معادله لژاندر<sup>۱</sup>

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0, \quad -1 < x < 1,$$

که  $\lambda = n(n+1)$  و تابع  $p(x) = 1-x^2$  در نقاط انتهایی  $x = \pm 1$  صفر می‌شود. بنابراین، تنها وجود حد  $u$  در  $x = \pm 1$  لازم است.

۲. معادله هرमित<sup>۲</sup>

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

با ضرب  $e^{-x^2}$ ، این معادله به فرم خودالحاق استاندارد زیر تبدیل می‌شود:

$$e^{-x^2}u'' - 2xe^{-x^2}u' + 2ne^{-x^2}u = 0,$$

<sup>1</sup>Legendre's Equation

<sup>2</sup>Hermit's Equation

که  $\rho(x) = e^{-x}$  و  $p(x) = e^{-x}$ ،  $\lambda = 2n$

۳. معادله لاگر<sup>۱</sup>

$$xu'' - (1-x)u' + nu = 0, \quad x > 0,$$

که با ضرب  $e^{-x}$ ، به فرم استاندارد

$$xe^{-x}u'' - (1-x)e^{-x}u' + ne^{-x}u = 0,$$

تبدیل می‌شود. اینجا  $p(x) = e^{-x}$  در  $x = 0$ ، صفر می‌شود.

۴. معادله بسل<sup>۲</sup>

$$xu'' - u' - \frac{n^2}{x}u + \lambda xu = 0, \quad x > 0,$$

در اینجا هر دو تابع  $p(x) = x$  و  $\rho(x) = x$  در  $x = 0$ ، صفر می‌شوند.

جواب‌های این معادله‌ها نمونه‌های مهمی را از اصطلاح توابع ویژه فیزیک ریاضی ارائه می‌دهد که ما در فصل‌های چهار و پنج به مطالعه آنها می‌پردازیم. ولی پیش از آن، در فصل سوم، از مسئله اشتروم-لیوویل منظم برای توسعه نظریه  $L^2$  سری فوریه برای توابع مثلثاتی استفاده کردیم. مسئله تکین به ما امکان می‌دهد این نظریه را برای سایر توابع متعامد تعمیم دهیم.

<sup>1</sup>Laguerre's Equation

<sup>2</sup>Bessel's Equation

## تمرین‌ها

۲۳.۲. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله مقدار مرزی زیر را تعیین کنید.

$$u'' + \lambda u = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

$$u(a) = u(b) = 0.$$

۲۴.۲. مقادیر ویژه و توابع ویژه معادله  $x^2 u'' - x u' + \lambda u = 0$  روی  $(1, e)$  تحت شرایط

مرزی  $u(1) = u(e) = 0$  را تعیین کنید. شکل رابطهٔ تعامد بین توابع ویژه را بنویسید.

۲۵.۲. بررسی کنید که  $p(f'\bar{g} - f\bar{g}')|_a^b = 0$  است اگر  $f$  و  $g$  در شرایط مرزی همگن جدا

از هم معادله‌های (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق کنند.

۲۶.۲. بررسی کنید که  $p(f'\bar{g} - f\bar{g}')|_a^b = 0$  است، اگر  $f$  و  $g$  در شرایط متناوب

$u(a) = u(b)$  و  $u'(a) = u'(b)$ ، به شرط  $p(a) = p(b)$  صدق کنند.

۲۷.۲. کدام یک از شرایط مرزی زیر باعث ایجاد  $p(f'\bar{g} - f\bar{g}')|_a^b = 0$  می‌شود؟

الف)  $u'(a) = u'(b)$  و  $u(a) = u(b)$ ،  $a \leq x \leq b$ ،  $p(x) = 1$

ب)  $u(a) = u'(b) = 0$  و  $0 < a \leq x \leq b$ ،  $p(x) = x$

ج)  $u(\pi/2) = 0$  و  $u(0) = 1$ ،  $0 \leq x \leq \pi/2$ ،  $p(x) = \sin x$

د)  $u'(0) = u'(1)$  و  $u(0) = u(1)$ ،  $0 < x < 1$ ،  $p(x) = e^{-x}$

ه)  $u(b) = u'(0)$  و  $u(0) = u'(b)$ ،  $0 < x < b$ ،  $p(x) = x^2$

ی)  $u'(-1) = u'(1)$  و  $u(-1) = u(1)$ ،  $-1 < x < 1$ ،  $p(x) = x^2$

۲۸.۲. کدام یک از شرایط مرزی در تمرین ۲۷.۲، یک مسئله اشتروم-لیوویل تکین را معرفی

می‌کند؟

۲۹.۲. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله زیر را تعیین کنید.

$$[(x+3)^2 y']' + \lambda y = 0, \quad -2 \leq x \leq 1,$$

$$y(-2) = y(1) = 0.$$

۳۰.۲. فرض کنید:

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0) = 0, \quad 2u(\pi) - u'(\pi) = 0.$$

الف) نشان دهید چگونه مقادیر ویژه مثبت  $\lambda$  می‌توانند تعیین شوند. آیا مقادیر ویژه‌ای

در  $[-\infty, 0]$  وجود دارد؟

ب) توابع ویژه مربوطه چیست؟

۳۱.۲. دنباله مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله زیر را مورد بررسی قرار دهید.

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u'(0) = u(0), \quad u'(l) = 0.$$

۳۲.۲. فرض کنید:

$$(pu')' + ru + \lambda u = 0, \quad a < x < l,$$

$$u(a) = u(b) = 0.$$

اگر  $p(x) \geq 0$  و  $r(x) \leq c$  باشد، ثابت کنید که  $\lambda \geq -c$  است.

۳۳.۲. با استفاده از معادله (۴۲.۲)، نشان دهید که نرم عملگر  $T$  به صورت زیر است:

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, u \rangle|,$$

که  $u \in C([a, b])$ . راهنمایی: توسط نابرابری کوشی-شوارتز و معادله (۴۲.۲)  $|\langle Tu, u \rangle| \leq$

$\|T\|$  است. برای اثبات عکس نابرابری، ابتدا نشان دهید که  $|\operatorname{Re} \langle Tu, v \rangle| \leq (\|u\|^2 + \|v\|^2)$

$\sup |\langle Tu, v \rangle|$  سپس  $v = Tu/\|Tu\|$  را جایگزین کنید.



## فصل ۳

# سری‌های فوریه

در این فصل، با نظریه و کاربردهای سری‌های فوریه سروکار داریم، که پس از ژوزف فوریه<sup>۱</sup> (۱۸۳۰-۱۷۶۸ م.)، فیزیک‌دان فرانسوی نام‌گذاری شده است. وی این سری‌ها را در تحقیق‌های خود در زمینه انتقال حرارت توسعه داد. نتایج آن بعدها توسط کسانی، به‌ویژه ریاضی‌دان آلمانی دیریکله<sup>۲</sup> (۱۸۵۹-۱۸۰۵ م.)، مورد توجه قرار گرفت که او نقش مهمی در ویژگی‌های همگرایی سری‌ها داشت.

بخش نخست نظریه  $L^2$ ، نتایجی از مسائل اشتروم لیویل منظم را که در فصل پیشین بیان شده است، ارائه می‌دهد. در مثال ۳۱.۲ دیدیم که با توجه به قضیه ۸.۴.۲، هر دو مجموعه از توابع متعامد  $\{\cos(n\pi x/l) : n \in \mathbb{N}\}$  و  $\{\sin(n\pi x/l) : n \in \mathbb{N}\}$ ، فضای  $L^2(0, l)$  را تولید می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که اجتماع آنها  $L^2(-l, l)$  را تولید می‌کند، به همین ترتیب، به قضیه اساسی سری فوریه می‌رسد.

در بخش ۲.۳ نظریه نقطه‌به‌نقطه را در نظر می‌گیریم و نتیجه اصلی در این ارتباط را که قضیه

---

<sup>1</sup>Joseph Fourier

<sup>2</sup>Gustav Lejeune Dirichlet



۴.۲.۳ است، با استفاده از ویژگی‌های هسته دیریکله اثبات می‌کنیم. سومین و آخرین بخش این فصل، به کاربردهایی برای مسائل مقدار مرزی اختصاص داده شده است.

### ۱.۳ سری فوریه در $L^2$

تابع  $\varphi : [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$  زوج است، هرگاه به ازای هر نقطه  $x$  متعلق به  $[-l, l]$ ،

$$\varphi(-x) = \varphi(x),$$

و فرد است، هرگاه به ازای هر نقطه  $x$  متعلق به  $[-l, l]$ ،

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

اگر به جای بازه فشرده  $[-l, l]$ ، بازه  $(-l, l)$  یا  $(-\infty, \infty)$  را قرار دهیم، باز می‌توان همان تعریف را به کار برد. اگر  $\varphi$  روی  $[-l, l]$  انتگرال پذیر باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که

$$\int_{-l}^l \varphi(x) dx = 2 \int_0^l \varphi(x) dx$$

اگر  $\varphi$  زوج باشد و

$$\int_{-l}^l \varphi(x) dx = 0$$

اگر  $\varphi$  فرد باشد. واضح است که، مجموع دو تابع زوج (فرد)، تابعی زوج (فرد) است و حاصل ضرب دو تابع زوج یا فرد، تابع زوج است، درحالی‌که حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد، تابعی فرد است.

تابع دلخواه  $f$  تعریف شده روی  $[-l, l]$  را همیشه می‌توان به صورت یک مجموع به

شکل

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)], \quad (1.3)$$

نشان داد که  $f_e(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$  یک تابع زوج و  $f_o(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$

یک تابع فرد است. توابع  $f_e$  و  $f_o$  به ترتیب به عنوان قسمت‌های زوج و فرد (یا مؤلفه‌های)

تابع  $f$  نشان داده شده است. برای نشان دادن منحصر به فردی معادله (۱.۳)، فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \tilde{f}_e(x) + \tilde{f}_o(x) = f_e(x) + f_o(x), \quad (2.3)$$

که  $\tilde{f}_e$  زوج و  $\tilde{f}_o$  فرد است. با جایگزینی  $-x$  به جای  $x$  داریم:

$$f(-x) = \tilde{f}_e(x) - \tilde{f}_o(x) = f_e(x) - f_o(x). \quad (3.3)$$

با جمع و کم کردن معادله‌های (۲.۳) و (۳.۳)، نتیجه می‌گیریم که  $\tilde{f}_e = f_e$  و  $\tilde{f}_o = f_o$ .

هر ترکیب خطی از توابع زوج (فرد)، تابعی زوج (فرد) است، بنابراین واضح است که

توابع زوج و فرد در  $L^2(-l, l)$  دو زیر فضای متمم تشکیل می‌دهند که با یکدیگر متعامند،

یعنی اگر  $\varphi$  و  $\psi$  متعلق به  $L^2(-l, l)$  که  $\varphi$  زوج و  $\psi$  فرد باشد، آنگاه  $\varphi$  و  $\psi$  نسبت به هم

متعامند و ضرب داخلی شان

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-l}^l \varphi(x)\psi(x)dx = 0,$$

چون تابع  $\varphi\psi$ ، تابعی فرد است.

فرض کنید  $f = f_e + f_o$  تابعی در  $L^2(-l, l)$  است. واضح است که هر دوی  $f_e$  و

$f_e$  متعلق به  $L^2(-l, l)$  هستند. تحدید  $f_e$  به  $(0, l)$  را می‌توان در  $L^2$  برحسب جمله‌هایی از مجموعه متعامد (کامل)  $\{\cos(n\pi x/l) : n \in \mathbb{N}, \}$  به صورت

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.3)$$

نمایش داد که بر طبق روابط (۶۰.۲) و (۶۱.۲)،

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f_e(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_e(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

همچنین، مجموعه متعامد  $\{\sin(n\pi x/l) : n \in \mathbb{N}\}$ ،  $L^2(0, l)$  را تولید می‌کند، از این رو،

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.3)$$

که

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_o(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

چون هر دو طرف معادله (۴.۳) روی  $[-l, l]$ ، توابع زوج هستند، برابری به  $[-l, l]$

توسعه داده می‌شود و به‌طور مشابه دو طرف معادله (۵.۳) فرد هستند و این به ما اجازه

می‌دهد که برابری را به  $[-l, l]$  توسعه دهیم. بنابراین، به‌ازای هر  $f \in L^2(-l, l)$ ،

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad -l \leq x \leq l, \quad (6.3)$$

البته تساوی در  $L^2[-l, l]$  برقرار است. از طرف دیگر، با استفاده از ویژگی‌های توابع زوج و فرد، به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f_e(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \int_{-l}^l f_o(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = 0, \\ \int_{-l}^l f_e(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l f_e(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \\ \int_{-l}^l f_o(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l f_o(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \end{aligned}$$

ازاین‌رو، ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  در عبارت (۶.۳) با کمک

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

معین می‌شوند. این نتیجه با مثال زیر تأیید می‌شود.

مثال ۱.۱.۳. توابع ویژه معادله

$$u'' + \lambda u = 0, \quad -l \leq x \leq l,$$

را که در شرایط مرزی متناوب

$$u(-l) = u(l) \quad u'(-l) = u'(l),$$

صدق می‌کند، پیدا کنید.

حل: این یک مسئله اشتروم لیوویل است که شرایط مرزی از هم جدا نیستند ولی متناوبند. چون عملگر  $-d^2/dx^2$  تحت این شرایط خودالحاق است (تمرین ۲۶.۲ را ببینید)، نتایج قضیه همچنان به‌کار می‌رود (بجز منحصربه‌فردی توابع ویژه)، همان‌طور که در تبصره ۹.۴.۲ اشاره شد، توابع ویژه آنها در  $L^2[-l, l]$  متعامد و کامل هستند. اگر  $\lambda < 0$ ، ساده است بررسی کنیم که معادله دیفرانسیل تنها یک جواب بدیهی تحت شرایط مرزی متناوب معین دارد. اگر  $\lambda = 0$  باشد، جواب عمومی  $u(x) = c_1x + c_2$  است و شرایط مرزی نتیجه می‌دهد که تابع ویژه،  $u(x) = 1$  است.

برای مقادیر مثبت  $\lambda$  جواب معادله،

$$c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x,$$

است. با به‌کار بردن شرایط مرزی برای این جواب داریم:

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0,$$

$$c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

چون  $\sqrt{\lambda} > 0$ ،  $c_1$  و  $c_2$  هر دو نمی‌توانند صفر باشند، مقادیر ویژه باید در  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$

صدق کنند. بنابراین، مقادیر ویژه در  $(0, \infty)$  به‌صورت

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

هستند و توابع ویژه متناظر به‌صورت

$$1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \cos \frac{2\pi}{l}x, \sin \frac{2\pi}{l}x, \cos \frac{3\pi}{l}x, \sin \frac{3\pi}{l}x, \dots$$

هستند. توجه داشته باشید که هر مقدار ویژه  $\lambda_n = (n\pi/l)^2$  متناظر با دو تابع ویژه،  $\cos(n\pi x/l)$  و  $\sin(n\pi x/l)$  است، به جز  $\lambda_0 = 0$  که به تابع ویژه یگانه ۱ متناظر است. این مطلب، قضیه ۸.۴.۲ را که می‌گوید هر مقدار ویژه به یک تابع ویژه یگانه متناظر می‌شود، نقض نمی‌کند، برای آن قسمت از قضیه تنها وقتی که شرایط مرزی جداشونده باشند، به کار می‌رود. در مثال بالا، شرایط مرزی نتیجه می‌دهد:

$$c_1 \sqrt{\lambda} \sin \lambda l = 0, \quad c_2 \sin \lambda l = 0.$$

وقتی که  $\lambda_n = (n\pi/l)^2$  است، ثابت‌های  $c_1$  و  $c_2$  تعیین نمی‌شوند، بنابراین می‌توانیم  $c_1 = 0$  قرار دهیم تا مقدار ویژه را  $\sin(n\pi x/l)$  و  $c_2 = 0$  تا مقدار ویژه را  $\cos(n\pi x/l)$  انتخاب کنیم.

بنابراین، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۲.۱.۳** (قضیه اساسی سری فوریه). مجموعه متعامد از توابع

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x : n \in \mathbb{N} \right\}$$

روی  $L^2(-l, l)$  کامل است، یعنی هر تابع  $f \in L^2(-l, l)$  را می‌توان به وسیله سری زیر نمایش داد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad -l \leq x \leq l, \quad (7.3)$$

که

$$a_0 = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (8.3)$$

$$a_n = \frac{\langle f, \cos(\frac{n\pi}{l}x) \rangle}{\|\cos(\frac{n\pi}{l}x)\|^2} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.3)$$

$$b_n = \frac{\langle f, \sin(\frac{n\pi}{l}x) \rangle}{\|\sin(\frac{n\pi}{l}x)\|^2} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10.3)$$

سمت راست معادله (۷.۳)، بسط سری فوریه  $f$  نامیده می‌شود و ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  در بسط ضرایب فوریه  $f$  هستند.

تبصره ۳.۱.۳. ۱- اگر  $f$  یک تابع زوج باشد، به‌ازای هر  $n$  متعلق به  $\mathbb{N}$  ضرایب  $b_n = 0$  و  $f$  روی  $[-l, l]$  به‌وسیله سری کسینوسی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

نمایش داده می‌شود که ضرایب به‌صورت

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

معین می‌شوند.

برعکس، اگر  $f$  تابعی فرد باشد، آن‌گاه به‌ازای هر  $n$  متعلق به  $\mathbb{N}$ ،  $a_n = 0$  و  $f$  به‌وسیله سری سینوسی

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

نمایش داده می‌شود که

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

۲- برابری بیان شده در معادله (۷.۳) بین تابع  $f$  و سری فوریه اش لزوماً نقطه به نقطه نیست ولی در  $L^2[-l, l]$  این گونه است. این به آن معناست که وقتی  $N$  به بی نهایت میل می کند،

$$\|f(x) - [a_0 + \sum_{n=1}^N (\cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)]\|^2 =$$

$$\|f(x)\|^2 - l[a_0]^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) \rightarrow 0.$$

چون  $f \in L^2[-l, l]$  است و این همگرایی به وضوح نشان می دهد که سری مثبت  $\sum |a_n|^2$

$$\text{و } \sum |b_n|^2 \text{ هر دو همگرا هستند و بنابراین، } \lim a_n = \lim b_n = 0.$$

۳- اگر سری فوریه  $f$  به طور یکنواخت روی  $[-l, l]$  همگرا باشد آن گاه، به وسیله نتیجه

۱۹.۱، مجموع آن پیوسته است و برابری معادله (۷.۳) به شرطی که  $f$  روی  $[-l, l]$  پیوسته

باشد، نقطه به نقطه است.

مثال ۴.۱.۳. تابع

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

که در شکل ۱.۳ نشان داده شده است،

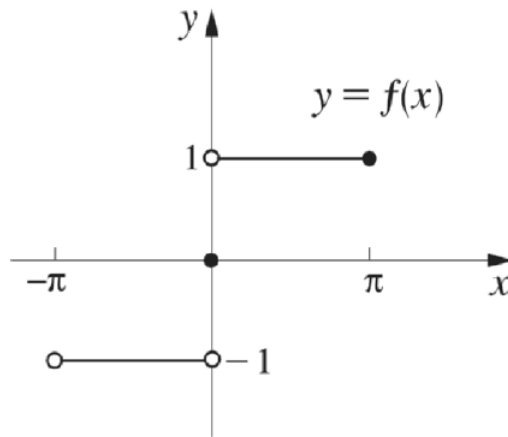
به وضوح در  $L^2[-\pi, \pi]$  است. برای به دست آوردن بسط سری فوریه آن، نخست یادآور

می شویم که تابع  $f$  روی  $(-\pi, \pi)$  فرد است، از این رو، سری فوریه آن به سری سینوسی

تبدیل می شود. ضرایب فوریه به صورت زیر معین می شوند:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$



شکل ۱.۳: تابع  $f(x)$ 

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\cdot} \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

بنابراین، داریم:

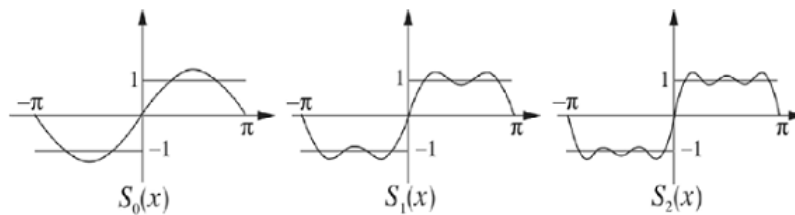
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\
 &= \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x + \dots \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x. \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که چطور جمله‌های مجموع جزئی

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x$$

در شکل ۲.۳ برای تقریب نمودار  $f$  رسم شده‌اند. همچنین، توجه داشته باشید که سری فوریه تابع  $f$  در  $\pm\pi$  برابر صفر است در حالی که  $f(\pi) = 1$  و  $f(-\pi)$  تعریف نشده است،

که این تنها بیانگر آن است که معادله (۱.۳) در هر نقطه در  $[-\pi, \pi]$  برقرار نیست. ما در این مورد، در بخش بعدی بیشتر صحبت خواهیم کرد.



شکل ۲.۳: دنباله مجموع‌های جزئی  $S_N$ .

قضیه ۲.۱.۳ برای توابع حقیقی هم توابع مختلط در  $L^2[-l, l]$  به کار می‌رود. وقتی که  $f$  حقیقی است، یک مزیت آشکار برای استفاده کردن دنباله متعامد توابع مثلثاتی حقیقی

$$1, \cos \frac{\pi}{l}x, \sin \frac{\pi}{l}x, \cos \frac{2\pi}{l}x, \sin \frac{2\pi}{l}x, \dots$$

برای گسترش  $f$  وجود دارد و ضرایب فوریه هم حقیقی هستند. افزون بر این، ما می‌توانیم از رابطه اوایلر

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

برای نمایش سری فوریه به صورت نمایی استفاده کنیم، که در انتها ضرایب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{l}} (a_n - ib_n) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi}{l}x} dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{\sqrt{l}}(a_n + ib_n) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{in\pi}{l}x} dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

به طوری که

$$\begin{aligned} a. &+ \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right) \\ &= c. + \sum_{n=1}^N \left( (c_n + c_{-n}) \cos \frac{n\pi}{l}x + i(c_n - c_{-n}) \sin \frac{n\pi}{l}x \right) \\ &= c. + \sum_{n=1}^N (c_n e^{in\pi x/l} + c_{-n} e^{-in\pi x/l}) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\pi x/l}. \end{aligned}$$

چون به ازای هر  $n$  متعلق به  $\mathbb{Z}$ ،  $|c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \sqrt{2}|c_n|$ ، دو طرف این معادله وقتی  $N$  افزایش می‌یابد، همگرا یا واگرا می‌شوند. بنابراین، وقتی  $N$  به بی‌نهایت میل می‌کند،

سمت راست به مجموع

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \equiv c. + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\pi x/l} + c_{-n} e^{-in\pi x/l}),$$

همگرا می‌شود و شکل نمایی سری فوریه را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

نتیجه ۶. هر تابع  $f \in L^1[-l, l]$  می‌تواند به صورت سری فوریه

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad (۱۲.۳)$$

نمایش داده شود که

$$c_n = \frac{\langle f, e^{in\pi x/l} \rangle}{\|e^{-in\pi x/l}\|^2} = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (۱۳.۳)$$

در مثال ۳.۳.۱، دیدیم که مجموعه  $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$  در  $L^2(-\pi, \pi)$  متعامد است، بنابراین،  $\{e^{in\pi x/l} : n \in \mathbb{Z}\}$  در  $L^2(-l, l)$  متعامد است. همچنین، می‌توانیم نشان دهیم که  $\{e^{in\pi x/l} : n \in \mathbb{Z}\}$  یک مجموعه کامل از توابع ویژه مسائل اشتروم لیوویل بحث‌شده در مثال ۱.۱.۳ را تشکیل می‌دهد که هر مقدار ویژه  $n^2\pi^2/l^2$  مربوط به جفت توابع ویژه  $e^{\pm in\pi x/l}$  است و در نتیجه، فوری به نمایش (۱۲.۳) می‌رسیم. در این نمایش، ضرایب فوریه  $c_n$  به وسیله فرمول یگانه (۱۳.۳) به جای سه فرمول برای  $a_n$ ،  $b_n$  و  $a_0$  تعریف شده است، که این یک مزیت آشکار است. با استفاده از معادله‌های (۱۲.۳) و (۱۳.۳) تابع در مثال ۴.۱.۳ را گسترش می‌دهیم، در نتیجه، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^{\pi} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx \right] \\
 &= \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{inx} (1 - \cos n\pi), \\
 f(x) &= \frac{1}{i\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] e^{inx} \\
 &= \frac{2}{i\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}] \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin((n+1)x).
 \end{aligned}$$

## تمرین ها

۱.۳. تحقیق کنید که مجموعه  $\{e^{in\pi x/l} : n \in \mathbb{Z}\}$  در  $L^2[-l, l]$  متعامد است. مجموعه

متعامد متناظر با آن چیست؟

۲.۳. آیا سری  $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin((2n+1)x)$  به طور یکنواخت همگراست؟ چرا؟

۳.۳. سری فوریه تابع  $f$  تعریف شده روی  $[-1, 1]$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

را تعیین کنید.

۴.۳. تابع  $f(x) = \pi - |x|$  را به سری فوریه روی  $[-\pi, \pi]$  گسترش دهید و ثابت کنید

که سری به طور یکنواخت همگراست.

۵.۳. تابع  $f(x) = x^2 + x$  را به سری فوریه روی  $[-2, 2]$  گسترش دهید. آیا به طور

یکنواخت همگراست؟

۶.۳. اگر سری  $\sum |a_n|$  همگرا باشد ثابت کنید که مجموع  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  به ازای هر

$x$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  متناهی است و یک تابع پیوسته را نمایش می دهد.

۷.۳. ثابت کنید که سری مثلثاتی حقیقی  $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  در  $L^2(-\pi, \pi)$

همگراست، اگر و تنها اگر، سری عددی  $\sum (a_n^2 + b_n^2)$  همگرا باشد.

### ۲.۳ همگرایی نقطه به نقطه سری فوریه

تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  متناوب نامیده می‌شود، اگر عدد مثبت  $p$  موجود باشد، به طوری که به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ،

$$f(x + p) = f(x).$$

عدد  $p$  را دوره تناوب  $f$  می‌نامند. اگر  $p$  دوره تناوب  $f$  باشد هر مضرب مثبتی از  $p$  نیز دوره‌های تناوبی آن تابع‌اند، چون

$$\begin{aligned} f(x + np) &= f(x + (n - 1)p + p) \\ &= f(x + (n - 1)p) \\ &= \dots \\ &= f(x). \end{aligned}$$

همچنین، نتیجه می‌دهد که

$$f(x - np) = f(x - np + p) = \dots = f(x).$$

از این رو، به ازای هر  $n$  صحیح، برابری  $f(x + np) = f(x)$  برقرار است. برای مثال، توابع  $\sin x$  و  $\cos x$  هر دو متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  هستند در حالی که اگر  $a > 0$  باشد،  $\sin(ax)$  و  $\cos(ax)$ ، متناوب با دوره تناوب  $2\pi/a$  هستند. هر عدد مثبت می‌تواند دوره تناوب تابع ثابت باشد. تابع  $f$  که متناوب با دوره تناوب  $p$  و انتگرال پذیر روی  $[0, p]$

است، واضح است روی هر بازه متناهی انتگرال‌پذیر است، و افزون بر آن، انتگرالش مقدار یکسان روی همه فاصله‌های با طول  $p$  دارد. به بیان دیگر، به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ،

$$\int_x^{x+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt. \quad (۱۴.۳)$$

این را می‌توان با استفاده از تناوب  $f$  که نشان می‌دهد  $\int_p^{p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$ ، ثابت کرد (تمرین ۸.۳).

وقتی سری مثلثاتی

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

روی  $\mathbb{R}$  همگرا شود، واضح است که مجموع آن

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

یک تابع متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است و  $2\pi$  دوره تناوب مشترک همه جمله‌های آن است.

اگر  $a_k$  و  $b_k$  ضرایب فوریه تابع  $f$  در  $L^1(-\pi, \pi)$  باشند، یعنی

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

آن‌گاه می‌دانیم که  $S_n$  در  $L^1(-\pi, \pi)$  به  $f$  همگراست، یعنی

$$S_n \xrightarrow{L^1} f.$$

اکنون، می‌خواهیم شرایطی را که تحت آن  $S_n$  به  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  نقطه به نقطه همگرا می‌شود، بررسی کنیم. به ویژه، اگر  $f$  از  $[-\pi, \pi]$  به  $\mathbb{R}$  به عنوان یک تابع متناوب به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ، با معادله

$$f(x + 2\pi) = f(x),$$

گسترش داده شود، چه موقع به ازای هر عدد حقیقی  $x$  برابری  $f(x) = S(x)$  برقرار است؟ برای پاسخ دادن به این سوال نخست باید برخی از تعاریف را بیان کنیم.

تعریف ۱.۱.۲.۳. می‌گوییم تابع  $f$  تعریف شده روی بازه کران دار  $I$  که  $(a, b) \subseteq I \subseteq$   $[a, b]$ ، قطعه به قطعه پیوسته است، هرگاه:

الف)  $f$  روی  $(a, b)$  به جز تعداد متناهی نقطه  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  پیوسته باشد،

ب) حدود راست و چپ

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x_i) = f(x_i^+), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x_i) = f(x_i^-)$$

در هر نقطه ناپیوستگی  $x_i$  وجود داشته باشد،

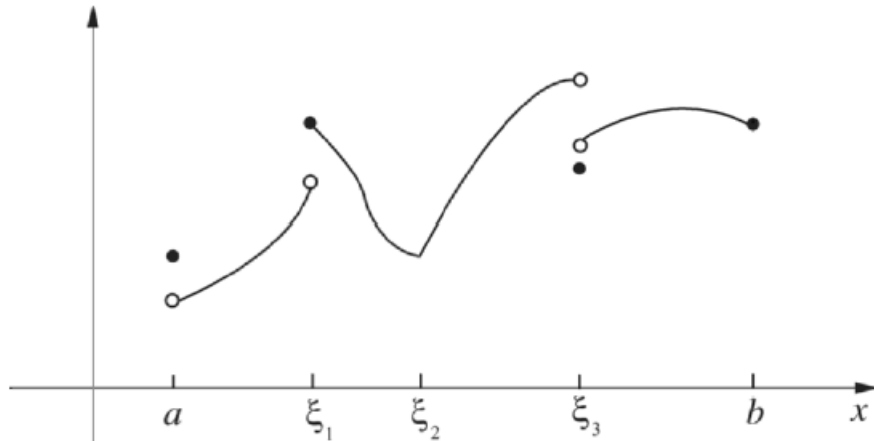
پ)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a^+)$  و  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b^-)$  در نقاط انتهایی وجود داشته باشد.

۲. تابع  $f$  قطعه به قطعه هموار است، هرگاه  $f$  و  $f'$  هر دو قطعه به قطعه پیوسته باشند.

۳. فرض کنید بازه  $I$  کران دار نباشد، آنگاه  $f$  قطعه به قطعه پیوسته (هموار) است، هرگاه

روی هر زیر بازه کران دار از  $I$  قطعه به قطعه پیوسته (هموار) باشد.





شکل ۳.۳: تابع قطعه‌به‌قطعه هموار

از تعریف بالا پیداست که تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته  $f$  روی بازه کران‌دار یک تابع کران‌دار است که ناپیوستگی‌ها نتیجه‌ای از جهش‌های متناهی در مقادیرش هستند. تابع  $f'$  در نقاطی که  $f$  ناپیوسته است، تعریف نشده است. همچنین  $f'$  جایی که ناپیوستگی جهشی دارد، تعریف نشده است (جاهایی از شکل  $f$  که گوشه تیز دارد همان‌طور که شکل ۳.۳ نشان داده شده است). در نتیجه، اگر  $f'$  روی  $(a, b)$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد، دنباله‌ای متناهی از نقاط (که شامل نقاط ناپیوستگی  $f$  هستند) مانند

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_m < b,$$

وجود دارد که  $f$  در آنها دیفرانسیل‌پذیر نیست ولی  $f'$  روی هر زیربازه  $(a, \xi_1)$ ،  $(\xi_i, \xi_{i+1})$  و  $(\xi_m, b)$ ،  $1 \leq i \leq m-1$  پیوسته است.

توجه کنید که  $f'(x^\pm)$  حدود چپ و راست  $f'$  در  $x$  است که به صورت زیر نمایش داده

می شود:

$$f'(x^-) = \lim_{x \rightarrow x^-} f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^-) - f(x-h)}{h},$$

$$f'(x^+) = \lim_{x \rightarrow x^+} f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h},$$

که بسیار متفاوت از حد چپ و راست مشتق  $f$  در  $x$  هستند. حالت دوم به صورت حدهای زیر معین می شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

حتی اگر  $f$  قطعه به قطعه هموار باشد، ممکن است در  $\xi_i$  وجود نداشته باشد. برعکس، هر تابع دیفرانسیل پذیر قطعه به قطعه هموار نیست (تمرین ۱۰.۳ و ۱۱.۳ را ببینید). یک تابع پیوسته به وضوح قطعه به قطعه پیوسته است، ولی ممکن است قطعه به قطعه هموار نباشد، مانند

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

که  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  وجود ندارد.

دو لم بعدی برای اثبات قضیه ۴.۲.۳ استفاده می شود که نتیجه اصلی این بخش است.

لم ۲.۲.۳. اگر  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm inx} dx = 0.$$

برهان. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_p$  نقاط ناپیوستگی تابع  $f$  روی  $(-\pi, \pi)$  است که به طور افزایشی مرتب شده است. چون  $|f|$  یک تابع پیوسته و کران دار روی  $(x_k, x_{k+1})$  به ازای

هر  $0 \leq k \leq p$ ، که  $x_k = -\pi$  و  $x_{p+1} = \pi$  است، مربع آن هم روی چنین بازه‌هایی انتگرال‌پذیر است و

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{x_1} |f(x)|^2 dx + \cdots + \int_{x_p}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

در نتیجه  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  است. ضرایب فوریه  $a_n, b_n$  و  $c_n$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  است، به صفر میل می‌کنند (تبصره‌های ۳.۱.۳ و ۳.۶.۱ را ببینید).  $\square$

لم ۳.۲.۳. به ازای هر عدد حقیقی  $\alpha \neq 2m\pi$  و  $m \in \mathbb{Z}$ ،

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin(\frac{1}{2}\alpha)}. \quad (15.3)$$

برهان. با استفاده از عبارت نمایی برای تابع کسینوس، سمت چپ (۱۵.۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\alpha &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ik\alpha} \\ &= \frac{1}{2} e^{-in\alpha} \sum_{k=0}^{2n} e^{ik\alpha} \\ &= \frac{1}{2} e^{-in\alpha} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i\alpha})^k. \end{aligned}$$

چون  $e^{i\alpha} \neq 1$ ، اگر و تنها اگر،  $\alpha$  مضرب صحیحی از  $2\pi$  باشد،

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-in\alpha} \sum_{k=0}^{2n} (e^{i\alpha})^k &= \frac{1}{2} e^{-in\alpha} \frac{1 - (e^{i\alpha})^{2n+1}}{1 - e^{i\alpha}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-in\alpha} - e^{+i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \quad \alpha \neq 0, \pm 2\pi, \dots \quad (16.3) \end{aligned}$$

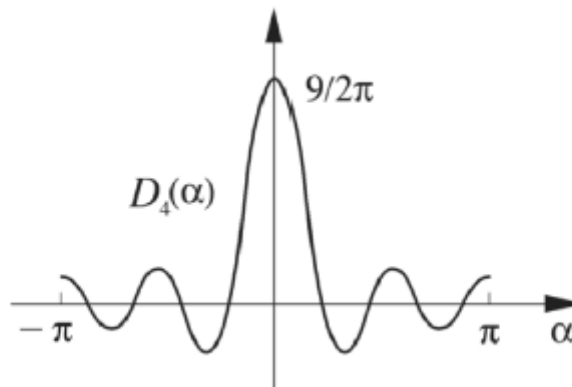
با ضرب  $e^{-i\alpha/2}$  در صورت و منخرج عبارت بالا، طرف راست معادله (۱۵.۳) را به دست می آوریم. □

عبارت

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik\alpha} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos k\alpha,$$

به هسته دیریکله مشهور است که یک تابع پیوسته از  $\alpha$  که زوج و با دوره تناوب  $2\pi$  است (شکل ۴.۳). بر اساس لم ۳.۲.۳، هسته دیریکله به ازای همه مقادیر حقیقی  $\alpha$  به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$D_n(\alpha) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{2\pi \sin \frac{\alpha}{2}} & \alpha \neq 0, 2\pi, \dots \\ \frac{n+1}{2\pi} & \alpha = 0, 2\pi, \dots \end{cases}$$



شکل ۴.۳: هسته دیریکله  $D_4$

با انتگرال‌گیری از  $D_n(\alpha)$  روی  $0 \leq \alpha \leq n$ ، به‌ازای همه  $n$ ‌های طبیعی به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^\pi D_n(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^n \cos k\alpha \right) d\alpha = \frac{1}{\pi}. \quad (17.3)$$

اکنون ما از لم ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳ برای اثبات نسخه نقطه‌به‌نقطه قضیه اساسی سری فوریه

استفاده می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار روی  $[-\pi, \pi]$  با دوره تناوب  $2\pi$

است. اگر

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

آنگاه سری فوریه

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

به‌ازای هر  $x$  در  $\mathbb{R}$  به  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  همگراست.

برهان.  $S_n(x)$  را مجموع  $n$  جمله اول سری فوریه در نظر می‌گیریم:

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

با جایگزینی نمایش‌های انتگرالی ضرایب در این مجموع متناهی، و با تغییر دادن ترتیب

انتگرال و مجموع، به‌دست می‌آوریم:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left[ \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^n (\cos k\xi \cos kx + \sin k\xi \sin kx) \right] d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left[ \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^n \cos k(\xi - x) \right] d\xi.$$

با تعریف  $D_n$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) D_n(\xi - x) d\xi \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

به عنوان یک تابع از  $t$ ، هر دو تابع  $f(x+t)$  و  $D_n(t)$  متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  هستند،

بنابراین، با استفاده از رابطه (۱۴.۳) می‌نویسیم:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

از طرف دیگر، با توجه به معادله (۱۷.۳) و این واقعیت که  $D_n$  یک تابع زوج است، داریم:

$$\frac{1}{\pi} [f(x^+) + f(x^-)] = f(x^-) \int_{-\pi}^{\cdot} D_n(t) dt + f(x^+) \int_{\cdot}^{\pi} D_n(t) dt.$$

از این رو،

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{1}{\pi} [f(x^+) + f(x^-)] &= \int_{-\pi}^{\cdot} [f(x+t) - f(x^-)] D_n(t) dt \\ &\quad + \int_{\cdot}^{\pi} [f(x+t) - f(x^+)] D_n(t) dt, \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که این دنباله وقتی  $n \rightarrow \infty$  است، به صفر میل می‌کند.

تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{e^{it} - 1} & -\pi < t < \cdot \\ \frac{f(x+t) - f(x^+)}{e^{it} - 1} & \cdot < t \leq \pi. \end{cases}$$

با استفاده از معادله (۱۶.۳) می نویسیم:

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)(e^{it} - 1)D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)(e^{i(n+1)t} - e^{-int})dt, \end{aligned}$$

اکنون، کافی است نشان دهیم که وقتی  $n \rightarrow \infty$  است، سمت راست تساوی به صفر میل می کند. چون  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  قطعه به قطعه هموار است، تابع  $g$  نیز روی  $[-\pi, \pi]$  به جز احتمالاً در  $t = 0$  به طور قطعه به قطعه هموار است. در  $t = 0$  با استفاده از قاعده هوییتال به دست می آوریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f'(x+t)}{ie^{it}} = -if'(x^{\pm}).$$

در نتیجه،  $g$  روی  $[-\pi, \pi]$  قطعه به قطعه پیوسته است، ضرایب فوریه آن با توجه به لم ۲.۲.۳ به صفر همگراست و بنابراین، وقتی  $n \rightarrow \infty$  است، داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{\pm int} dt \rightarrow 0.$$

□

**تبصره ۲.۵.۳.** ۱. اگر  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر  $x$  حقیقی  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = f(x)$  بنابراین، سری فوریه نقطه به نقطه به  $f$  روی  $\mathbb{R}$  همگراست. وگرنه جایی که  $f$  در  $x$  ناپیوسته است، سری فوریه اش به میانگین «پرش» در  $x$ ، یعنی  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ ، با صرف نظر از چگونگی تعریف  $f(x)$ ، همگراست. با این واقعیت سازگار است که، چون سری فوریه  $S$  به طور کامل به وسیله ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  مشخص می شود و چون این

ضرایب به وسیله انتگرال‌های شامل  $f$  تعریف می‌شوند، ضرایب نمی‌توانند به تغییر مقدار تابع در نقاط منفرد حساس باشند. اگر  $f$  در نقاط ناپیوستگی‌اش با فرمول

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)],$$

تعریف شود، آن‌گاه دوباره روی تمام  $\mathbb{R}$  برابری نقطه‌به‌نقطه  $S(x) = f(x)$  داریم.

۲. با استفاده از فرم نمایی سری فوریه، به‌ازای هر تابع  $f$  که در فرض قضیه صدق می‌کند، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

که

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

۳. قضیه ۴.۲.۳، شرایط کافی را برای همگرایی نقطه‌به‌نقطه سری فوریه  $f$  به  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  می‌دهد. برای مثال، صفحه ۹۱ [۱۶]، یا تمرین ۲۶.۳، را به‌عنوان یک تابع که نقطه‌به‌نقطه هموار نیست ولی می‌توان آن را به‌صورت سری فوریه نمایش داد، ببینید. همانطور که انتظار می‌رود، بازه  $[-\pi, \pi]$  می‌تواند با هر بازه‌ای که نسبت به مبدأ متقارن است، جایگزین شود.

نتیجه ۷. فرض کنید  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار روی  $[-l, l]$  با دوره تناوب  $2l$  است. اگر

$$a. = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$



$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{nx}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

آن‌گاه سری فوریه

$$a. + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{nx}{l} + b_n \sin \frac{nx}{l} \right)$$

به‌ازای هر  $x$  حقیقی به  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  همگراست.

برهان. با قراردادن  $g(x) = f(lx/\pi)$ ، می‌بینیم که  $g(x + 2\pi) = g(x)$  در شرایط

قضیه ۴.۲.۳ صدق می‌کند.  $\square$

در مثال ۴.۱.۳، تابع  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته است، از این‌رو، گسترش

متناوب آن روی  $\mathbb{R}$  در شرایط قضیه ۴.۲.۳ صدق می‌کند. توجه کنید که  $f$  در همه مضارب

صحیح  $\pi$  ناپیوسته است، که یک ناپیوستگی جهشی با اندازه ۲  $|f(x_n^+) - f(x_n^-)| = 2$

دارد. در  $x = 0$  داریم:

$$\frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)] = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0,$$

که با مقدار سری فوریه‌اش

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

در  $x = 0$  یکی است. چون  $f(0)$  برابر صفر تعریف شده بود، سری فوریه در این نقطه به

$f$  همگراست و به‌طور متناوب، در همه مضارب صحیح زوج  $\pi$  نیز همین‌طور است. ولی

برای نقطه  $x = \pi$ ، نمی‌توان گفت که  $S(x) = 0 \neq f(x) = 1$ . به دلیل دوره‌ای بودن سری فوریه در  $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ ، به  $f$  همگرا نیست. برای به دست آوردن همگرایی در این نقاط (و بنابراین در همه نقاط  $\mathbb{R}$ )، ما باید دوباره  $f$  را در  $\pi$  تعریف کنیم:

$$f(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)] = 0.$$

در این مثال مشابه، چون  $f$  در  $x = \pi/2$  پیوسته است، داریم  $f(\pi/2) = S(\pi/2) = 1$ . از این رو،

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n, \end{aligned}$$

که نمایش سری زیر از  $\pi$  را نتیجه می‌دهد.

$$\pi = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right). \quad (18.3)$$

تابع حقیقی داده شده  $f$  مفروض است، از نماد  $f^+$  برای نشان دادن قسمت مثبت تابع  $f$  استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}[f(x) + |f(x)|]. \end{aligned}$$

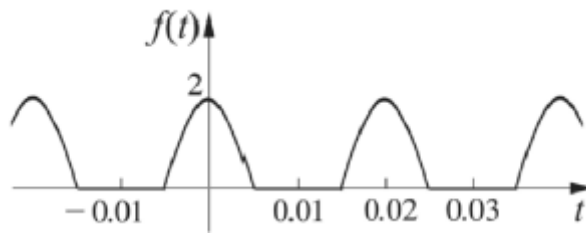
به طور مشابه، برای قسمت منفی  $f$  داریم:

$$f^-(x) = \frac{1}{2}[|f(x)| - f(x)] = \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0, \end{cases}$$

و به‌وضوح داریم  $f = f^+ - f^-$ .

مثال ۶.۲.۳. تابع  $f(t) = (2 \cos 100\pi t)^+$ ، که در شکل ۵.۳ نمایش داده شده است، جریان جاری را به‌عنوان تابعی از زمان  $t$  از طریق یک نیمه‌هادی الکتریکی و همچنین به‌عنوان یک نیمه‌موج یک‌سوکننده توصیف می‌کند. دامنهٔ جریان ۲ و فرکانس آن ۵۰ است. برای گسترش  $f$ ، که به‌وضوح قطعه‌به‌قطعه هموار است، برحسب یک سری فوریه، نخست باید دورهٔ تناوب آن را تعیین کنیم. این کار را می‌توان با جایگزینی از  $\pi/l = 100\pi$  انجام داد و از آن نتیجه می‌گیریم که  $l = 1/100$ . چون  $f$  یک تابع زوج است، پس به‌ازای همهٔ  $n$  های طبیعی،  $b_n = 0$  و  $a_n$  را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^l f(t) dt \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l f(t) dt \\ &= 100 \int_0^{1/200} 2 \cos 100\pi t dt \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$



شکل ۵.۳: موج یک‌سوسده

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \\
 &= 200 \int_0^{1/200} 2 \cos 100\pi t \cos 100n\pi t dt \\
 &= 200 \int_0^{1/200} [\cos(n+1)100\pi t + \cos(n-1)100\pi t] dt, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

وقتی  $n = 1$

$$a_1 = 200 \int_0^{1/200} [\cos 200\pi t + 1] dt = 1.$$

به ازای هر  $n \geq 2$  داریم:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n+1} \sin(n+1)100\pi t + \frac{1}{n-1} \sin(n-1)100\pi t \right] \Big|_0^{1/200} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n+1} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n-1} \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) \cos \frac{n\pi}{2} \\
 &= -\frac{4}{\pi(n^2-1)} \cos n \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

بنابراین،

$$a_2 = \frac{4}{3\pi}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{-4}{15\pi}, \quad a_5 = 0, \dots$$

چون  $f$  تابع پیوسته است، به ازای  $t$  های حقیقی به دست می آوریم:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} + \cos 100\pi t + \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 200\pi t - \frac{1}{15} \cos 400\pi t + \dots \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \cos 100\pi t - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 200n\pi t.$$

پیوستگی  $f$  با این واقعیت که سری به طور یکنواخت همگراست (با آزمون  $M$ )، سازگار است. در حالت کلی، عکس آن درست نیست. برای یک سری همگرا می تواند یک مجموع پیوسته داشته باشد، بدون اینکه همگرایی یکنواخت باشد؛ همان طور که سری  $\sum x^n$  روی  $(-1, 1)$  به  $(-1, 1)$  به طور نقطه به نقطه همگراست. ولی همان طوری که نشان می دهیم، این حالت نمی تواند برای سری فوریه روی دهد.

قضیه ۷.۲.۳. اگر  $f$  یک تابع پیوسته روی  $[-\pi, \pi]$  باشد، به طوری که  $f(-\pi) = f(\pi)$  و

$f'$  روی  $(-\pi, \pi)$  قطعه به قطعه پیوسته هستند، آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

همگراست، که  $a_n$  و  $b_n$  ضرایب فوریه تعریف شده به صورت زیر هستند:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$$

مشاهده می کنیم که شرایط به کاررفته روی  $f$  در این قضیه، همانند قضیه ۴.۲.۳ است که به جای پیوستگی روی  $[-\pi, \pi]$ ، پیوستگی قطعه به قطعه را قرار داده ایم.

برهان. چون  $f'$  روی  $[-\pi, \pi]$  قطعه به قطعه پیوسته است، متعلق به  $L^2(-\pi, \pi)$  است و

ضرایب فوریه آن به صورت زیر وجود دارد:

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx,$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

با انتگرال گیری مستقیم، یا جزء به جزء و با استفاده از رابطه  $f(-\pi) = f(\pi)$ ، به دست می آوریم:

$$a'_n = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n.$$

در نتیجه:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sqrt{|a'_n|^2 + |b'_n|^2}$$

$$\leq \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^N (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right]^{1/2}$$

که در رابطه پایانی از نامساوی کوشی - شوارتز استفاده کردیم. با استفاده از نامساوی

بسل (۲.۱) داریم:

$$\sum_{n=1}^N (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < \infty.$$

سری  $\sum 1/n^2$  همگراست و بنابراین، دنباله افزایشی  $S_N$  از بالا کران دار و همگراست.

□

نتیجه ۸. اگر  $f$  در شرایط قضیه ۷.۲.۳ صدق کند، آنگاه همگرایی سری فوریه

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (۱۹.۳)$$

به  $f$  روی  $[-\pi, \pi]$  یکنواخت و مطلق است.

برهان. گسترش  $f$  از  $[-\pi, \pi]$  به  $\mathbb{R}$  توسط رابطه تناوب  $f(x + 2\pi) = f(x)$  به ازای هر  $x$  حقیقی یک تابع پیوسته است که در شرایط قضیه ۴.۲.۳ صدق می کند، ازاین رو، سری فوریه (۱۹.۳) به ازای هر  $x$  حقیقی به  $f(x)$  همگراست. ولی

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2\sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2},$$

و چون  $\sum \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$  همگراست، سری (۱۹.۳) توسط آزمون  $M$  به طور یکنواخت و مطلقاً همگراست.  $\square$

بر اساس نتایج ۲ و ۸، می توانیم ادعا کنیم که یک تابع همانند شرایط قضیه ۴.۲.۳ پیوسته است، اگر و تنها اگر سری فوریه اش روی  $\mathbb{R}$  به طور یکنواخت همگرا باشد. نیازی به گفتن نیست که این نتیجه با جایگزینی دوره تناوب  $2l$  به جای دوره تناوب  $2\pi$  معتبر و صحیح است.

نتیجه ۹. اگر  $f$  تابع قطعه به قطعه هموار روی  $[-l, l]$  و با دوره تناوب  $2l$  باشد، سری فوریه اش به طور یکنواخت همگراست، اگر و تنها اگر  $f$  پیوسته باشد.

### تمرین ها

۸.۳. معادله (۱۴.۳) را ثابت کنید.

۹.۳. مشخص کنید که کدامیک از توابع زیر پیوسته و کدامیک قطعه به قطعه هموار هستند؟

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ب) } f(x) = |\sin x| \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x < 1, \quad f(x+1) = f(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{ت) } f(x) = |x|^{3/2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ث) } f(x) = [x] = n \quad \forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$$

۱۰.۳. نشان دهید که تابع  $f(x) = |x|$  روی  $\mathbb{R}$  قطعه به قطعه هموار است، ولی در  $x = 0$

دیفرانسیل پذیر نیست. مثالی از یک تابع ارائه کنید که قطعه به قطعه پیوسته روی  $\mathbb{R}$  باشد ولی

در هر عدد صحیح دیفرانسیل پذیر نباشد.

۱۱.۳. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

روی  $\mathbb{R}$  دیفرانسیل پذیر است، ولی قطعه به قطعه هموار نیست.

۱۲.۳. فرض کنید  $f$  یک تابع قطعه به قطعه هموار روی  $(-l, l)$  با دوره تناوب  $2l$  است،

نشان دهید که  $f$  روی  $\mathbb{R}$  قطعه به قطعه هموار است.

۱۳.۳. فرض کنید که توابع  $f$  و  $g$  قطعه به قطعه هموار روی بازه  $I$  باشند. نشان دهید مجموع

آنها  $f+g$  و همچنین ضرب  $f.g$  روی  $I$  قطعه به قطعه هموار هستند، در مورد خارج قسمت

$f/g$  چه می توان گفت؟

۱۴.۳. صفرهای هسته دیریکله  $D_n$  و بیشترین مقدارش را مشخص کنید.

۱۵.۳. بررسی کنید که هریک از توابع زیر قطعه به قطعه هموار است و سری فوریه آنها را



تعیین کنید.

الف)  $f(x) = x \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ب)  $f(x) = |x| \quad -1 \leq x \leq 1, \quad f(x + 2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

پ)  $f(x) = \sin^2 x \quad x \in \mathbb{R}$

ت)  $f(x) = \cos^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ث)  $f(x) = e^x, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad f(x + 4) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ج)  $f(x) = x^2, \quad -l \leq x \leq l, \quad f(x + 2l) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

۱۶.۳. در تمرین ۱۵.۳ نشان دهید که همگرای سری فوریه یکنواخت است.

۱۷.۳. مجموع  $S(x)$  سری فوریه در  $x = \pm 2$  در تمرین ۱۵.۳ (ث) و در  $x = \pm l$  در

تمرین ۱۵.۳ (ج) را به دست آورید.

۱۸.۳. با استفاده از بسط سری فوریه تابع  $f(x) = x$ ،  $-\pi < x \leq \pi$  و  $f(x + 2\pi) =$

$f(x)$  روی  $\mathbb{R}$ ، معادله (۱۸.۳) را به دست آورید.

۱۹.۳. از بسط سری فوریه  $f(x) = |x|$  و  $-\pi < x \leq \pi$  و  $f(x + 2\pi) = f(x)$  روی

$\mathbb{R}$ ، برای نمایشی از  $\pi^2$  استفاده کنید.

۲۰.۳. با استفاده از بسط سری فوریه تابع  $f$  در مثال ۶.۲.۳، برای نمایشی از  $\pi$  به دست

آورید.

۲۱.۳. بسط سری فوریه  $f(x) = x^2$  را روی  $[-\pi, \pi]$  تعیین نمایید، سپس از نتیجه برای

محاسبه هریک از سری‌های زیر استفاده کنید.

الف)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\text{ب) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

$$\text{پ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\text{ت) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

۲۲.۳. تابع  $f(x) = |\sin x|$  را بر حسب سری فوریه روی  $\mathbb{R}$  بسط دهید. بررسی کنید که

سری به طور یکنواخت همگراست و از نتیجه برای محاسبه سری های  $\sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)^{-1}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (4n^2 - 1)^{-1}$  استفاده کنید.

۲۳.۳. نشان دهید که تابع  $f(x) = |\sin x|$  مشتق پذیری قطعه به قطعه هموار دارد.  $f'$  را

بر حسب سری فوریه بسط دهید و مقدار سری را در  $x = n\pi$  و  $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ،  $n \in \mathbb{Z}$  به دست آورید، همچنین  $f$  و  $f'$  را رسم کنید.

۲۴.۳. فرض کنید  $f$  روی  $[0, l]$  قطعه به قطعه هموار است. توسعه تناوبی زوج  $f$ ، تابع  $\tilde{f}_e$

تعریف شده روی  $\mathbb{R}$  به وسیله

$$\tilde{f}_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ f(-x), & -l < x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_e(x + 2l) = \tilde{f}_e(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

است و توسعه تناوبی فرد  $f$  به صورت زیر است:

$$\tilde{f}_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ -f(-x), & -l < x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_o(x + 2l) = \tilde{f}_o(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

الف) نشان دهید که، اگر  $f$  روی  $[0, l]$  پیوسته باشد، آنگاه  $\tilde{f}_e$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است،

ولی  $\tilde{f}_o$  پیوسته است، اگر و تنها اگر  $f(0) = f(l) = 0$ .

ب) بسط‌های سری فوریه  $\tilde{f}_o$  و  $\tilde{f}_e$  را به دست آورید.

پ)  $f(x) = x$  روی  $[0, 1]$  مفروض است، سری فوریه  $\tilde{f}_o$  و  $\tilde{f}_e$  را تعیین نمایید.

۲۵.۳. برای هر یک از توابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  زیر، مقدار سری فوریه را در  $x = \pi$  و  $x = 0$

تعیین کنید، نتیجه را با  $f(0)$  و  $f(\pi)$  مقایسه کنید.

الف) توسعه تناوبی زوج تابع  $\sin x$  از  $[0, \pi]$  به  $\mathbb{R}$ .

ب) توسعه تناوبی فرد تابع  $\cos x$  از  $[0, \pi]$  به  $\mathbb{R}$ .

پ) توسعه تناوبی فرد تابع  $e^x$  از  $[0, \pi]$  به  $\mathbb{R}$ .

۲۶.۳. نشان دهید که سری فوریه  $f(x) = x^{1/2}$  در هر نقطه از  $[-\pi, \pi]$  همگراست. چون

$f$  پیوسته و در  $L^2(-\pi, \pi)$  قرار می‌گیرد، نتیجه بگیرید که سری فوریه نقطه به نقطه به  $f(x)$

به ازای هر  $x \in (-\pi, \pi)$  همگراست، اگرچه  $f$  روی  $(-\pi, \pi)$  قطعه به قطعه هموار نیست.

### ۳.۳ مسائل مقدار مرزی

سری فوریه نقش مهمی در ایجاد جواب‌های مسائل مقدار مرزی و اولیه برای معادلات

دیفرانسیل جزئی بازی می‌کند. جواب معادله دیفرانسیل جزئی به طور طبیعی یک تابع با بیش

از یک متغیر خواهد بود. وقتی معادله خطی و همگن است، یک روش مؤثر برای به دست

آوردن جواب آن، جداسازی متغیرها است. این بر اساس این فرض است که جواب مستقل

$u(x, y)$ ، می‌تواند به صورت ضرب یک تابع از  $x$  و یک تابع از  $y$  بیان شود:

$$u(x, y) = v(x)w(y). \quad (۲۰.۳)$$

پس از جایگزینی در معادله دیفرانسیل جزئی اگر بتوانیم جمله‌های معادله حاصل را مرتب کنیم، به طوری که یک طرف تنها شامل متغیر  $x$  و طرف دیگر تنها شامل  $y$  باشد، آنگاه هر طرف باید ثابت باشد. این دو معادله دیفرانسیل معمولی برحسب توابع  $v$  و  $w$  نشان می‌دهد که احتمالاً حل آنها از حل معادله اصلی ساده‌تر است. بدون از دست دادن کلیت در فرض اولیه (۲۰.۳) با گرفتن ترکیب‌های خطی از تمام جواب‌های  $v(x)w(y)$  با مقادیر مجاز از ثابت پارامتری جبران می‌شود.

دو مثال مشهور از مسائل مقدار مرزی که پدیده‌های فیزیکی را توصیف می‌کنند، با استفاده از جداسازی متغیرها حل می‌شوند.

### ۱.۳.۳ معادله گرما

معادله گرمای یک بُعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (21.3)$$

این معادله، جریان گرما را در امتداد یک نوار نازک با طول  $l$  کنترل می‌کند، که  $u(x, t)$  دمای نوار در نقطه  $x$  و زمان  $t$  است و  $k$  یک ثابت فیزیکی مثبت است که بستگی به جنس نوار دارد. برای مشخص کردن  $u$ ، نیاز داریم که شرایط مرزی در انتهای نوار و توزیع اولیه دما در امتداد نوار را بدانیم. فرض کنید که شرایط مرزی در  $u$  به صورت زیر است:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (22.3)$$

انتهای نوار در دمای ۰ نگه‌داشته می‌شود و توزیع اولیه دما در امتداد نوار به صورت

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (23.3)$$

است که  $f$  تابع معین است. می‌خواهیم به‌ازای همهٔ نقاط  $(x, t)$  در نوار  $(0, l) \times (0, \infty)$ ،  
 $u(x, t)$  را مشخص کنیم. فرض کنید،

$$u(x, t) = v(x)w(t).$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ (۲۱.۳)، به‌دست می‌آوریم:

$$v(x)w'(t) = kv''(x)w(t).$$

با تقسیم این معادله بر  $kvw$ ، داریم:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{kw(t)}. \quad (24.3)$$

معادلهٔ (۲۴.۳) نمی‌تواند روی نوار  $(0, l) \times (0, \infty)$  برقرار باشد، مگر اینکه هر دو طرف ثابت و مثلاً برابر  $-\lambda^2$  باشد. دلیل انتخاب ثابت  $-\lambda^2$  به‌جای  $\lambda$  در تبصرهٔ ۱.۳.۳ واضح است. بنابراین، از معادلهٔ (۲۴.۳) دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$v'' + \lambda^2 v = 0, \quad (25.3)$$

$$w' + \lambda^2 kw = 0, \quad (26.3)$$

به‌دست می‌آیند. جواب‌های (۲۵.۳) و (۲۶.۳) عبارتند از

$$v(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x, \quad (27.3)$$

$$w(t) = ce^{-\lambda^2 kt}, \quad (28.3)$$

که  $a$ ،  $b$  و  $c$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند، چون این جواب‌ها به پارامتر  $\lambda$  بستگی دارند، با نوشتن  $v_\lambda$  و  $w_\lambda$  این وابستگی را نشان می‌دهیم. بنابراین جواب‌های معادله گرما به صورت

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x)e^{-\lambda^2 kt}, \quad (29.3)$$

است که  $a_\lambda$  و  $b_\lambda$  ثابت‌های دلخواه وابسته به  $\lambda$  هستند.

شرط مرزی اول در (۲۲.۳) اشاره دارد که به ازای هر  $t > 0$ ،

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 kt} = 0.$$

در نتیجه،  $a_\lambda = 0$  و شرط مرزی دوم از این قرار است:

$$u_\lambda(l, t) = b_\lambda \sin \lambda l e^{-\lambda^2 kt}, \quad t > 0 \text{ به ازای هر } t$$

از این رو،  $b_\lambda \sin \lambda l = 0$ . چون نمی‌توانیم اجازه دهیم که  $b_\lambda = 0$ ، یا جواب بدیهی

$u_\lambda \equiv 0$  را به دست می‌آوریم که نمی‌تواند در شرط اولیه صدق کند (مگر اینکه  $f \equiv 0$ )،

در نتیجه،

$$\sin \lambda l = 0,$$

و بنابراین،  $\lambda l$  مضارب صحیح  $\pi$  است و پارامتر  $\lambda$  تنها می‌تواند مقادیر گسسته

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

را در نظر بگیرد. توجه کنید که ما تنها مقادیر مثبت  $n$  را در نظر گرفته‌ایم، چون مقادیر

منفی، اثر تغییر علامت  $\sin \lambda_n x$  را دارند و بنابراین می‌توان ثابت  $b_{\lambda_n} = b_n$  قرار داد.

حالت  $n = 0$  جواب بدیهی را نتیجه می‌دهد. بنابراین، ما به دنباله‌ای از جواب‌های معادلهٔ گرما می‌رسیم که همه در شرایط مقدار مرزی (۲۲.۳) صدق می‌کند:

$$u_n(x, t) = b_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

معادله‌های (۲۱.۳) و (۲۲.۳) خطی و همگن هستند، بنابراین، مجموع

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \quad (30.3)$$

یک جواب کلی‌تر از این معادله‌ها را تعریف می‌کند (به وسیلهٔ اصل انطباق‌پذیری).

اکنون شرط اولیهٔ (۲۳.۳) را برای عبارت (۳۰.۳) به کار می‌بریم:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x).$$

اگر تابع  $f$  روی  $[0, l]$  قطعه‌به‌قطعه هموار باشد، گسترش فردش روی  $[-l, l]$  در شرایط نتیجهٔ ۷ روی بازهٔ  $[-l, l]$  صدق می‌کند و ضرایب  $b_n$  باید ضرایب فوریه  $f$  باشد، به این معنا که

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

اینجا ما به طور ضمنی فرض می‌کنیم که به ازای هر  $x$ ،  $f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  است. این به طور کامل  $u(x, t)$  را که به وسیلهٔ سری (۳۰.۳) نمایش داده می‌شود، به عنوان جواب دستگاه معادلات (۲۱.۳) از طریق (۲۳.۳) در  $[0, \infty) \times [0, l]$ ، تعریف می‌کند.

تبصره ۱.۳.۳. ۱- اگرچه فرض  $u(x, t) = v(x)w(t)$  در آغاز محدودیتی در فرم جواب‌های (۲۹.۳) ایجاد می‌کند، ترکیب خطی (۳۰.۳) از چنین جواب‌هایی، کلیت از

دست داده شده را باز می‌گرداند تا آنجایی که دنباله  $\sin(n\pi/l)x$ ،  $L^2(\cdot, l)$  را تولید می‌کند. ۲- دلیل اینکه ما ثابت  $w'(t)/kw(t) = v''(x)/v(x)$  را منفی انتخاب می‌کنیم، آن است که ثابت مثبت، جواب‌های معادله (۲۵.۳) را از شکل مثلثاتی به توابع هایپربولیک تغییر می‌دهد. این‌ها نمی‌توانند برای گسترش  $f$  به کار روند (مگر اینکه  $\lambda$  موهومی باشد). برای جلوگیری از استفاده علامت ریشه مربع در نمایش جواب‌ها، مربع  $\lambda$  تنها به منظور راحتی معرفی شد.

در فضاهایی با بُعد بالاتر، معادله گرمای همگن به صورت زیر است:

$$u_t = k\Delta u, \quad (31.3)$$

که  $\Delta$  عملگر لاپلاس در فضای متغیرهاست. در  $\mathbb{R}^n$  عملگر لاپلاس در مختصات دکارتی به صورت زیر است:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

مثال ۲.۳.۳. توزیع دمای دینامیک (یعنی وابسته به زمان) روی یک ورق رسانای مستطیلی به طول  $a$  و عرض  $b$ ، که مرز آن در دمای  $\cdot$  نگه داشته می‌شود، با مسئله مقدار مرزی زیر برای معادله گرما در  $\mathbb{R}^2$  توصیف شده است.

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in (\cdot, a) \times (\cdot, b), \quad t > \cdot,$$

$$u(\cdot, y, t) = u(a, y, t) = \cdot, \quad y \in (\cdot, b), \quad t > \cdot,$$

$$u(x, \cdot, t) = u(x, b, t) = \cdot, \quad x \in (\cdot, a), \quad t > \cdot,$$



$$u(x, y, \cdot) = f(x, y), \quad (x, y) \in (\cdot, a) \times (\cdot, b),$$

که از نمادهای ساده‌تری استفاده می‌کنیم،

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \dots$$

فرض کنید

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot w(t)$$

به معادله  $v(x, y)w'(t) = kw(t)[v_{xx}(u, y) + v_{yy}(x, y)]$  منجر شود. پس از تقسیم بر  $vw$  و توجه به اینکه سمت چپ معادله حاصل به  $t$  و سمت راست به  $(x, y)$  بستگی دارد. ما دوباره ثابت جداسازی  $-\lambda^2$  را فرض می‌کنیم و جفت معادله‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$w' + \lambda^2 kw = 0, \quad (32.3)$$

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda^2 v = 0. \quad (33.3)$$

معادله (32.3) همان (26.3) است، که به وسیله تابع نمایی (28.3) حل شده است. ما می‌توانیم جداسازی متغیرها را دوباره برای معادله (33.3) به کار ببریم. با جایگزینی  $v(x, y) = X(x)Y(y)$  در (33.3)، داریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = 0,$$

که با جداسازی متغیرها داریم:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2,$$

و  $-\mu^2$  دومین ثابت جداسازی است. جواب عمومی معادله‌های حاصل به صورت زیر است:

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x,$$

$$Y(y) = A' \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + B' \sin \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y.$$

شرایط مرزی در  $x = 0$  و  $y = 0$  برابر است با  $A = A' = 0$ . از شرط  $x = a$  به ازای همه اعداد صحیح مثبت  $n$ ،  $\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{a}$ ، به دست می‌آوریم و از شرط  $y = b$  نتیجه می‌گیریم که

$$\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{m\pi}{b}, \quad m \in \mathbb{N},$$

و بنابراین،

$$\lambda = \lambda_{mn} = \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi.$$

به این ترتیب ما به دنباله مضاعف از توابع می‌رسیم:

$$u_{mn}(x, y, t) = b_{mn} e^{-k\lambda_{mn}^2 t} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

که در معادله گرما و شرایط مرزی صدق می‌کند.

پیش از به کارگیری شرط اولیه، مجموع مضاعف زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} e^{-k\lambda_{mn}^2 t} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (34.3)$$

که شرط مرزی را در دو طرف ورقه مستطیلی برآورده می‌کند. اکنون شرط در  $t = 0$  ایجاب می‌کند:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y. \quad (35.3)$$

با فرض اینکه  $f$  روی مستطیل  $(0, a) \times (0, b)$  مربع انتگرال‌پذیر است، ابتدا  $f$  را به‌عنوان یک تابع فرد از  $x$  و  $y$  به  $(-a, a) \times (-b, b)$  گسترش می‌دهیم. سپس با ضرب  $\sin(n'\pi/a)x$  در معادله (۳۵.۳) و با انتگرال‌گیری از آن روی  $(-a, a)$  به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn'} \sin \frac{m\pi}{b} y \|\sin \frac{n'\pi}{a} x\|^2 = 2 \int_{-a}^a f(x, y) \sin \frac{n'\pi}{a} x dx.$$

با ضرب  $\sin(m'\pi/b)y$  و انتگرال‌گیری روی  $(-b, b)$  نتیجه می‌گیریم:

$$b_{m'n'} \|\sin \frac{m'\pi}{b} y\|^2 \|\sin \frac{n'\pi}{a} x\|^2 = 4 \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \sin \frac{n'\pi}{a} x \sin \frac{m'\pi}{b} y dx dy.$$

چون

$$\|\sin(n'\pi/a)x\|^2 = \int_{-a}^a \sin^2\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) dx = a$$

و

$$\|\sin(m'\pi/b)y\|^2 = \int_{-b}^b \sin^2\left(\frac{m'\pi}{b}y\right) dy = b,$$

ضرایب در معادله (۳۴.۳) توسط رابطه زیر معین می‌شود:

$$b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b f(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy. \quad (۳۶.۳)$$

عبارت سمت راست معادله (۳۵.۳)، سری فوریه دوگانه  $f$  نامیده می‌شود و تساوی در  $L^2$  روی مستطیل  $(0, a) \times (0, b)$  برقرار است. با شرایط همواری مناسب روی تابع  $f$ ، مانند پیوستگی  $f$  و مشتقات جزئی آن روی  $[0, a] \times [0, b]$ ، (۳۵.۳) به یک تساوی نقطه‌به‌نقطه تبدیل می‌شود که در آن ضرایب فوریه  $b_{mn}$  به‌وسیله (۳۶.۳) تعریف می‌شوند. پس نمایش

سری (۳۴.۳) همگرا است و نمایش روی مرز معادله گرما در مستطیل  $(0, b) \times (0, a)$  و شرط اولیه در  $t = 0$ ، صدق می‌کند.

گفتنی است که وجود تابع نمایی در (۳۰.۳) و (۳۴.۳)، به این معناست که جواب معادله گرما وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، به‌طور نمایی به صفر کاهش می‌یابد. این از دیدگاه فیزیکی انتظار می‌رود، چون گرما از نقاط با دمای بالاتر به نقاط با دمای پایین‌تر جریان می‌یابد و به دلیل اینکه لبه‌های دامنه در هر حالت در صفر (مطلق) نگهداری می‌شوند، تمام گرما در نهایت خارج می‌شود. بنابراین وقتی  $t \rightarrow \infty$  است، معادله گرما به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\Delta u = 0,$$

که به معادله لاپلاس مشهور است. این یک معادله ایستا است که در این حالت، توزیع حالت پایدار دما را روی یک دامنه در صورت نداشتن منبع گرما توصیف می‌کند. ولی به‌طور کلی، معادله لاپلاس، بر بسیاری از زمینه‌های فیزیکی دیگر حاکم است که می‌تواند توسط یک تابع پتانسیل مانند میدان‌های گرانشی، الکترواستاتیک و سرعت سیال توصیف شود. برخی از مسائل مقدار مرزی برای معادله لاپلاس در تمرین‌های ۳۴.۳ تا ۳۷.۳ ارائه شده است. در فصل بعد به این معادله بازخواهیم گشت.

### ۲.۳.۳ معادله موج

اگر به یک رشته نازک، انعطاف‌پذیر و بی‌وزن که بین دو نقطه ثابت، مثلاً  $x = 0$  و  $x = l$  کشیده شده است، جابه‌جایی عمودی کوچک داده شود و سپس از وضعیت تعادل خود

خارج شود، در امتداد طولش، مرتعش خواهد شد، به‌گونه‌ای که جابه‌جایی (عمودی) در نقطه  $x$  و زمان  $t$ ، مشخص شده با  $u(x, t)$  در معادله موج در فضای یک بُعدی

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (37.3)$$

صدق می‌کند و  $c$  یک ثابت مثبت است که به جنس رشته بستگی دارد. این معادله، ارتعاشات عرضی یک رشته ایده‌آل را توصیف می‌کند. تنها در این واقعیت که مشتق زمان به جای مرتبه نخست، مرتبه دوم است، با معادله گرما اختلاف دارد، ولی همان‌طور که در ادامه نشان می‌دهیم، جواب‌ها بسیار متفاوت هستند.

شرایط مرزی روی  $u$  به صورت

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (38.3)$$

و شرایط اولیه به صورت

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (39.3)$$

است.  $f(x)$  شکل اولیه رشته و  $0$  سرعت اولیه است. در اینجا دو شرط اولیه لازم است، چون مشتق زمان در معادله موج مرتبه دوم است.

دوباره با استفاده از جداسازی متغیرها، با  $u(x, t) = v(x)w(t)$  داریم:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{c^2 w(t)} = -\lambda^2.$$

ازاین‌رو،

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$w'(t) + c^2 \lambda^2 w(t) = 0, \quad t > 0,$$

که جواب‌های معادله‌های بالا به صورت زیر هستند:

$$v(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x,$$

$$w(t) = a' \cos c\lambda t + b' \sin c\lambda t.$$

همان‌گونه که در مورد معادله گرما، شرایط مرزی ایجاب می‌کند که  $a = 0$  و  $\lambda = n\pi/l$ ،

$n \in \mathbb{N}$ ، از این رو، هر تابع در دنباله

$$u_n(x, t) = (a_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + b_n \sin \frac{cn\pi}{l}t) \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

در معادله موج و شرایط مرزی در  $x = 0$  و  $x = l$  صدق می‌کند. بنابراین، (با اصل برهم

نهی) داریم:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + b_n \sin \frac{cn\pi}{l}t) \sin \frac{n\pi}{l}x. \quad (40.3)$$

نخستین شرط اولیه ایجاب می‌کند که

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x = f(x), \quad 0 < x < l.$$

با فرض اینکه  $f$  قطعه‌به‌قطعه هموار است، دوباره از نتیجه ۷، نتیجه می‌گیریم که

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx. \quad (41.3)$$

دومین شرط اولیه از این قرار است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} b_n \cos \frac{cn\pi}{l}t = 0, \quad 0 < x < l.$$

ازاین‌رو، به‌ازای همه  $n$  ها،  $b_n = 0$ .

جواب معادله موج (۳۷.۳) با شرایط مرزی و اولیه داده‌شده (۳۸.۳) و (۳۹.۳) به‌صورت

زیر است:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (42.3)$$

که  $a_n$  توسط فرمول ضرایب فوریه (۴۱.۳) تعیین می‌شود. برای مثال، اگر رشته با سرعت

اولیه توصیف‌شده توسط تابع

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

آزاد شود، ضرایب  $b_n$  در (۴۰.۳) به‌وسیله شرط اولیه به‌صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} b_n \sin \frac{cn\pi}{l} x = g(x)$$

تعیین می‌شوند، به‌طوری‌که

$$b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{cn\pi}{l} x dx.$$

توجه داشته باشید که چگونه ارتعاشات رشته، همان‌طور که توسط سری (۴۲.۳) توصیف

شده است، به‌طور نامحدود وقتی  $t \rightarrow \infty$  است، ادامه می‌یابد؛ به این دلیل که معادله

موج (۳۷.۳)، هیچ اتلاف انرژی مانند مقاومت هوا یا اصطکاک داخلی را در رشته در نظر

نمی‌گیرد. این در تضاد با جواب (۳۰.۳) از معادله گرما است که وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، به صفر

میل می‌کند. همان‌گونه که در بالا توضیح داده شده است، در تمرین ۳۲.۳، که معادله موج

یک اصطکاک ناشی از مقاومت هوا دارد، وضعیت متفاوت است.

### تمرین‌ها

۲۷.۳. با استفاده از جداسازی متغیرها، هریک از مسائل مقدار مرزی معادله گرما را حل کنید.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (\text{الف})$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (\text{ب})$$

$$u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4} x - \sin \frac{5\pi}{4} x.$$

شرط  $u_x = 0$  در انتهای نوار به این معنی است که نقطه انتهایی عایق‌بندی شده است، به طوری که هیچ جریان گرمایی از طریق آن وجود ندارد.

۲۸.۳. اگر نواری به طول  $l$  با دمای ثابت  $T$  در یک طرف و  $T_1$  در طرف دیگر در دست

داشته باشیم، مسئله مقدار مرزی برابر است با

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = T, \quad u(l, t) = T_1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l.$$



با حل این دستگاه،  $u(x, t)$  را به دست آورید. راهنمایی: فرض کنید که  $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$ ، که در معادله گرما و شرایط مرزی همگن  $v(0, t) = v(l, t) = 0$  صدق می‌کند.

۲۹.۳. مسئله مقدار مرزی زیر را برای معادله موج حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad l > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x(l - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l.$$

۳۰.۳. ارتعاشات رشته مورد بحث در بخش ۲.۳.۳ را اگر سرعت اولیه  $g(x)$  داده شود، تعیین کنید.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < l.$$

نشان دهید که جواب را می‌توان توسط فرمول دی‌آلمبرت<sup>۱</sup>

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(\tau) d\tau,$$

نمایش داد که  $\tilde{f}$  و  $\tilde{g}$  به ترتیب گسترش متناوب فرد  $f$  و  $g$  از  $(0, l)$  به  $\mathbb{R}$  است.

۳۱.۳. اگر گرانس در نظر گرفته شود، ارتعاشات یک رشته کشیده شده بین  $x = 0$  و

<sup>۱</sup>d'Alembert's formula

$x = l$  توسط معادله  $u_{tt} = c^2 u_{xx} - g$  اداره می‌شود که  $g$  ثابت شتاب گرانشی است. این ارتعاشات را با شرایط مرزی همگن  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  و شرایط اولیه همگن  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$  تعیین کنید.

۳۲.۳. اگر مقاومت هوا به یک رشته ارتعاشی متناسب با سرعت آن باشد، نتیجه معادله موج میرا به صورت

$$u_{tt} + k u_t = c^2 u_{xx}$$

که در آن  $k$  عددی ثابت است. فرض کنید که شکل اولیه رشته  $u(x, 0) = 1$ ،  $0 < x < 1$  است و آن از وضعیت تعادل خارج شده است. شکل بعدی آن را برای همه  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$  با شرایط مرزی همگن تعیین کنید.

۳۳.۳. ارتعاشات یک غشای مستطیلی که در امتداد مرزها ثابت است، به کمک دستگاه معادلات زیر توصیف شده است:

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

این دستگاه معادلات را در مستطیل  $(0, a) \times (0, b)$  به‌ازای هر  $t > 0$  حل کنید.

۳۴.۳. جواب معادله لاپلاس را در مستطیل  $(0, a) \times (0, b)$  با شرایط  $u(0, y) = 0$  روی  $u(a, y) = 0$  و  $u(x, 0) = f(x)$  و  $u_y(x, b) = g(x)$  روی

$0 < x < a$  تعیین کنید.

۳۵.۳. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \sin \frac{3\pi}{4} x.$$

۳۶.۳. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u_y(x, 0) = \cos x, \quad u_y(x, \pi) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

۳۷.۳. معادله لاپلاس در مختصات قطبی  $(r, \theta)$  به صورت زیر داده شده است:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

الف) با استفاده از جداسازی متغیرها نشان دهید که جواب‌های این معادله در  $\mathbb{R}^2$

به صورت زیر است:

$$u_n(r, \theta) = \begin{cases} a_n + d_n \log r, & n = 0 \\ (r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

که  $a_n, b_n, d_n$  ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. راهنمایی: از  $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$

استفاده کنید.

ب) جواب عمومی معادله لاپلاس را به صورت  $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta)$  تشکیل

دهید، سپس نشان دهید که جواب معادله در داخل دایره  $r = R$  که  $u(R, \theta) = f(\theta)$  توسط

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

به ازای هر  $r \geq R$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  داده می شود، صدق می کند و  $A_n$  و  $B_n$  ضرایب فوریه  $f$  هستند.

پ) جواب معادله لاپلاس را در مختصات قطبی بیرون دایره  $r = R$  با همان شرایط

$$u(R, \theta) = f(\theta)$$
 تعیین کنید.



## فصل ۴

### چند جمله‌ای‌های متعامد

در این فصل، ما سه مثال رایج از مسائل اشتروم-لیوویل منفرد را که توابع ویژه‌شان چند جمله‌ای‌های حقیقی هستند، در نظر می‌گیریم. هر مجموعه از توابع ویژه، با یک انتخاب خاص از ضرایب در معادله مقدار ویژه

$$(pu')' + ru + \lambda \rho u = 0, \quad (1.4)$$

و از فاصله  $a < x < b$  تولید می‌شود. در همه حالت‌ها، معادله

$$p(u'v - uv')|_a^b = 0, \quad (2.4)$$

باید توسط هر جفت از توابع ویژه  $u$  و  $v$  برقرار باشد.

اگر  $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$  یک مجموعه کامل از توابع ویژه مسئله اشتروم-لیوویل منفرد باشد، آنگاه در  $L_p^\lambda(a, b)$  کامل و متعامد می‌شود، دنباله  $(\varphi_n)$  می‌تواند برای توسیع هر تابع

$f \in L_p^\lambda(a, b)$ ، توسط فرمول

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle_\rho}{\|\varphi_n\|_\rho} \varphi_n(x) \quad (3.4)$$

استفاده شود؛ به همان روشی که توابع مثلثاتی  $\sin nx$  یا  $\cos nx$  برای نمایش یک تابع در  $L^2(0, \pi)$  استفاده شد. بنابراین، ما می‌توانیم با انتخاب  $p(x) = 1$ ،  $r(x) = 0$ ،  $\rho(x) = 1$  و  $(a, b) = (0, \pi)$  در معادله (۱.۴)، به یک تعمیم سری فوریه برسیم. در نتیجه، سمت راست معادله (۳.۴) به عنوان سری فوریه تعمیم یافته از  $f$  است و

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle_\rho}{\|\phi_n\|_\rho^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ضرایب فوریه تعمیم یافته  $f$  هستند.

نتیجه متناظر با قضیه ۴.۲.۳ نیز برای سری فوریه تعمیم یافته به کار می‌رود. اگر  $f$  یک تابع قطعه به قطعه هموار روی  $(a, b)$  باشد و

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_\rho^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx,$$

آن‌گاه سری

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

در هر  $x \in (a, b)$  به  $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$  همگرا می‌شود. اثبات کلی این نتیجه، فراتر از محدوده این بحث است، ولی برخی منابع مرتبط با این موضوع در [۵] یافت می‌شود. البته انتظار نمی‌رود که ویژگی تناوبی در  $\mathbb{R}$ ، که مختص توابع مثلثاتی بود، برای یک پایه متعامد کلی برقرار باشد.

## ۱.۴ چندجمله‌ای‌های لژاندر

معادله

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (4.4)$$

پس از ریاضی‌دان فرانسوی ای، ام. لژاندر (۱۸۳۳-۱۷۵۲ م.) معادله لژاندر نامیده شد.

این یکی از ساده‌ترین مثال‌های مسئله اشتروم-لیوویل منفرد است. منفرد بودن به علت این

واقعیت است که  $p(x) = 1 - x^2$  در نقاط انتهایی  $x = \pm 1$  صفر می‌شود. با بازنویسی

معادله (۴.۴) به صورت معادل

$$u'' - \frac{2x}{1-x^2}u' + \frac{\lambda}{1-x^2}u = 0, \quad (5.4)$$

می‌بینیم که ضرایب در بازه  $(-1, 1)$  تحلیلی هستند و جواب معادله را می‌توان با یک سری

توانی حول نقطه  $x = 0$  نمایش داد. با قراردادن

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad -1 < x < 1, \quad (6.4)$$

و با جای‌گذاری در معادله لژاندر، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)c_k] x^k &= 0, \end{aligned}$$

که

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} c_k. \quad (7.4)$$



معادله (۷.۴)، یک فرمول بازگشتی برای ضرایب سری توانی (۶.۴) است که ثابت‌های  $c_k$  را به‌ازای هر  $k \geq 2$  برحسب  $c_0$  و  $c_1$  بیان می‌کند و دو جواب سری توانی مستقل، یکی با توان‌های زوج  $x$  و دیگری با توان‌های فرد را نتیجه می‌دهد.

اگر  $\lambda = n(n+1)$ ، که  $n \in \mathbb{N}$  باشد، رابطه بازگشتی (۷.۴) نتیجه می‌دهد:

$$c_{k+2} = c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots,$$

و آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که یکی از جواب‌ها، چندجمله‌ای است. در این حالت، رابطه (۷.۴) به شکل زیر است:

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} c_k. \quad (۸.۴)$$

بنابراین، با  $c_0$  و  $c_1$  دلخواه، داریم:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} c_0, & c_3 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} c_1, \\ c_4 &= -\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} c_0, & c_5 &= -\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} c_1, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

و جواب معادله لژاندر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right] + \\ & c_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right] \\ &= c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x), \end{aligned}$$

که سری توانی  $u_0(x)$  و  $u_1(x)$  در  $(-1, 1)$  همگرا می‌شوند و مستقل خطی هستند. اولی تابع زوج و دومی تابع فرد است.

بنابراین، به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، یک جفت جواب مستقل خطی به‌صورت زیر به‌دست

می‌آوریم:

$$\begin{aligned} n = 0, \quad u_0(x) &= 1 \\ u_1(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots, \\ n = 1, \quad u_0(x) &= 1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \dots \\ u_1(x) &= x, \\ n = 2, \quad u_0(x) &= 1 - 3x^2 \\ u_1(x) &= x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \dots, \\ n = 3, \quad u_0(x) &= 1 - 6x^2 + 3x^4 + \dots \\ u_1(x) &= x - \frac{5}{3}x^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

یکی از آنها چندجمله‌ای است و دیگری سری توانی نامتناهی که در  $(-l, l)$  همگراست.

اساساً جواب چندجمله‌ای که می‌تواند به‌صورت

$$a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \dots \quad (9.4)$$

نوشته شود، برای ما اهمیت دارد. این یک چندجمله‌ای از درجه  $n$  است که بسته به عدد

صحیح  $n$ ، زوج یا فرد است. با تعریف ضریب بالاترین توان در چندجمله‌ای که به‌صورت

زیر نوشته می‌شود:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!}, \quad (10.4)$$

عبارت بالا، چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $n$  نامیده می‌شود و با  $P_n(x)$  نمایش داده می‌شود. به‌عنوان یک نتیجه از این انتخاب، در بخش بعد نشان می‌دهیم که به‌ازای همه  $n$  ها،  $P_n(1) = 1$ . ضرایب دیگر در (۹.۴) با توجه به رابطه بازگشتی (۸.۴) به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n \\ &= -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n(n!)^2} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}, \\ a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}!(n-2)!(n-4)!} \\ &\vdots \\ a_{n-2k} &= (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^{nk}!(n-k)!(n-2k)!}, \quad n \geq 2k, \end{aligned}$$

که با استقرای روی  $k$  به آخرین برابری می‌رسیم. آخرین ضریب در  $P_n$ ، اگر  $n$  زوج باشد، با

$$a_n = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n(n/2)!(n/2)!},$$

و اگر  $n$  فرد باشد، با

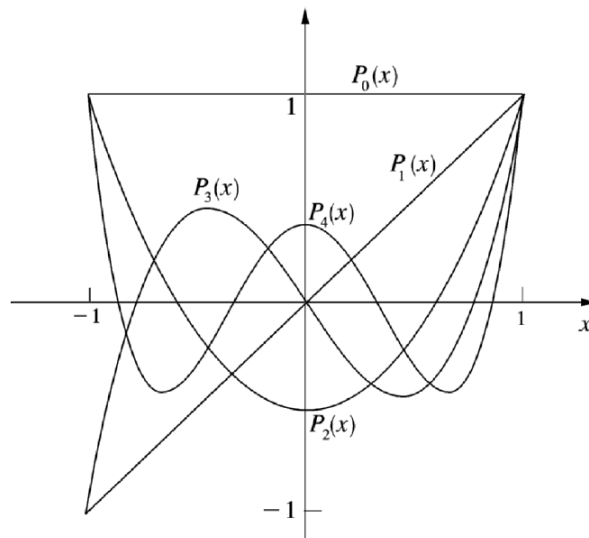
$$a_n = (-1)^{(n-1)/2} \frac{(n+1)!}{2^n\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!},$$

تعیین می‌شود. بنابراین، ما به چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $n$  زیر می‌رسیم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (11.4)$$

که  $\lfloor n/2 \rfloor$  جزء صحیح  $n/2$  است. یعنی اگر  $n$  زوج باشد،  $n/2$  و اگر  $n$  فرد باشد،  $(n-1)/2$  است. شش چندجمله‌ای نخست لژاندر به صورت زیر است (شکل ۱.۴ را ببینید):

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{4}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{16}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$



شکل ۱.۴: چندجمله‌ای‌های لژاندر

جواب دیگر معادله لژاندر، معروف به تابع لژاندر  $Q_n$ ، یک سری نامتناهی است که در بازه  $(-1, 1)$  همگرا و در خارج آن واگرا می‌شود (تمرین ۴.۳ را ببینید). تابع لژاندر از درجه  $n = 0$  با

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

معین می‌شود. وقتی  $x$  از داخل بازه  $(-1, 1)$  به سمت  $\pm 1$  میل کند، تابع بی‌کران می‌شود. این برای  $Q_1(x)$  نیز صادق است (تمرین‌های ۴.۳ و ۴.۴). همچنین، توابع دیگر لژاندر  $Q_n$  را می‌توان نشان داد که در نقاط انتهایی بازه  $(-1, 1)$  منفرد هستند. تنها توابع ویژه معادله لژاندر که در  $\pm 1$  کران‌دار هستند، چندجمله‌ای‌های لژاندر  $P_n$  هستند. با  $P(x) = 0$  در  $x = \pm 1$  شرط (۲.۴) برقرار است.

بنابراین، عملگر دیفرانسیل

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]$$

در معادله لژاندر، خودالحاق است. مقادیر ویژه آن  $\lambda_n = n(n+1)$  به بی‌نهایت میل می‌کند و توابع ویژه آن در  $L^2(-1, 1)$ ، یعنی چندجمله‌ای لژاندر  $P_n$ ، با توجه به قضیه ۸.۴.۲ در  $L^2(-1, 1)$  کامل و متعامد است. متعامد بودن  $P_n$  را به‌طور مستقیم در بخش بعدی بررسی می‌کنیم.

## تمرین‌ها

۱.۴. بررسی کنید  $P_n$  وقتی که  $n = 3$  و  $n = 4$  است، در معادله لژاندر صدق می‌کند.

۲.۴. از روش گرام-اشمیت برای ساخت یک مجموعه متعامد از چندجمله‌ای‌های بیرون

از مجموعه مستقل

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 : -1 \leq x < 1\}$$

استفاده کنید. نتیجه را با چندجمله‌ای‌های لژاندر  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$  و  $P_5(x)$  مقایسه کنید و نشان دهید که رابطه خطی بین دو مجموعه از چندجمله‌ای‌ها وجود دارد.

۳.۴. با استفاده از آزمون نسبت ثابت کنید که  $(-1, 1)$  یک بازه همگرایی برای سری توانی

است که تابع لژاندر  $Q_n$  را تعریف می‌کند. نشان دهید که تکین‌های  $Q_n(x)$  در  $x = \pm 1$

به‌گونه‌ای است که ضرب  $(1 - x^2)Q'_n(x)$  را در  $x = \pm 1$  صفر نمی‌کند، در حالی که وقتی

$x \rightarrow \pm 1, (1 - x^2)Q_n(x) \rightarrow 0$ . از این رو، شرط مرزی (۲.۴) وقتی  $u = Q_n$

و  $P(x) = (1 - x^2)$  یک تابع هموار روی  $[-1, 1]$  است، برقرار نیست.

۴.۴. ثابت کنید که

$$Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

۵.۴. ثابت کنید که به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

$$P_{n+1}(0) = 0,$$

$$P_{2n}(\cdot) = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)}{(2n)(2n-2)\cdots(4)(2)}.$$

۶.۴. نشان دهید که با جای‌گذاری  $x = \cos \theta$  و  $u(\cos \theta) = y(\theta)$  معادلهٔ لژاندر به معادلهٔ

زیر تبدیل می‌شود:

$$\sin \theta \frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cos \theta \frac{dy}{d\theta} + n(n+1) \sin \theta y = 0,$$

که  $0 \leq \theta \leq \pi$ . به نمایش تابع وزن  $\sin \theta$  در این معادله توجه کنید.

## ۲.۴ ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} \\ &\quad + \sum_{k=[n/2]+1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

چون

$$k = [n/2] + 1 = \begin{cases} n/2 + 1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ n/2 + 1/2 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود:

$$2n - 2([n/2] + 1) = \begin{cases} n - 2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ n - 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

به این معنا که توان‌های  $x$  در سمت دوم معادله (۱۲.۴) همه کمتر از  $n$  است. با مشتق  $n$  ام گرفتن از دو طرف معادله داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x^\nu - 1)^n &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{[n/\nu]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{\nu n - \nu k} \\ &= n! \sum_{k=0}^{[n/\nu]} (-1)^k \frac{(\nu n - \nu k) \cdots (n + 1 - \nu k)}{k!(n-k)!} x^{n - \nu k} \\ &= n! \sum_{k=0}^{[n/\nu]} (-1)^k \frac{(\nu n - \nu k)!}{k!(n-k)!(n - \nu k)!} x^{n - \nu k}. \end{aligned}$$

با مقایسه این رابطه با (۱۱.۴)، به فرمول رودریگز برای چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌رسیم و

$$P_n(x) = \frac{1}{\nu n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^\nu - 1)^n, \quad (13.4)$$

که یک روش مناسب برای تولید تعدادی از چندجمله‌ای‌های اول را به صورت زیر فراهم می‌کند:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= \frac{1}{\nu} \frac{d^n}{dx^n} (x^\nu - 1) = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{\lambda} \frac{d^n}{dx^n} (x^\nu - 1)^\nu = \frac{1}{\nu} (\nu x^\nu - 1), \dots \end{aligned}$$

همچنین می‌تواند برای استخراج برخی از اتحادهای مربوط به چندجمله‌ای‌های لژاندر و مشتقات آن استفاده شود، مانند:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (\nu n + 1)P_n(x), \quad (14.4)$$

$$(n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (\nu n + 1)xP_n(x) \quad n \in \mathbb{N} \quad (15.4)$$



که به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

اکنون از فرمول رودریگز برای اثبات متعامد بودن چندجمله‌ای‌های لژاندر در  $L^2(-1, 1)$

استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $m, n$  دو عدد صحیح هستند، به‌طوری‌که  $0 \leq m < n$ . با

استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)x^m dx &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[ x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 x^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \right] \\ &= \frac{-m}{\sqrt{n!}} x^{m-1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{\sqrt{n!}} \int_{-1}^1 x^{m-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^n dx. \end{aligned}$$

توجه کنید که همه مشتقات  $(x^2 - 1)^n$  از مرتبه کمتر از  $n$  در  $x = \pm 1$  صفر می‌شوند و

با تکرار روند انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، در پایان، در گام  $m$ ام داریم:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)x^m dx = \frac{(-1)^m m!}{\sqrt{n!}} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 = 0,$$

چون  $n < n - m - 1 \leq 0$ . بنابراین، می‌بینیم که  $P_n$  با  $x^m$  به‌ازای هر  $m < n$  متعامد

است. این به معنای آن است که به‌ازای همه  $m < n$ ،  $P_n \perp P_m$ . بنابراین، با استفاده از

تقارن نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همه  $m \neq n$

$$\langle P_n, P_m \rangle = 0.$$

برای ارزیابی  $\|P_n\|$ ، بار دیگر از فرمول (۱۳.۴) استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2n(n!)^2}} \int_{-1}^1 y^{(n)}(x) y^{(n)}(x) dx, \quad (16.4)$$

که  $y(x) = (x^2 - 1)^n$  با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y^{(n)}(x)y^{(n)}(x)dx &= - \int_{-1}^1 y^{(n-1)}(x)y^{(n+1)}(x)dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 y(x)y^{(2n)}(x)dx \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 y(x)dx, \quad (17.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx &= \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx \\ &= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{n!}{(n+1) \cdots (2n)} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx \\ &= \frac{(n!)^2 (1+x)^{2n+1} \Big|_{-1}^1}{(2n)!(2n+1)} \\ &= \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}. \quad (18.4) \end{aligned}$$

با ترکیب معادله‌های (۱۶.۴) تا (۱۸.۴)، به دست می‌آوریم:

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

و ازین‌رو، دنبالهٔ چندجمله‌ای‌های

$$\frac{1}{\sqrt{2}}P_0(x), \sqrt{\frac{3}{2}}P_1(x), \sqrt{\frac{5}{2}}P_2(x), \dots, \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x), \dots,$$

یک دستگاه متعامد کامل در  $L^2(-1, 1)$  است. توجه کنید که چگونه  $\|P_n\|$ ، برخلاف  $\|\sin nx\|$  و  $\|\cos nx\|$ ، به  $n$  وابسته است و وقتی  $n \rightarrow \infty$  میل می‌کند، به صفر می‌گراید.

مثال ۱.۲.۴. چون تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

روی  $(-1, 1)$  مربع انتگرال پذیر است، می‌توان آن را در  $L^2(-1, 1)$  به وسیله سری فوریه-لژاندر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

نمایش داد که ضرایب فوریه-لژاندر  $c_n$  با توجه به فرمول توسیع (۳.۴)، به صورت

$$c_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx.$$

مشخص می‌شود. به سری  $\sum c_n P_n(x)$  نیز سری لژاندر گفته می‌شود و  $c_n$  ضرایب لژاندر آن را نشان می‌دهد. بنابراین،

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{5}{16} P_2(x) + \dots \quad (19.4)$$

مشاهده می‌کنید تا آنجایی که

$$f(x) - \frac{1}{2} P_0(x) = f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -1/2, & -1 < x < 0 \\ 1/2, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

یک تابع فرد است، نمایش سری لژاندر  $f$  هیچ چندجمله‌ای زوج به جز  $P_0$  را شامل نمی‌شود. افزون بر این، چون به ازای هر  $n$  فرد،  $P_n(0) = 0$ ، سمت راست (۱۹.۴) در  $x = 0$  برابر است با

$$\frac{1}{2}P_0(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)],$$

که با نسخه تعمیم‌یافته قضیه ۴.۲.۳ که در آغاز این فصل اشاره شد، سازگار است.

چندجمله‌ای‌های لژاندر توسط تابع  $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$  تولید شده‌اند، به این معنا که

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad |t| < 1, \quad |x| \leq 1. \quad (20.4)$$

برای اثبات این اتحاد یادآور می‌شویم که برای هر نقطه ثابت  $x$  در  $[-1, 1]$ ، سمت چپ

معادله (۲۰.۴) یک تابع تحلیلی از  $t$  در  $(-1, 1)$  است که نشان می‌دهیم

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)t^n, \quad |t| < 1. \quad (21.4)$$

این تابع در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial f}{\partial t} = (x - t)f. \quad (22.4)$$

با جای‌گذاری نمایش سری (۲۱.۴) در (۲۲.۴)، رابطه بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$(n + 1)a_{n+1}(x) + na_{n-1}(x) = (2n + 1)xa_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

که همان رابطه (۱۵.۴) بین  $P_{n+1}$ ،  $P_{n-1}$  و  $P_n$  است. دو ضرایب نخست در بسط سری

تیلور  $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$  به صورت زیر هستند:

$$a_0(x) = 1 = P_0(x), \quad a_1(x) = x = P_1(x),$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $a_n(x) = P_n(x)$ .

با قراردادن  $x = 1$  و  $x = -1$  در رابطه (۲۰.۴)، به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n = \frac{1}{1+2xt+t^2} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

ازاین‌رو، به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

### تمرین‌ها

۷.۴. با استفاده از فرمول رودریگز، اتحاد (۱۴.۴) را اثبات کنید، آن‌گاه نتیجه بگیرید که

$$\int_{\pm 1}^x P_n(t) dt = \frac{1}{\sqrt{n+1}} [P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)],$$

$$\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

۸.۴. اتحاد (۱۵.۴) را ثابت کنید.

۹.۴. با جزئیات نشان دهید که چگونه معادله (۲۲.۴) از معادله (۲۱.۴) نتیجه به‌دست

می‌آید و چگونه این دو معادله، رابطه بازگشتی  $a_n$  را نشان می‌دهند.

۱۰.۴. نشان دهید اگر  $0 \leq r < 1$ ، آن‌گاه

$$\frac{1}{|1 - re^{i\theta}|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) r^n.$$

از این رو، نتیجه می‌گیریم که اگر  $x$  و  $y$  بردارهای غیرصفر در  $\mathbb{R}^r$  باشند، به طوری که  $r = 1$  و  $\frac{\|x\|}{\|y\|} < 1$  زاویه بین آنها باشد، آنگاه

$$\frac{1}{\|y-x\|} = \frac{1}{\|y\|} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) r^n.$$

به ویژه، اگر  $\|y\| = 1$  باشد، آنگاه

$$\frac{1}{\|y-x\|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \|x\|^n.$$

بنابراین، اگر دو جرم (جسم) در  $x$  و  $y$  قرار داشته باشد، آنگاه پتانسیل گرانش بین آنها ممکن است با یک سری توانی برحسب  $\|x\|$  با ضرایب  $P_n(\cos \theta)$  (با یک ثابت ضربی) نشان داده شود.

۱۱.۴. هر یک از توابع زیر را بر حسب چندجمله‌ای لژاندر توسعه دهید.

$$f(x) = 1 - x^2 \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = |x| \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{ب})$$

شش جمله نخست ( $n = 0$  تا  $n = 5$ ) را در (ب) محاسبه کنید.

۱۲.۴. با استفاده از معادله (۱۵.۴) ثابت کنید که

$$n \|P_n\|^2 = (2n-1) \langle x P_{n-1}, P_n \rangle,$$

$$n \|P_{n-1}\|^2 = (2n+1) \langle x P_n, P_{n-1} \rangle,$$

و از آن نتیجه بگیرید که  $\|P_n\|^2 = \frac{2}{n+1}$ .

۱۳.۴. تابع

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

را برحسب یک سری لژاندر توسعه دهید. با استفاده از فرمول‌های تمرین ۷.۴، ضرایب را تعیین کنید. مقدار سری را در  $x = 0$  محاسبه کنید و با میانگین مقدارهای  $f(0^+)$  و  $f(0^-)$  مقایسه کنید.

۱۴.۴. دو بسط سری لژاندر تابع  $f(x) = x$  در  $[0, 1]$ ، که یکی چندجمله‌ای درجه زوج و دیگری درجه فرد باشد، ارائه دهید. آیا بسط در  $x = 0$  معتبر است؟ روند را برای تابع  $f(x) = 1$  روی  $[0, 1]$  تکرار کنید.

## ۳.۴ چندجمله‌ای‌های هرمیت و لاگر

### ۱.۳.۴ چندجمله‌ای‌های هرمیت

چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌عنوان یک مجموعه از جواب‌های معادله دیفرانسیل معین (معادله لژاندر) تعریف شده است. برای تعریف چندجمله‌ای‌های هرمیت، می‌توان از همان روش استفاده کرد؛ ولی به‌جای این کار، با تعریف این چندجمله‌ای‌ها شروع می‌کنیم و آنها را به معادله‌ای (معادله هرمیت) که در آن صدق می‌کنند، تحدید می‌کنیم. ترتیب طبیعی گسترش این نظریه به این شکل نبوده است، چون هر دو معادله همان‌گونه که در ادامه این بخش نشان می‌دهیم، به‌طور طبیعی از فیزیک ریاضی پدید آمده‌اند.

به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، تابع  $H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  توسط

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (۲۳.۴)$$

تعریف می‌شود. این یک دنباله از چندجمله‌ای‌های زیر را که به چندجمله‌ای‌های هرمیت معروف است، نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 & H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

که این چندجمله‌ای‌ها پس از ریاضی‌دان فرانسوی چالز هرمیت<sup>۱</sup> (۱۸۲۲-۱۹۰۱) نام‌گذاری شد. با استفاده از فرمول (۲۳.۴)، ویژگی‌های مجموعه  $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$  را به‌دست می‌آوریم.

۱.  $H_n(x)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $n$  است.

برهان. با استفاده از استقرا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{-x^2} &= -2xe^{-x^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} &= (-2x)^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \\ \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} &= (-2x)^3 e^{-x^2} + 12xe^{-x^2} \end{aligned}$$

<sup>۱</sup>Charles Hermite



$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-2x)^n e^{-x^2} + p(x) e^{-x^2},$$

که  $p$  یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از  $n$  است. بنابراین،

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{-x^2} [(-2x)^n + p(x)] e^{-x^2} \\ &= (2x)^n + (-1)^n p(x). \end{aligned} \quad (24.4)$$

□

۲. مجموعه  $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$  در  $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$  متعامد است.

برهان. با فرض  $m < n$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle H_m, H_n \rangle_{e^{-x^2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

با  $n$  بار انتگرال‌گیری جزء به جزء و با توجه به اینکه برای هر چندجمله‌ای  $p$ ، وقتی  $|x| \rightarrow \infty$

$p(x) e^{-x^2} \rightarrow 0$  است، به دست می‌آوریم:

$$\langle H_m, H_n \rangle_{e^{-x^2}} = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^n}{dx^n} H_m(x) \right] e^{-x^2} dx = 0.$$

در نتیجه،  $H_m$  با  $H_n$  به‌ازای همه  $m < n$  متعامد است و از این رو، با استفاده از تقارن ضرب

□

داخلی به‌ازای همه  $m \neq n$  برقرار است.

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (۲۳)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \|H_n\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^n}{dx^n} H_n(x) \right] e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

که تساوی پایانی از معادله (۲۴.۴) نتیجه می‌شود. ولی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

□

(تمرین ۱۵.۴ را ببینید)؛ از این رو، به تساوی مورد نظر می‌رسیم.

۴. به ازای هر  $x$  حقیقی،

$$e^{xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n. \quad (۲۵.۴)$$

به بیان دیگر،  $e^{xt-t^2}$  یک تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های هرمیت است.

برهان. به ازای هر  $x$  حقیقی، تابع  $f(t, x) = e^{xt-t^2}$  در سراسر  $\mathbb{R}$  بر حسب  $t$  تحلیلی

است، بنابراین، توسط سری توانی زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=0} t^n.$$

چون

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2 - (x-t)^2} \right|_{t=0} \\
&= e^{x^2} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right|_{t=0} \\
&= (-1)^n e^{x^2} \left. \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \right|_{y=x} \\
&= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},
\end{aligned}$$

که  $y = x - t$  در نتیجه داریم:

$$\left. \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \right|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x).$$

□

قضیه ۱.۳.۴.  $H_n$  در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (26.4)$$

صدق می‌کند.

برهان. با دیفرانسیل‌گیری از اتحاد (۲۵.۴) نسبت به  $x$ ، به دست می‌آوریم:

$$2te^{xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} H'_n(x) t^n, \quad (27.4)$$

که سمت چپ تساوی می‌تواند به صورت زیر هم نوشته شود:

$$2te^{xt-t^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \forall \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} H_n(x) t^{n+1} \\
&= \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_{n-1}(x) t^n. \quad (28.4)
\end{aligned}$$

با مقایسه معادله‌های (۲۷.۴) و (۲۸.۴)، داریم:

$$H'_n(x) = \forall n H_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (29.4)$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه (۲۵.۴) نسبت به  $t$  داریم:

$$\forall (x-t) e^{\forall xt-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} H_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n,$$

که

$$\begin{aligned}
\forall x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n &= \forall \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n \\
&= \forall \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} H_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n \\
&= \forall \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_{n-1}(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n.
\end{aligned}$$

با مقایسه دو طرف این معادله، می‌بینیم که

$$\forall x H_0(x) = H_1(x)$$

$$\forall x H_n(x) = \forall n H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (30.4)$$

با ترکیب معادله‌های (۲۹.۴) و (۳۰.۴)، داریم:

$$\forall x H_n(x) = H'_n(x) + H'_{n+1}(x),$$

و با دیفرانسیل‌گیری از این معادله آخر، قضیه اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} H_n''(x) &= \nu x H_n'(x) + \nu H_n(x) - H_{n+\nu}'(x) \\ &= \nu x H_n'(x) + \nu H_n(x) - (\nu n + \nu) H_n(x) \\ &= \nu x H_n'(x) - \nu n H_n(x). \end{aligned}$$

□

معادله (۲۶.۴)، معادلهٔ هرمیت نامیده می‌شود و ما نشان داده‌ایم که یک جواب این معادلهٔ چندجمله‌ای هرمیت  $H_n$  است. همانند معادلهٔ لژاندر، جواب دیگر یک تابع تحلیلی است که می‌تواند توسط یک سری توانی برحسب  $x$  نمایش داده شود (تمرین ۲۱.۴ را ببینید). با ضرب  $e^{-x^\nu}$  معادلهٔ هرمیت به فرم استاندارد اشتروم-لیوویل

$$(e^{-x^\nu} u')' + \nu n e^{-x^\nu} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (31.4)$$

تبدیل می‌شود که  $e^{-x^\nu}$ ،  $\lambda = \nu n$  و  $\rho(x) = e^{-x^\nu}$  و عملگر دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-x^\nu} \frac{d}{dx} \right)$$

خودالحاق است. چون  $H_n(x)$ ، ولی نه جواب سری نامتناهی (تمرین ۲۲.۴ را ببینید) در  $L_{e^{-x^\nu}}^\nu(\mathbb{R})$  قرار می‌گیرد، بنابراین، ما نتیجه می‌گیریم که دنبالهٔ چندجمله‌ای‌های هرمیت  $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$  یک دستگاه متعامد کامل در  $L_{e^{-x^\nu}}^\nu(\mathbb{R})$  تشکیل می‌دهند.

## ۲.۳.۴ چندجمله‌ای‌های لاگر

معادله دیفرانسیل

$$xu'' + (1-x)u' + nu = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (32.4)$$

به معادله دیفرانسیل لاگر مشهور است که پس از ریاضی‌دان فرانسوی ادموند لاگر<sup>۱</sup> (۱۸۸۶-۱۸۳۴ م.) نام‌گذاری شد. فرم استاندارد آن به صورت زیر است:

$$(xe^{-x}u')' + ne^{-x}u = 0 \quad (33.4)$$

که با ضرب  $e^{-x}$ ، که در این حالت تابع وزن است، به دست آمده است. توجه کنید که  $p(x) = xe^{-x}$  در  $x = 0$  صفر می‌شود، بنابراین، هیچ شرط مرزی در این نقطه نیاز نیست. جواب‌های نامنفرد معادله لاگر، تا یک ثابت ضربی اختیاری، توسط چندجمله‌ای لاگر زیر معین می‌شود:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, \\ &\vdots \\ L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \end{aligned} \quad (34.4)$$

---

<sup>1</sup>Edmond Laguerre

که  $L_n$  از درجه  $n$  است. چون توابع ویژه عملگر اشتروم-لیوویل در معادله (۳۳.۴) است، انتظار داریم که به‌ازای همه  $m \neq n$ ،  $\langle L_m, L_n \rangle_{e^{-x}} = 0$ ، و این بی‌درنگ از این واقعیت نتیجه می‌شود که به‌ازای همه  $m < n$ ،

$$\begin{aligned} \langle x^m, L_n \rangle_{e^{-x}} &= \int_0^{\infty} x^m L_n(x) e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} (x^m e^{-x}) dx \\ &= (-1)^m \frac{m!}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^m e^{-x}) dx = 0. \end{aligned}$$

افزون بر این،

$$\langle x^n, L_n \rangle_{e^{-x}} = (-1)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = (-1)^n n!,$$

و چون ضریب  $x^n$  در  $L_n$ ،  $(-1)^n/n!$  است، نتیجه می‌شود که به‌ازای همه  $n$ ها،

$$\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \langle x^n, L_n \rangle = 1$$

و چند جمله‌ای‌های لاگر در حقیقت متعامد (و کامل) در  $L_{e^{-x^2}}(0, \infty)$  هستند.

### تمرین‌ها

۱۵.۴. با استفاده از اتحاد

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

تذکر: انتگرال دوگانه را با استفاده از مختصات قطبی ارزیابی کنید.

۱۶.۴. نشان دهید توان‌های  $x$  در چندجمله‌ای  $H_n(x)$  زوج هستند اگر  $n$  زوج باشد، و فرد هستند اگر  $n$  فرد باشد.

۱۷.۴. نشان دهید که، به‌ازای همه  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$H_{\nu n}(\cdot) = (-1)^n \frac{(\nu n)!}{n!}, \quad H_{\nu(n+1)}(\cdot) = 0.$$

۱۸.۴. با استفاده از استقرا ثابت کنید که

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/\nu \rfloor} (-1)^k \frac{(\nu x)^{n-\nu k}}{k!(n-\nu k)!}.$$

۱۹.۴. تابع  $f(x) = x^m$ ،  $m \in \mathbb{N}$  را برحسب چندجمله‌ای‌های هرمیت بسط دهید.

۲۰.۴. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

را برحسب چندجمله‌ای‌های هرمیت بسط دهید و پنج جمله نخست آن را محاسبه کنید.

۲۱.۴. معادله دیفرانسیل

$$u'' - \nu x u' + \nu \lambda u = 0,$$

وقتی که  $\lambda$  لزوماً عدد صحیح نیست، یک نسخه تعمیم‌یافته از معادله (۲۶.۴) است و همچنین

معادله هرمیت نامیده می‌شود.

الف) فرض کنید که  $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}$  و با جای‌گذاری در معادله، نشان دهید



که

$$c_{k+r} = \frac{r(k+r-\lambda)}{(k+r+r)(k+r+1)} c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(ب) اگر  $r = 0$ ، جواب به صورت زیر است:

$$u_0(x) = 1 - \frac{r\lambda}{2!}x^2 + \frac{r^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \dots,$$

و اگر  $r = 1$ ، داریم:

$$u_1(x) = x - \frac{r(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{r^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \dots.$$

(پ) نتیجه بگیرید که جواب عمومی معادلهٔ هرمیت به ازای هر  $\lambda$  حقیقی، به صورت  $u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x)$  است که  $c_0$  و  $c_1$  ثابت هستند. وقتی  $\lambda$  یک عدد صحیح نامنفی است، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

۲۲.۴. با همان  $u_0$  و  $u_1$  در تمرین (۲۱.۴)، ثابت کنید که هرکدام از توابع  $e^{-x^2} u_0(x)$  و  $e^{-x^2} u_1(x)$  وقتی  $|x| \rightarrow \infty$  به یک ثابت میل می‌کند و این ثابت صفر است، اگر و تنها اگر جواب،  $H_n$  باشد. از این مطلب نتیجه بگیرید که تنها جواب‌های معادلهٔ هرمیت در  $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$ ، چندجمله‌ای هرمیت است.

۲۳.۴. ثابت کنید:

$$L_n(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} x^k,$$

که

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ضرایب دوجمله‌ای است.

۲۴.۴. تابع  $x^3 - x$  را به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های لاگر بیان کنید.

۲۵.۴. تابع  $f(x) = x^m$ ، که  $m$  عدد صحیح مثبت است را برحسب چندجمله‌ای‌های

لاگر بسط دهید.

۲۶.۴. تابع  $f(x) = e^{x/2}$  را برحسب سری لاگر روی  $[0, \infty)$  بسط دهید.

۲۷.۴. نشان دهید که  $L_n$  در معادله (۳۲.۴) صدق می‌کند.

۲۸.۴. جواب عمومی معادله لاگر را وقتی  $n = 0$  است، تعیین کنید.

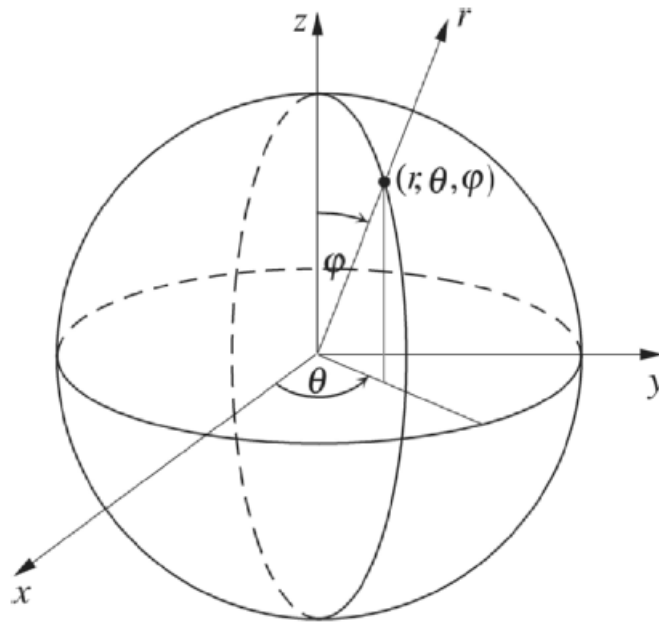
## ۴.۴ کاربردهای فیزیکی

چندجمله‌ای‌های متعامد بحث شده در این فصل، از لحاظ تاریخی، با مطالعه میدان‌های پتانسیل و به تازگی با مکانیک کوانتومی گره خورده‌اند. در اینجا ما دو مثال را که چندجمله‌ای‌های هرمیت و لژاندر به وجود می‌آورند، بررسی می‌کنیم. نخستین مورد، در توصیف یک میدان الکترواستاتیک تولیدشده توسط یک خازن کروی که نتیجه حل معادله لاپلاس در مختصات کروی است. مورد دوم، نشان دهنده تابع موج برای یک نوسانگر هارمونیک (همساز) است.

### ۱.۴.۴ معادله لاپلاس

در  $\mathbb{R}^3$  معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (35.4)$$



شکل ۲.۴: مختصات کروی

پس از ریاضی‌دان فرانسوی پیر د لاپلاس<sup>۱</sup> (۱۸۲۷-۱۷۴۹ م.)، لاپلاس نامیده شد. همان‌گونه که در بخش ۳.۳ اشاره شد، این یک مدل ریاضی برای تعدادی از پدیده‌های فیزیکی مهمی مانند توزیع استاتیک یک میدان الکتریسیته، میدان گرانشی یا دما در فضای آزاد است؛ در این زمینه، تابع اسکالر  $u = u(x, y, z)$ ، نشان‌دهنده پتانسیل الکتریکی و گرانشی یا دما در نقطه  $(x, y, z)$  است که با تبدیل مختصات دکارتی  $(x, y, z)$  به مختصات کروی  $(r, \theta, \varphi)$ ، به صورت زیر تعریف شده است (شکل ۲.۴ را ببینید):

$$x = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

---

<sup>1</sup>Pierre de Laplace

$$z = r \cos \varphi,$$

که  $0 \leq \varphi < \pi$  و  $-\pi < \theta \leq \pi$ ,  $r \geq 0$  معادله (۳۵.۴) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (36.4)$$

با فرض اینکه تابع  $u$  نسبت به محور  $z$  متقارن است، از  $\theta$  مستقل خواهد بود و معادله (۳۶.۴) به

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (37.4)$$

تبدیل می‌شود. از روش جداسازی متغیرها برای حل معادله (۳۷.۴) استفاده می‌کنیم، بنابراین، فرض می‌کنیم که  $u(r, \theta)$  به صورت حاصل ضرب تابعی از  $r$  و تابعی از  $\varphi$  به صورت

$$u(r, \varphi) = v(r)w(\varphi)$$

است. سپس در (۳۷.۴) جایگزین می‌کنیم و پس از تقسیم دو طرف بر  $vw$  داریم:

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{1}{w \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \varphi \frac{dw}{d\varphi} \right), \quad (38.4)$$

که سمت چپ معادله تنها به  $r$  و سمت راست تنها به  $\varphi$  وابسته است. با فرض اینکه معادله (۳۸.۴) روی سراسر دامنه  $\Omega$  (مجموعه باز و همبند) از صفحه  $r\varphi$  برقرار باشد، هر طرف باید یک ثابت باشد، که ما آن را با  $\lambda$  نشان می‌دهیم. بنابراین، به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$r^2 v'' + 2rv' - \lambda v = 0, \quad (39.4)$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} (\sin \varphi w')' + \lambda w = 0. \quad (40.4)$$

با قراردادن  $\xi = \cos \varphi$  معادله (40.4) به معادله لژاندر تبدیل می‌شود؛ در واقع، با

توجه به این فرض و با توجه به

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} &= \frac{d\xi}{d\varphi} \frac{d}{d\xi} = -\sin \varphi \frac{d}{d\xi}, \\ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left( \sin \varphi \frac{dw}{d\varphi} \right) &= \frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dw}{d\xi} \right], \end{aligned}$$

معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{dw}{d\xi} \right] + \lambda w = 0.$$

اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\lambda = n(n+1)$  باشد، آنگاه جواب‌های معادله (40.4) توسط چندجمله‌ای‌های

لژاندر زیر داده می‌شود:

$$w_n(\varphi) = p_n(\xi) = p_n(\cos \varphi).$$

از طرف دیگر، معادله (39.4)، از نوع کوشی-اوایلر است و با جای‌گذاری  $v(r) = r^\alpha$

نتیجه می‌گیریم:

$$[\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n + 1)]r^\alpha = 0,$$

که نتیجه می‌دهد  $\alpha = n$  یا  $\alpha = -n - 1$ . از این رو،

$$v_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n-1}$$

است که در آن  $a_n$  و  $b_n$  ثابت‌های دلخواه هستند. بنابراین، دنباله

$$u_n(r, \varphi) = v_n(r)w_n(\varphi) = (a_n r^n + b_n r^{-n-1})p_n(\cos \varphi),$$

در معادله لاپلاس (۳۷.۴) به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  صدق می‌کند و جواب کامل معادله به‌صورت

زیر است:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1})p_n(\cos \varphi). \end{aligned} \quad (۴۱.۴)$$

دو دیدگاه درباره نمایش (۴۱.۴) از جواب معادله لاپلاس قابل اشاره است. نخست اینکه

توابع لژاندر  $Q_n(\cos \varphi)$  مورد توجه قرار نگرفته‌اند، زیرا این توابع در امتداد محور  $z$  (جایی

که  $\cos \varphi = \pm 1$ ) بی‌کران می‌شوند؛ به همین دلیل، جمله‌های  $b_n r^{-n-1}$  (با جایگزینی

$b_n = 0$ ) اگر دامنه  $\Omega$  شامل مبدأ  $r = 0$  باشد، کاهش یافته‌اند. دیدگاه دوم، که پیش از این

در تبصره (۱.۳.۳) یاد شد، این است که بدون از دست دادن کلیت با فرض اینکه  $u(r, \varphi)$

حاصل ضرب تابعی از  $r$  و  $\varphi$  است با در نظر گرفتن ترکیب خطی از این جواب‌ها همان‌طور

که در (۴۱.۴) انجام دادیم،  $p_n$  در  $L^{\infty}(-1, 1)$  کامل می‌شود. البته ثابت‌ها و  $b_n$  با شرایط

اضافی (مرزی) مشخص می‌شوند.

برای مثال، فرض کنید  $u(r, \varphi)$  در معادله لاپلاس داخل گوی  $0 \leq r < R$  و

$u(R, \varphi) = f(\varphi)$  روی سطح کره  $r = R$ ، که  $f$  روی  $L^{\infty}(0, \pi)$  داده شده است،

صدق کند. با استفاده از رابطه (۴۱.۴) با  $b_n = 0$  به‌ازای همه  $n$ ها، داریم:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n p_n(\cos \varphi). \quad (۴۲.۴)$$

با به‌کار بردن شرایط مرزی در  $r = R$  به دست می‌آوریم:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n p_n(\cos \varphi) = f(\varphi),$$

که در آن نتیجه می‌گیریم ضرایب فوریه-لژاندر از  $f(\varphi)$  است وقتی که بر حسب  $p_n(\cos \varphi)$  بسط داده می‌شوند. بنابراین،

$$\begin{aligned} a_n R^n &= \frac{\langle f, p_n \rangle}{\|p_n\|^2} \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\varphi(\xi)) p_n(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

و از این رو،

$$a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\varphi) p_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.. \quad (۴۳.۴)$$

بیرون گوی، در ناحیه  $r > R$ ، توان‌های نامنفی  $r$ ، بی‌کران و ضرایب‌شان باید صفر شوند.

از این رو، جواب در این حالت، به صورت زیر تعیین می‌شود:

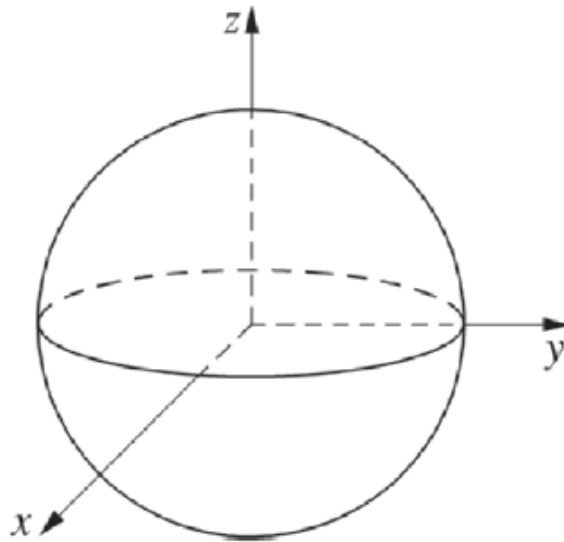
$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1} p_n(\cos \varphi).$$

که

$$b_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\varphi) p_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

مثال ۱.۴.۴. بارهای الکتریکی متضاد بر روی دو صفحه هادی نیمکره که از هم جدا شده‌اند،

یک میدان الکتریکی بین آنها در داخل و بیرون سطح کروی ایجاد می‌شود. این دستگاه را



شکل ۳.۴: خازن کروی

یک خازن الکتریکی می‌نامند (شکل ۳.۴ را ببینید). فرض کنید که شعاع خازن کروی ۱ است. اگر نیمکره بالایی دارای پتانسیل ۱ و نیمکره پایینی دارای پتانسیل  $-1$  باشد، تابع دیفرانسیل در داخل کره را تعیین کنید.

حل: فرض کنید  $u$  تابع پتانسیل میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضای خارج سطوح رسانا مشخص کند. پتانسیل الکتریکی (از این رو، بار الکتریکی) روی هر نیمکره به‌طور متقارن پیرامون محور  $z$  توزیع می‌شود، بنابراین،  $u$  فقط به  $r$  و  $\varphi$  وابستگی دارد. پتانسیل از داخل کره به‌صورت (۴۲.۴) است. روی سطح کروی،

$$u(1, \varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$



با به‌کار بردن فرمول (۴۳.۴)، با  $R = ۱$  و  $f(\varphi) = u(۱, \varphi)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n+1}}{2} \left[ \int_0^{\pi/2} p_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} (-1) p_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{2} \int_0^1 [p_n(\xi) - p_n(-\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

بنابراین، برای مقادیر زوج  $n$ ،  $a_n = ۰$  و

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2} \int_0^1 \sqrt{2} p_n(\xi) d\xi = (\sqrt{n+1}) \int_0^1 p_n(\xi) d\xi$$

وقتی که  $n$  فرد باشد، بنابراین،

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{3} \int_0^1 p_1(\xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_3 &= \sqrt{5} \int_0^1 p_3(\xi) d\xi = -\frac{\sqrt{5}}{8} \\ a_5 &= \sqrt{7} \int_0^1 p_5(\xi) d\xi = \frac{\sqrt{7}}{16} \\ &\vdots \end{aligned}$$

بر اساس نتیجه تمرین ۷.۴، فرمول کلی برای  $a_n$ ، وقتی  $n$  فرد است، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{n+1}) \int_0^1 p_n(\xi) d\xi \\ &= p_{n-1}(0) - p_{n+1}(0). \end{aligned}$$

ازاین‌رو، پتانسیل داخل خازن است:

$$u(r, \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} r p_1(\cos \varphi) - \frac{\sqrt{5}}{8} r^3 p_3(\cos \varphi) + \frac{\sqrt{7}}{16} r^5 p_5(\cos \varphi) + \dots$$

## ۲.۴.۴ نوسانگر هارمونیک

در مکانیک کوانتوم، وضعیت ذره‌ای که به حرکت روی یک خط مستقیم (محور  $x$ ) محدود شده است، با یک تابع موج  $\Psi(x, t)$  توصیف شده است. اگر حرکت هارمونیک باشد، وابستگی به زمان  $t$  توسط

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar},$$

معین می‌شود که  $E$  انرژی کل ذره است و  $\hbar$  یک ثابت جهانی معروف به ثابت پلانک است. محل ذره به وسیله تابع  $\psi(x)$  تعیین می‌شود به این معنا که  $|\psi(x)|^2 / \|\psi\|^2$  یک اندازه از چگالی احتمالی در  $\mathbb{R}$  است. اگر ذره در یک میدان پتانسیل  $V(x)$  واقع شود، تابع  $\psi$  در معادله شرودینگر مستقل از زمان زیر صدق می‌کند:

$$\Psi'' + \frac{\hbar^2 m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi = 0.$$

با تعریف  $\lambda = \hbar^2 m E / \hbar^2$  و  $r(x) = -\hbar^2 m V(x) / \hbar^2$ ، معادله شرودینگر صورتی از یک معادله مقدار ویژه اشتروم-لیوویل استاندارد را به صورت زیر می‌گیرد:

$$\Psi'' + [\lambda + r(x)]\psi = 0. \quad (۴۴.۴)$$

روی بازه  $-\infty < x < \infty$ ، وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  باشد، شرط  $\psi \rightarrow 0$  یک مسئله اشتروم لیوویل منفرد تعریف می‌کند.

وقتی که  $V(x)$  با  $x$  متناسب باشد، دستگاه حاصل از آن نوسانگر هارمونیک نامیده می‌شود. برای سادگی  $V(x) = \hbar^2 x^2 / 2m$  را در نظر می‌گیریم. بنابراین، معادله (۴۴.۴)

به

$$\Psi'' + (\lambda - x^2)\psi = 0 \quad (۴۵.۴)$$

تبدیل می‌شود. اگر قرار دهیم  $u(x) = e^{x^2/2}\psi(x)$ ، به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$u'' - 2xu' + (\lambda - u)u = 0,$$

وقتی که  $\lambda = 2n + 1$ ، معادلهٔ هرمیت است، بنابراین، جوابش  $H_n$  است. در نتیجه، مقادیر

ویژهٔ معادلهٔ (۴۵.۴) به‌صورت

$$\lambda_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

هستند، که سطوح انرژی (قابل قبول)  $E_n = (2n + 1)\hbar^2/2m$  ذره در نوسان هارمونیک

را تعیین می‌کند و توابع ویژهٔ متناظر به‌صورت زیر

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

معین می‌شوند، که توابع موج ذره در سطوح انرژی قابل قبول را نشان می‌دهد. توابع

$e^{-x^2/2} H_n(x)$ ، متعلق به  $L^2(\mathbb{R})$  هستند که توابع هرمیت نامیده می‌شوند. احتمال اینکه

ذره در بازهٔ  $(a, b)$  واقع شده باشد، به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{1}{\|H_n\|_{e^{-x^2/2}}^2} \int_a^b H_n^2(x) e^{-x^2/2} dx = \frac{\int_a^b H_n^2(x) e^{-x^2/2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2/2} dx}.$$

## تمرین‌ها

۲۹.۴. در مثال ۱.۴.۴، سطحی که  $u(r, \varphi) = 0$  است را مشخص کنید.

۳۰.۴. در مثال ۱.۴.۴، تابع پتانسیل را بیرون سطح کره  $r = 1$  مشخص کنید.

۳۱.۴. جواب  $u(r, \varphi)$  از معادله لاپلاس داخل کره با شعاع  $R$ ، اگر

$$u(R, \varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

را پیدا کنید.

۳۲.۴. فرض کنید  $u$  در معادله لاپلاس، داخل نیمکره  $0 \leq r < 1$  و  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

صدق کند. اگر روی  $0 \leq r < 1$ ،  $u(r, \pi/2) = 0$  و روی  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$u(1, \varphi) = 1$  نشان دهید که

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{r}{2} \right)^{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} r^{2n+1} p_{2n+1}(\cos \varphi),$$

داخل نیمکره است.

۳۳.۴. فرض کنید  $u$  در معادله لاپلاس، داخل نیمکره  $0 \leq r < R$  و  $0 < \varphi \leq \pi/2$

صدق کند، اگر روی  $0 \leq r < R$ ،  $u(r, \pi/2) = 0$  و روی  $0 < \varphi \leq \pi/2$

$f(\varphi)$  نشان دهید که

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \left( \frac{r}{R} \right)^{2n} p_{2n}(\cos \varphi),$$

$$c_{2n} = (2n+1) \int_0^{\pi/2} f(\varphi) p_{2n}(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$



# فصل ۵

## توابع بسل

این فصل را با ارائه تابع گاما و برخی از ویژگی‌های آن شروع می‌کنیم. این تابع برای تعریف تابع بسل استفاده می‌شود، از این رو، با موضوع این فصل در ارتباط است.

### ۱.۵ تابع گاما

تابع گاما به ازای هر  $x > 0$  توسط انتگرال ناسره زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.5)$$

این انتگرال به ازای همه مقادیر مثبت  $x$  همگرا است، بنابراین، به وضوح یک تابع پیوسته روی  $(0, \infty)$  را نمایش می‌دهد. در واقع، می‌توانیم نشان دهیم که  $\Gamma$  روی  $(0, \infty)$  از کلاس  $C^\infty$  است (تمرین ۱.۵ را ببینید). با انتگرال‌گیری جزء به جزء، داریم:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

که رابطه بازگشتی تابع گاما را به صورت زیر نشان می دهد:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \quad (۲.۵)$$

اگر  $x = n$  یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\vdots \\ &= n!\Gamma(1), \end{aligned}$$

با

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

داریم:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

این به معنای آن است که تابع  $\Gamma$  تعمیم نگاشت فاکتوریل  $(n-1)!$  از  $n$  از  $\mathbb{N}$  به  $(0, \infty)$  است.

معادله (۲.۵) اشاره دارد به

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

که سمت راست معادله می‌تواند به  $(0, \infty) \cup (-1, 0)$  توسعه پیدا کند. چون

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1,$$

تابع گاما در  $x = 0$  قطب ساده دارد. دوباره با استفاده از رابطه (۲.۵)، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\ &= \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \\ &\vdots \\ &= \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

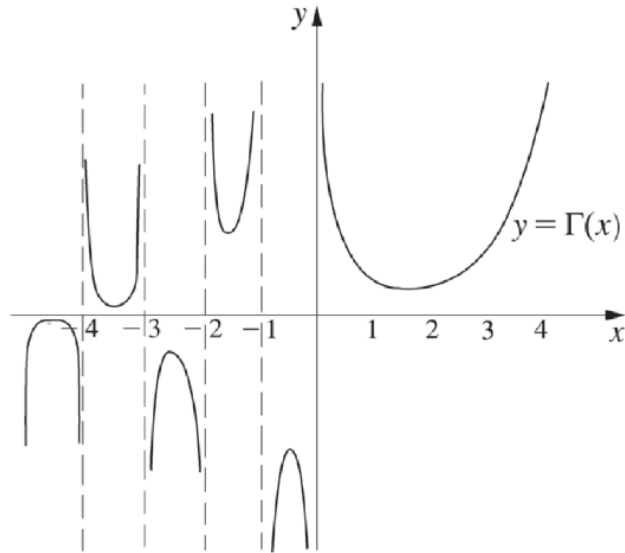
این به ما اجازه می‌دهد که تابع  $\Gamma$  را از  $(0, \infty)$  به  $\mathbb{R}$ ، به جز برای اعداد صحیح  $0, -1, -2, \dots$  که  $\Gamma$  دارای قطب‌های ساده است، گسترش دهیم (شکل ۱.۵ را ببینید).

چون

$$\Gamma(x) > \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \geq \int_1^\infty e^{-t} dt = e^{-1},$$

به‌ازای هر  $x \geq 1$  و  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ؛ همچنین، نتیجه می‌گیریم وقتی  $x \rightarrow \infty$  است،  $\Gamma(x)$  به  $\infty$  میل می‌کند.





شکل ۱.۵: تابع گاما

## تمرین‌ها

۱.۵. ثابت کنید که تابع گاما تعریف شده توسط (۱.۵)، متعلق به  $C^\infty(0, \infty)$  است.

۲.۵. ثابت کنید که  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

۳.۵. ثابت کنید که

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

۴.۵. تابع بتا به صورت زیر تعریف شده است:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0.$$

الف) با استفاده از تبدیل  $u = t/(1-t)$ ، رابطه زیر را به دست آورید:

$$\beta(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du.$$

(ب) به ازای هر  $s > 0$ ، ثابت کنید که

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^{\infty} e^{-st} t^{z-1} dt.$$

(ج) با  $s = u + 1$  و  $z = x + 1$  نشان دهید که

$$\frac{1}{(u+1)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-(u+1)t} t^{x+y-1} dt,$$

آنگاه با استفاده از قسمت (الف) رابطه زیر را به دست آورید:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

۵.۵. ثابت کنید که

$$2^x \frac{\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = \sqrt{\pi}.$$

۶.۵. تابع خطا روی  $\mathbb{R}$  با انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

نمودار  $\operatorname{erf}(x)$  را رسم کنید و ویژگی های زیر از تابع  $\operatorname{erf}$  را ثابت کنید.

(الف)  $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ .

(ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$ .

(ج)  $\operatorname{erf}(x)$  روی  $\mathbb{R}$  تحلیلی است.

## ۲.۵ توابع بسل نوع اول

در معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (3.5)$$

$\nu$  یک پارامتر نامنفی است. همان گونه که در ادامه فصل نشان می‌دهیم، در برخی حالت‌ها شرایطی پیش می‌آید که از متغیرهای جدا از هم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده شود. معادله (۳.۵)، معادله بسل نامیده می‌شود و نشان خواهیم داد که آن مثال دیگری از معادله مقدار ویژه اشتروم-لیوویل است که توابع خاص معین به نام توابع بسل را به همان روشی که چندجمله‌ای‌های متعامد از فصل چهارم به دست آمده بودند، تولید می‌کند. تفاوت اصلی این است که توابع بسل، چندجمله‌ای نیستند و ویژگی تعامدی آنها تا اندازه‌ای متفاوت است.

معادله (۳.۵) دارای یک نقطه منفرد در  $x = 0$  است، بنابراین، نمی‌توانیم جواب را به صورت سری توانی حول این نقطه گسترش دهیم. به جای آن، از روش جورج فربنیوس<sup>۱</sup> (۱۹۱۷-۱۸۴۹ م.) برای ساخت یک جواب برحسب جمله‌های از توان‌های حقیقی  $x$  (نه لزوماً اعداد صحیح) استفاده می‌کنیم. روش بر اساس این فرض است که هر معادله به شکل

$$y'' + \frac{q(x)}{x}y' + \frac{r(x)}{x^2}y = 0,$$

که توابع  $q$  و  $r$  در  $x = 0$  تحلیلی هستند، یک جواب به شکل

$$y(x) = x^t \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^t (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots), \quad (4.5)$$

<sup>1</sup>Georg Frobenius

دارد که  $t$  یک عدد حقیقی (یا مختلط) و ثابت  $c$  غیرصفر است [۱۲].  
واضح است که همیشه  $t$  می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که  $c \neq 0$ . عبارت (۴.۵) وقتی که  $t$  یک عدد صحیح نامنفی است، به یک سری توانی تبدیل می‌شود.

با جای‌گذاری عبارت (۴.۵) در معادله (۳.۵)، داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)(k+t-1)c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+t)c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t+1} - \nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t} = 0,$$

یا

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^2 c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t+1} - \nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t} = 0.$$

با گردآوری ضرایب توان‌های  $x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, \dots, x^{t+j}$ ، معادله‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$t^2 c_0 - \nu^2 c_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$(t+1)^2 c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \quad (6.5)$$

$$(t+2)^2 c_2 - \nu^2 c_2 + c_1 = 0$$

⋮

$$(t+j)^2 c_j - \nu^2 c_j + c_{j-1} = 0. \quad (7.5)$$

از معادله (۵.۵) نتیجه می‌گیریم که  $t = \pm \nu$ .

فرض کنید که با  $t = \nu$  شروع کنیم. معادله (۶.۵) برابر است با

$$(\nu+1)^2 - \nu^2 c_1 = (2\nu+1)c_1 = 0.$$

چون  $1 \geq 2\nu + 1$ ،  $c_1 = 0$ . اکنون معادله (۷.۵) نتیجه می‌دهد:

$$[(\nu + j)^2 - \nu^2]c_j + c_{j-2} = j(j + 2\nu)c_j + c_{j-2} = 0,$$

و بنابراین،

$$c_j = -\frac{1}{j(j + 2\nu)}c_{j-2}. \quad (۸.۵)$$

چون  $c_1 = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همه مقادیر فرد  $j$ ،  $c_j = 0$  است و می‌توانیم فرض کنیم  $j = 2m$ ، که  $m$  یک عدد صحیح مثبت است. رابطه بازگشتی (۸.۵) را به‌شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$c_{2m} = -\frac{1}{2m(2m + 2\nu)}c_{2m-2} = -\frac{1}{2^2 m(\nu + m)}c_{2m-2}.$$

که عبارتهای  $c_2, c_4, c_6, \dots$  برحسب ثابت دلخواه  $c_0$  بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2^2(\nu + 1)}c_0, \\ c_4 &= -\frac{1}{2^2 2(\nu + 2)}c_2 = \frac{1}{2^4 2!(\nu + 1)(\nu + 2)}c_0, \\ c_6 &= -\frac{1}{2^6 3!(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3)}c_0, \\ &\vdots \\ c_{2m} &= \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + m)}c_0. \end{aligned} \quad (۹.۵)$$

جواب حاصل از معادله بسل به‌صورت سری

$$x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m}. \quad (۱۰.۵)$$

است. با انتخاب

$$c_0 = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad (11.5)$$

ضرایب (۹.۵) توسط

$$c_{\nu m} = \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu + m + 1) m!},$$

تعیین می‌شوند. سری حاصل

$$x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu + m + 1) m!} x^{\nu m},$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه اول  $\nu$  نامیده می‌شود و با  $J_\nu(x)$  نشان داده می‌شود. بنابراین،

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu m}, \quad (12.5)$$

و این یک موضوع ساده است که بررسی کنیم سری توانی

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu + m + 1) m!} x^{\nu m}$$

روی  $\mathbb{R}$  به وسیله آزمون نسبت همگرا است. با  $\nu \geq 0$  توان  $x^\nu$  وقتی  $x$  مثبت است

خوش تعریف است؛ از این رو، تابع بسل  $J_\nu(x)$  توسط رابطه (۱۲.۵) روی  $(0, \infty)$  خوش تعریف

است. چون

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0 \\ 0, & \nu > 0, \end{cases}$$

تابع  $J_\nu$  ممکن است به عنوان یک تابع پیوسته روی  $(0, \infty)$  توسط تعریف  $J_\nu(0) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x)$  به‌ازای هر  $\nu \geq 0$  گسترش یابد.

اکنون، اگر  $0 < -\nu = t$  را در رابطه (۴.۵) قرار دهیم و علامت  $\nu$  را در (۱۲.۵)

تغییر دهیم، آنگاه

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{\nu}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - \nu + 1)} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m}, \quad x > 0, \quad (13.5)$$

همچنان جواب معادله بسل است، چون معادله، تحت چنین تغییر علامتی، ثابت است. با این حال لزومی ندارد که در  $x = 0$  کران دار باشد، همان طوری که در قضیه بعدی نشان می دهیم.

قضیه ۱.۲.۵. توابع بسل  $J_{\nu}$  و  $J_{-\nu}$  مستقل خطی هستند، اگر و تنها اگر  $\nu$  عدد صحیح نباشد.

برهان. اگر  $\nu = n \in \mathbb{N}$  باشد، آنگاه

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{\nu}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - n + 1)} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m}.$$

ولی چون به ازای همه  $0 \leq m - n + 1 \leq 0$ ،  $\frac{1}{\Gamma(m-n+1)} = 0$ ، جمله هایی که در آن  $m =$

$0, 1, \dots, n-1$  همگی صفر می شوند، بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{\nu}\right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m - n + 1)} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m} \\ &= \left(\frac{x}{\nu}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)! \Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m + \nu n} \\ &= (-1)^n \left(\frac{x}{\nu}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید  $\nu > 0$  و  $\nu \notin \mathbb{N}$  و فرض کنید:

$$aJ_\nu(x) + bJ_{-\nu}(x) = 0. \quad (14.5)$$

در این معادله، وقتی  $x \rightarrow \infty$  است، داریم،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} J_\nu(x) = 0$ ؛ در حالی که  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |J_{-\nu}| = \infty$ . چون جمله اول در سری (۱۳.۵)، که برابر است با

$$\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu},$$

بر همه جملات دیگر غالب است و به  $\pm\infty$  میل می‌کند، بنابراین، برابری (۱۴.۵) نمی‌تواند روی  $(0, \infty)$  برقرار باشد، مگر اینکه  $b = 0$ ، که همچنین در این حالت  $a = 0$  است.  $\square$

بر اساس این قضیه، نتیجه می‌گیریم که وقتی  $\nu$  یک عدد صحیح نیست، جواب عمومی معادله بسل روی  $(0, \infty)$  با  $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$  تعیین می‌شود. جواب عمومی وقتی  $\nu$  یک عدد صحیح باشد، باید منتظر تعریف تابع بسل نوع دوم در بخش ۳.۵ باشیم. در مثال زیر، نخسین مورد از چندین اتحاد شامل توابع بسل را ثابت می‌کنیم.

### مثال ۲.۲.۵.

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad x > 0, \nu \geq 0. \quad (15.5)$$

برهان.  $x^{-\nu} J_\nu(x)$  یک سری توانی است؛ بنابراین، با دیفرانسیل‌گیری جمله به جمله می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)} x^{\nu+m}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \nu m}{\nu + \nu m m! \Gamma(\nu + m + 1)} x^{\nu m - 1} \\
&= -x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\nu + \nu m + 1 m! \Gamma(\nu + m + \nu)} x^{\nu m + \nu + 1} \\
&= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).
\end{aligned}$$

□

توابع بسل از مرتبه صحیح که به صورت

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m + n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16.5)$$

تعیین می‌شوند روی  $(0, \infty)$  تحلیلی هستند و بسته به اینکه آیا  $n$  زوج یا فرد باشد، توسیع‌های تحلیلی در  $\mathbb{R}$  به عنوان توابع زوج یا فرد دارند. ما پیش از این در مثال ۲.۱۳، مشخص کرده‌ایم که  $J_n$ ، یک مجموعه نامتناهی از صفرهای تنها در  $(0, \infty)$  دارد که در  $\infty$  گرد می‌آید. ما می‌توانیم این‌ها را به صورت دنباله صعودی زیر مرتب کنیم:

$$\xi_{0,1} < \xi_{0,2} < \xi_{0,3} < \dots$$

به طوری که  $\xi_{0,k} \rightarrow \infty$  است، وقتی که  $k \rightarrow \infty$ . با استفاده از استقرای ریاضی، می‌توانیم نشان دهیم که همین مسئله در مورد  $J_n$  به ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$  درست است. فرض کنید که صفرهای  $J_m$ ، به ازای هر عدد صحیح مثبت  $m$ ، به صورت دنباله‌ای صعودی  $(\xi_{mk})$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) در  $(0, \infty)$  است که به  $\infty$  میل می‌کند. تابع  $x^{-m} J_m(x)$  در هر جفت از صفرهای متوالی، مثلاً  $\xi_{mk}$  و  $\xi_{m(k+1)}$  صفر می‌شود، بنابراین، از قضیه رول نتیجه می‌گیریم که حداقل

یک نقطه بین  $\xi_{mk}$  و  $\xi_{mk+1}$  وجود دارد که مشتق  $x^{-m}J_m(x)$  در آن نقطه، صفر می‌شود. با توجه به اتحاد (۱۵.۵)،

$$J_{m+1}(x) = -x^{-m} \frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)],$$

$J_{m+1}(x)$  حداقل یک صفر بین  $\xi_{mk}$  و  $\xi_{mk+1}$  دارد. بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

**قضیه ۳.۲.۵.** به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، معادله  $J_n(x) = 0$  تعداد نامتناهی ریشه‌های مثبت

دارد که دنباله صعودی

$$\xi_{n1} < \xi_{n2} < \xi_{n3} < \dots$$

را تشکیل می‌دهد، به طوری که وقتی  $k \rightarrow \infty$ ،  $\xi_{nk} \rightarrow \infty$ .

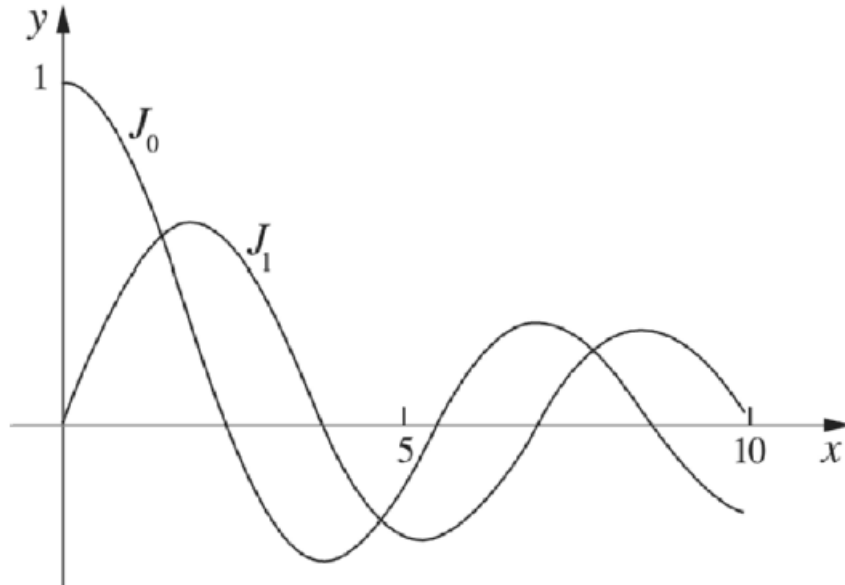
دو تابع اول بسل مرتبه صحیح به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots, \\ J_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1! 2!} + \frac{x^5}{2^5 2! 3!} - \frac{x^7}{2^7 3! 4!} + \dots. \end{aligned}$$

شباهت‌های بین این دو تعمیم از یک طرف و توابع سینوس و کسینوس، کاملاً قابل توجه

است. نمودار  $J_0(x)$  و  $J_1(x)$  در شکل ۲.۵ نیز، به ترتیب بسیاری از خواص  $\sin x$  و  $\cos x$

را مانند رفتار نزدیک  $x = 0$  و محل تقاطع صفرهای آنها را نشان می‌دهد. وقتی که در



شکل ۲.۵: توابع بسل  $J_0$  و  $J_1$ .

رابطه (۱۵.۵)،  $\nu = 0$  را قرار دهیم، رابطه  $J_0'(x) = -J_1(x)$  را که مطابق با رابطه آشنای  $(\cos x)' = -\sin x$  است، به دست می آوریم. ولی، برخلاف وضعیت توابع مثلثاتی، توزیع صفرهای  $J_n$  به طور کلی یکنواخت نیست (با این حال، تمرین ۸.۵ را ببینید) و دامنه تابع با افزایش  $x$  کاهش می یابد (تمرین ۳۲.۵).

در مثال بعدی، ما رابطه مهم دیگری را بین  $J_0$  و  $J_1$  اثبات می کنیم که در ادامه این فصل به آن خواهیم پرداخت.

مثال ۴.۲.۵. به ازای هر  $x > 0$ ,

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x).$$

برهان.

$$\begin{aligned}
 \int_0^x t J_\nu(t) dt &= \int_0^x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^\nu \Gamma(\nu m)} t^{\nu m+1} dt \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{\nu m+2}}{(m!)^\nu (\nu m + 2) \Gamma(\nu m)} \\
 &= x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu m+1} = x J_\nu(x).
 \end{aligned}$$

□

## تمرین‌ها

۷.۵. ثابت کنید که سری توانی که  $x^{-\nu} J_\nu(x)$  را نمایش می‌دهد، به‌ازای هر  $\nu \geq 0$  در  $\mathbb{R}$  همگراست.

۸.۵. ثابت کنید که

$$J_{1/\nu}(x) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/\nu}(x) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \cos x,$$

و این دو تابع را رسم کنید.

۹.۵. با استفاده از اتحاد مثال ۲.۲.۵ ثابت کنید که  $x J'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)$ .

۱۰.۵. با استفاده از تمرین‌های ۸.۵ و ۹.۵ ثابت کنید که

$$J_{\frac{\nu}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

۱۱.۵. اتحاد  $[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$  را ثابت کنید و از آن نتیجه بگیرید که

$$J_{-\frac{\nu}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right).$$

۱۲.۵. با استفاده از اتحادهای مثال ۲.۲.۵ و تمرین ۱۱.۵ نشان دهید که

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{x} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)].$$

۱۳.۵. ثابت کنید:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

۱۴.۵. روابط زیر را به دست آورید.

$$\int_0^x t^\nu J_1(t) dt = \nu x J_1(x) - x^\nu J_0(x) \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^x t^\nu J_\nu(t) dt = 1 - J_\nu(x) - \nu \frac{J_\nu(x)}{x} \quad (\text{ب})$$

۱۵.۵. با استفاده از اتحاد  $J'_1(x) = -J_0(x)$  و  $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$  ثابت کنید:

$$\int_0^\infty t^n J_1(t) dt = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^\nu \int_0^x t^{n-\nu} J_1(t) dt.$$

۱۶-۵. ثابت کنید که رونسکی  $W(x) = W(J_\nu, J_{-\nu})$  که  $\nu \notin \mathbb{N}$  در معادله  $xW' +$

$W = 0$  صدق می‌کند و در نتیجه ثابت کنید که

$$W(x) = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)x}.$$

با استفاده از نتیجه تمرین ۴.۵ (ج) و محاسبه انتگرال عبارت  $\beta(\nu, 1-\nu)$  به وسیله

انتگرال گیری کانتور، می‌توان نشان داد که

$$W(x) = -\frac{2 \sin \nu x}{\pi x},$$

(همچنین، [۸] را ببینید).

### ۳.۵ توابع بسل نوع دوم

با توجه به قضیه ۱.۲.۵، طبیعی است که بپرسیم جواب عمومی معادله بسل وقتی که  $\nu$  یک عدد صحیح است، چگونه است. روش‌های مختلفی وجود دارد که می‌توانیم جواب دوم برای معادله بسل که مستقل از  $J_n$  است (برای مثال، تمرین ۱۷.۵ را ببینید)، تعریف کنیم. رایج‌ترین روش برای تعریف تابع بسل نوع دوم از مرتبه  $\nu$  توسط

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)], & \nu \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

بیان می‌شود که در این رابطه، نکات زیر را ملاحظه می‌کنیم.

الف) برای مقادیر ناصحیح  $\nu$ ،  $Y_\nu$  یک ترکیب خطی از  $J_\nu$  و  $J_{-\nu}$  است. چون  $J_{-\nu}$  مستقل خطی از  $J_\nu$  است.

ب) وقتی که  $\nu = n$  است، تعریف بالا فرم نامشخص  $0/0$  را نشان می‌دهد. به وسیله قانون هویتال و با استفاده از خواص دیفرانسیل پذیری سری‌های توانی،

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \left. \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right|_{\nu=n} - \frac{(-1)^n \partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \log \frac{x}{\nu} + Y \right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{x}{\nu} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (h_m + h_{n+m})}{m!(n+m)!} \left( \frac{x}{\nu} \right)^{\nu m} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{x}{\nu} \right)^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{x}{\nu} \right)^{\nu m}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

که

$$h_0 = 0, \quad h_n = 1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \dots + \frac{1}{\nu^n},$$

و

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (h_m - \log m) = 0,577215\dots$$

که ثابت اویلر نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که آخرین مجموع در عبارت  $Y_n$ ، وقتی  $n = 0$  است، صفر می‌شود و وجود جمله  $\log x J_n(x)$  نشان می‌دهد،  $Y_n$  مستقل خطی از  $J_n$  است. برای جزئیات بیشتر در مورد محاسبات که به نمایش  $Y_n$  در بالا منجر می‌شود، خواننده به [۱۷] مرجع کلاسیک توابع بسل مراجعه کند.

رفتار مجانبی  $Y_n(x)$  وقتی که  $x \rightarrow 0$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

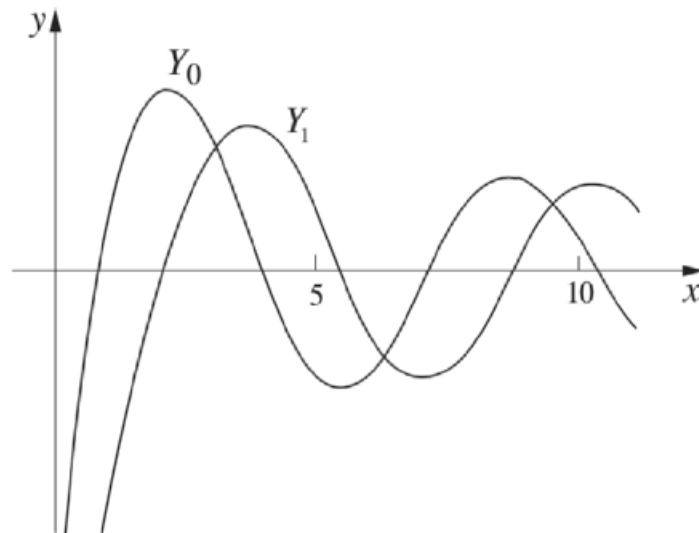
$$Y_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{\nu}{\pi} \log \frac{x}{\nu}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{\nu}\right)^{-n}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (17.5)$$

که  $f(x) \sim g(x)$  وقتی که  $x \rightarrow c$  معنی می‌دهد  $f(x)/g(x) \rightarrow 1$  وقتی که  $x \rightarrow c$ .

بنابراین، در همسایگی  $x = 0$  بی‌کران است. وقتی که  $x \rightarrow c$ ،

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \log x, \quad Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x}, \quad Y_2(x) \sim \frac{4}{\pi} \frac{1}{x^2}, \dots$$

با توجه به قضیه ۳.۲.۵ و قضیه جداسازی اشتروم، نتیجه می‌گیریم که  $Y_n$  یک دنباله نامتناهی از صفرها در  $(0, \infty)$  دارد که با صفرهای  $J_n$  متناوب است.  $Y_1$  و  $Y_2$  در شکل ۳.۵ نشان داده شده است.



شکل ۳.۵: توابع بسل  $Y_0$  و  $Y_1$

### تمرین‌ها

۱۷.۵. نشان دهید که تابع

$$Y_n(x) = J_n(x) \int_c^x \frac{1}{tJ_n'(t)} dt,$$

در معادله بسل صدق می‌کند و مستقل خطی از  $J_n(x)$  است.

۱۸.۵. نشان دهید که رفتار مجانبی  $Y_0$  و  $Y_1$  نزدیک  $x = 0$  به وسیله (۱۷.۵) نشان داده

می‌شود.

۱۹.۵. ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x).$$



۲۰.۵. ثابت کنید که

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}Y_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x).$$

۲۱.۵. ثابت کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$  است.

۲۲.۵. تابع بسل اصلاح شده از نوع اول  $I_{\nu}$  روی  $(0, \infty)$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix), \quad \nu \geq 0,$$

که  $i = \sqrt{-1}$  نشان دهید در معادله

$$x^{\nu} y'' + xy' - (x^{\nu} + \nu^{\nu})y = 0, \quad (18.5)$$

صدق می‌کند.

۲۳.۵. براساس تعریف  $I_{\nu}$  در تمرین ۲۲.۵، نشان دهید که  $I_{\nu}$  یک تابع حقیقی است که

به وسیله سری

$$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

نشان داده می‌شود.

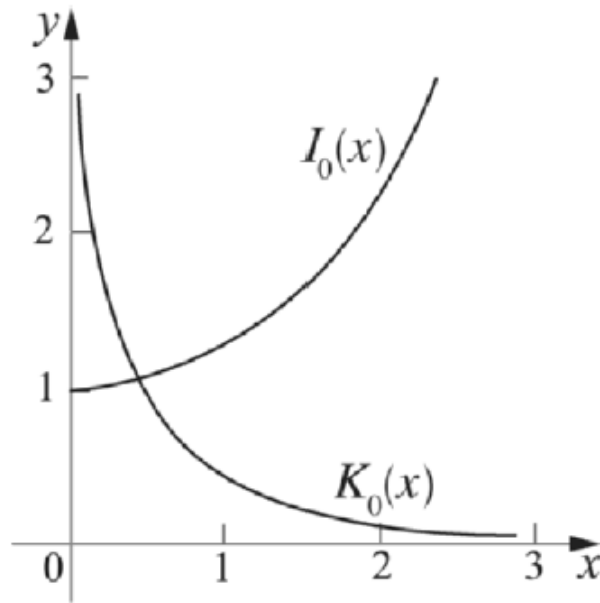
۲۴.۵. ثابت کنید به ازای هر  $x > 0$ ،  $I_{\nu}(x) \neq 0$  و به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $I_{-n}(x) = I_n(x)$  است.

است.

۲۵.۵. نشان دهید که تابع اصلاح شده بسل از نوع دوم

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)]$$

در معادله (۱۸.۵) صدق می‌کند. توابع  $I$  و  $K$  در شکل ۴.۵ نشان داده شده‌اند.

شکل ۴.۵: توابع اصلاح‌شده بسل  $I_0$  و  $K_0$ .

### ۴.۵ شکل‌های صحیح تابع بسل $J_n$

نخست ثابت می‌کنیم که تابع تولیدکننده  $J_n$  به صورت زیر است:

$$e^{x(z^{-1}/z)^{\nu}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n, \quad z \neq 0. \quad (19.5)$$

این تابع را می‌توان با توجه به روابط زیر نتیجه گرفت:

$$e^{xz/\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \left(\frac{x}{\nu}\right)^j,$$

$$e^{-x/\nu z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! x^j} \left(\frac{x}{\nu}\right)^j.$$

این دو سری به‌ازای همه  $x$ ‌های در  $\mathbb{R}$  و  $z \neq 0$ ، به‌طور مطلق همگراست؛ ازاین‌رو، حاصل‌ضرب این دو سری به‌صورت

$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} z^{j-k}$$

است. با قراردادن  $j - k = n$  و یادآوری  $\frac{1}{(k+n)!} = \frac{1}{\Gamma(k+n+1)}$  وقتی که  $k + n < 0$  است، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} e^{x(z-1/z)/2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+n} \right] z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n, \end{aligned}$$

که (۱۹.۵) را اثبات می‌کند. با جای‌گذاری  $z = e^{i\theta}$  داریم:

$$\frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) = i \sin \theta,$$

بنابراین،

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (20.5)$$

تابع  $e^{ix \sin \theta}$  متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است و در شرایط قضیه ۴.۲.۳ صدق می‌کند، بنابراین، سمت راست (۲۰.۵) بسط سری فوریه‌اش را در شکل نمایی نشان می‌دهد و  $J_n(x)$  ضرایب فوریه در بسط هستند. بنابراین،

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - in\theta) d\theta, \quad \text{چون } J_n(x) \text{ حقیقی است} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (21.5)
\end{aligned}$$

که نمایش انتگرال اصلی از  $J_n$  است. فرمول (۲۱.۵) یک کران بالایی به  $J_n$  می‌دهد، به‌ازای همه  $n \in \mathbb{N}$ .

$$|J_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1.$$

این نتیجه را نمی‌توانیم به‌طور مستقیم از تعریف سری استنباط کنیم. همچنین این نتیجه

$$\text{تأیید می‌کند که به‌ازای همه } n \geq 1 \text{، } J_n(\cdot) = 0 \text{ و } Y_n(\cdot) = 1.$$

به معادله (۲۰.۵) برمی‌گردیم و قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله را مساوی

هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}
\cos(x \sin \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta, \\
\sin(x \sin \theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin n\theta.
\end{aligned}$$

چون  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ، داریم:

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos 2m\theta, \quad (22.5)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x) \sin(2m-1)\theta. \quad (23.5)$$

اکنون معادله‌های (۲۲.۵) و (۲۳.۵) به ترتیب، بسط‌های سری فوریه تابع زوج  $\cos(x \sin \theta)$  و تابع فرد  $\sin(x \sin \theta)$  هستند؛ از این رو، به دو جفت فرمول انتگرال‌گیری زیر می‌رسیم:

$$J_{2m}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \cos 2m\theta d\theta, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (24.5)$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin(2m-1)\theta d\theta, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (25.5)$$

### تمرین‌ها

۲۶.۵ نشان دهید که

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin(n\theta - x \sin \theta) d\theta,$$

و سپس با استفاده از استقرا، معادله (۲۰.۵) را ثابت کنید که

$$J_n^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^k \theta \cos(n\theta - x \sin \theta - k\pi/2) d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

۲۷.۵. با استفاده از نتیجه تمرین ۲۶.۵ ثابت کنید که به‌ازای هر  $n, k \in \mathbb{N}$ ،  $|J_n^{(k)}(x)| \leq n$ .

.۱

۲۸.۵. ثابت کنید:

$$J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) = 1 \quad (\text{الف})$$

$$J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(x) = \cos x \quad (\text{ب})$$

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m-1}(x) = \sin x \quad (\text{ج})$$

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) J_{2m-1}(x) = x \quad (\text{د})$$

۲۹.۵. با استفاده از رابطه پارسوال، اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$J_\nu(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) = 1,$$

و مشاهده کنید که نتیجه آن برابر است با  $|J_\nu(x)| \leq 1$  و  $|J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ،  $n \in \mathbb{N}$ .

۳۰.۵. با استفاده از معادله‌های (۲۴.۵) و (۲۵.۵) نتیجه بگیرید که

$$J_{2m}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) \cos 2m\theta d\theta, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \theta) \sin(2m-1)\theta d\theta, \quad m \in \mathbb{N}..$$

۳۱.۵. ثابت کنید که به ازای همه  $x$ ‌های حقیقی،  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$  (نکته: از لم

۲.۲.۳ استفاده کنید).

۳۲.۵. ثابت کنید که به ازای همه  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\lim_{x \rightarrow \infty} J_n(x) = 0$ .

## ۵.۵ ویژگی‌های تعامد

پس از تقسیم بر  $x$ ، معادله بسل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0, \quad (26.5)$$

که عملگر دیفرانسیل

$$L = \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} \right) + x - \frac{\nu^2}{x}$$

با  $p(x) = x$  و  $r(x) = -\frac{\nu^2}{x}$  در شکل استاندارد (۳۳.۲) خودالحاق است. مقایسه با

معادله (۳۴.۲) نشان می‌دهد که  $\rho(x) = x$  تابع وزن است، ولی پارامتر مقدار ویژه به طور

صریح در معادله (۲۶.۵) ظاهر نمی‌شود. بنابراین، یک پارامتر  $\mu$  را از طریق تغییر متغیرهای زیر معرفی می‌کنیم:

$$x \rightarrow \mu x, \quad y(x) \rightarrow y(\mu x) = u(x).$$

با دیفرانسیل‌گیری نسبت به  $x$ ، داریم:

$$u'(x) = \mu y'(\mu x)$$

$$u''(x) = \mu^2 y''(\mu x).$$

تحت این تبدیل، معادله (۲۶.۵) شکل زیر را اختیار می‌کند:

$$x u'' + u' + \left(\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) u = 0, \quad (27.5)$$

که در اینجا پارامتر مقدار ویژه  $\lambda = \mu^2$  است. معادله‌های (۲۶.۵) و (۲۷.۵) به شرط اینکه  $\mu \neq 0$  هم‌ارز هستند.

اگر معادله (۲۷.۵) روی بازه  $(a, b)$ ، که  $0 \leq a < b < \infty$  معین باشد، آنگاه شرایط مرزی جداشده همگن

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0,$$

را برای به‌دست آوردن مسئله مقدار ویژه اشتروم لیوویل منظم به کار می‌بریم. توابع ویژه آنگاه به‌صورت

$$c_\mu J_\nu(\mu x) + d_\mu Y_\nu(\mu x),$$

هستند که  $\mu$ ،  $c_\mu$  و  $d_\mu$  به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در شرایط مرزی صدق کنند. جزئیات به‌طور کلی خسته‌کننده هستند و با در نظر گرفتن  $a = 0$  کار را ساده می‌کنیم. بنابراین، فرض کنید که معادله (۲۷.۵) در فاصله  $(0, b)$  معین باشد. چون  $p(0) = 0$  است، هیچ شرط مرزی در  $x = 0$  مورد نیاز نیست، به‌جز اینکه  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)$  موجود باشد. در  $x = b$  داریم:

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \quad (28.5)$$

هر دو معادله‌های (۲۷.۵) و (۲۸.۵)، یک مسئله مقدار ویژه منفرد اشتروم لیوویل را ایجاد می‌کنند و بر اساس یک تعمیم نظریه توسعه‌یافته در فصل دوم، یک مجموعه متعامد از جواب‌ها که در  $L_x^2(0, b)$  کامل است، دارند. برای سادگی،  $\nu$  را به اعداد صحیح نامنفی محدود می‌کنیم. این به ما اجازه می‌دهد بدون توجه به جزئیات غیرضروری، به ویژگی‌های اصلی نظریه بپردازیم. فرض  $\nu = n \in \mathbb{N}$  نیز از نظر دیدگاه کاربردهای فیزیکی بسیار مفید است. جواب کلی معادله (۲۷.۵) به‌صورت زیر داده شده است:

$$u(x) = c_n J_n(\mu x) + d_n Y_n(\mu x).$$

شرط اینکه  $u(x)$  در  $x = 0$  حد داشته باشد، باعث می‌شود ضریب  $Y_n$  صفر شود و  $J_n(\mu x)$  تنها جواب قابل قبول معادله است.

فرض کنید که با حالت‌های خاصی از معادله (۲۸.۵)، مثلاً وقتی  $\beta_2 = 0$  است، به

این معنا که،

$$u(b) = 0. \quad (29.5)$$



شروع کنیم؛ با به‌کارگیری این شرط برای جواب  $J_n(\mu x)$ ، داریم:

$$J_n(\mu b) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (30.5)$$

ما پیش‌تر در قضیه ۳.۲.۵ مشخص کرده‌ایم که به‌ازای هر  $n$ ، ریشه‌های معادله (۳۰.۵) در  $(0, \infty)$  یک دنباله نامتناهی صعودی را که به بی‌نهایت میل می‌کند، تشکیل می‌دهد:

$$\xi_{n1} < \xi_{n2} < \xi_{n3} < \dots$$

جواب‌های معادله (۳۰.۵) به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\mu_k b = \xi_{nk},$$

و مقادیر ویژه معادله (۲۷.۵) به‌صورت زیر هستند:

$$\lambda_k = \mu_k^2 = \left(\frac{\xi_{nk}}{b}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

توجه کنید که اولین صفر  $\xi_{n0} = 0$  از تابع  $J_n$ ، برای  $n \geq 1$ ، یک مقدار ویژه را تعیین نمی‌کند، چون جواب متناظر برای همه  $n \in \mathbb{N}$  هست،

$$J_n(\mu \cdot x) = J_n(0) = 0$$

که یک تابع ویژه نیست. دنباله مقادیر ویژه دستگاہ (۲۷.۵) و (۲۸.۵) به‌صورت زیر است:

$$0 < \lambda_1 = \mu_1^2 < \lambda_2 = \mu_2^2 < \lambda_3 = \mu_3^2 < \dots,$$

و دنباله توابع ویژه متناظر آنها به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،

$$J_n(\mu_1 x), J_n(\mu_2 x), J_n(\mu_3 x), \dots$$

است، دنباله  $(J_n(\mu_k x) : k \in \mathbb{N})$  در  $L_x^\nu(\cdot, b)$  لزوماً متعامد و کامل است. به بیان دیگر، به ازای هر  $j \neq k$

$$\begin{aligned} \langle J_n(\mu_j x), J_n(\mu_k x) \rangle_x &= \int_{\cdot}^b J_n(\mu_j x) J_n(\mu_k x) x dx \quad (31.5) \\ &= 0, \end{aligned}$$

و به ازای هر  $f \in L_x^\nu(\cdot, b)$  و هر  $n \in \mathbb{N}$ ، می‌توانیم  $f$  را توسط سری فوریه بسل به صورت زیر نمایش دهیم:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f(x), J_n(\mu_k x) \rangle_x}{\|J_n(\mu_k x)\|_x^\nu} J_n(\mu_k x). \quad (32.5)$$

تساوی اخیر در  $L_x^\nu(\cdot, b)$  برقرار است. همچنین، اگر  $f$  روی  $(\cdot, b)$  قطعه‌به‌قطعه هموار باشد، معادله (32.5) همچنین نقطه‌به‌نقطه برقرار است، به شرط آنکه  $f(x)$  در نقاط ناپیوستگی به صورت  $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$  تعریف شود.

بررسی رابطه تعامد (31.5) با محاسبه مستقیم، محاسبه ساده‌ای نیست، ولی می‌توانیم

$\|J_n(\alpha_k x)\|$  را تعیین کنیم. با ضرب معادله (27.5) در  $\nu x u'$  داریم:

$$\nu x u'(x u')' + (\mu^\nu x^\nu - \nu^\nu) \nu u u' = 0,$$

$$[(x u')^\nu]' + (\mu^\nu x^\nu - \nu^\nu)(u^\nu)' = 0.$$

با انتگرال‌گیری از آخرین معادله روی  $(\cdot, b)$  داریم:

$$(x u')^\nu|_{\cdot}^b + \mu^\nu \left[ x^\nu u^\nu|_{\cdot}^b - \nu \int_{\cdot}^b x u^\nu dx \right] - \nu^\nu u^\nu|_{\cdot}^b = 0,$$

$$\Rightarrow \|u\|_x^\nu = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\mu^\nu}} [(\mu x u)^\nu + (x u')^\nu - \nu^\nu u^\nu] \Big|_0^b.$$

برای  $\nu = n \in \mathbb{N}$ ،  $u(x) = J_n(\mu x)$  و  $u'(x) = \mu J_n'(\mu x)$ ،  $\mu > 0$  داریم:

$$\begin{aligned} \|J_n(\mu x)\|_x^\nu &= \int_0^b J_n^\nu(\mu x) x dx \\ &= \frac{1}{\sqrt[\nu]{\mu^\nu}} [(\mu^\nu x^\nu - n^\nu) J_n^\nu(\mu x) + \mu^\nu x^\nu J_n'^\nu(\mu x)] \Big|_0^b. \end{aligned}$$

چون به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $n^\nu J_n(0) = 0$ ، در نتیجه

$$\|J_n(\mu x)\|_x^\nu = \frac{b^\nu}{\sqrt[\nu]{\mu^\nu}} [J_n'(\mu b)]^\nu + \frac{\mu^\nu b^\nu - n^\nu}{\sqrt[\nu]{\mu^\nu}} J_n^\nu(\mu b). \quad (33.5)$$

وقتی که  $\mu = \mu_k$  است، جمله آخر، توسط (30.5) و

$$\|J_n(\mu_k x)\|_x^\nu = \frac{b^\nu}{\sqrt[\nu]{\mu_k^\nu}} [J_n'(\mu_k b)]^\nu,$$

حذف می‌شود. با استفاده از نتیجه تمرین 9.5،

$$J_n'(\mu_k b) = \frac{1}{\mu_k b} [n J_n(\mu_k b) - \mu_k b J_{n+1}(\mu_k b)] = -J_{n+1}(\mu_k b),$$

و سرانجام به دست می‌آوریم:

$$\|J_n(\mu_k x)\|_x^\nu = \frac{b^\nu}{\sqrt[\nu]{\mu_k^\nu}} J_{n+1}^\nu(\mu_k b). \quad (34.5)$$

مثال 1.5.5. برای گسترش تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

برحسب سری فوریه بسط، تحت شرط  $J_0(\mu_k) = 0$ ، نخست ضرایب را در سری تعیین می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \langle f(x), J_0(\mu_k x) \rangle_x &= \int_0^4 f(x) J_0(\mu_k x) x dx \\ &= \int_0^2 J_0(\mu_k x) x dx \\ &= \frac{1}{\mu_k} \int_0^{2\mu_k} J_0(y) y dy \\ &= \frac{2}{\mu_k} J_1(2\mu_k), \end{aligned}$$

که با استفاده از نتیجه مثال ۴.۲.۵ در آخرین تساوی،  $2\mu_k$  صفرهای  $J_0$  می‌شود. از فرمول (۳۴.۵) به دست می‌آوریم:

$$\|J_0(\mu_k x)\|_x^2 = 8 J_1^2(2\mu_k).$$

اکنون، توسط (۳۲.۵)، داریم:

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(2\mu_k)}{\mu_k J_1^2(2\mu_k)} J_0(\mu_k x), \quad 0 < x < 4.$$

مشاهده می‌کنیم که با جایگزینی  $x = 1$  در این معادله، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(2\mu_k) J_0(\mu_k)}{\mu_k J_1^2(2\mu_k)} = 4,$$

چون ۱ نقطه پیوستگی تابع  $f$  است. در نقطه ناپیوستگی  $x = 2$ ، داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(2\mu_k) J_0(2\mu_k)}{\mu_k J_1^2(2\mu_k)} = 4 \frac{f(2^+) + f(2^-)}{2} = 2.$$

شرط کلی تر (۲۸.۵) یعنی،

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

در اصل می‌تواند با روشی مشابه به کار رود، اگرچه نیاز به کار بیشتری دارد. اگر  $\beta_1 \neq 0$  و  $\beta_2 \neq 0$  باشد، بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم  $\beta_2 = 1$ . جواب  $u(x) = J_n(\mu x)$  باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\beta_1 J_n(\mu b) + \beta_2 J'_n(\mu b) = 0. \quad (۳۵.۵)$$

ریشه‌های مثبت این معادله مقادیر ویژه  $\mu_k$  از مسئله را مشخص می‌کند. توابع ویژه متناظر  $u_k(x) = J_n(\mu_k x)$  هستند. نرم هر تابع ویژه با جایگزینی در (۳۳.۵) مشخص می‌شود

$$\begin{aligned} \|J_n(\mu_k x)\|_x^2 &= \frac{b^2}{2} [J_n(\mu_k b)]^2 + \frac{\mu_k^2 b^2 - n^2}{2\mu_k^2} J_n^2(\mu_k b) \\ &= \frac{1}{2\mu_k^2} [\beta_1^2 b^2 + \mu_k^2 b^2 - n^2] J_n^2(\mu_k b). \end{aligned} \quad (۳۶.۵)$$

به‌طورکلی، حل معادله (۳۵.۵) برای  $\mu$ ، موضوع ساده‌ای نیست. باید یادآوری کنیم که  $J_n$  و  $J'_n$  نمی‌توانند صفر مشترک داشته باشند. از آنجاکه جواب برای مسئله مقدار اولیه معادله بسل منحصر به فرد است، بنابراین، به احتمال زیاد، روش‌های عددی را برای تعیین  $\mu_k$  در نظر خواهیم گرفت. ولی اگر  $\beta_1 = 0$ ، یعنی اگر شرایط مرزی در  $b$  باشد،

$$u'(b) = 0, \quad (۳۷.۵)$$

آن‌گاه مقادیر ویژه توسط ریشه‌های معادله  $\mu J'_n(\mu b) = 0$  مشخص می‌شوند. نخست  $\mu_0 = 0$ ، متناظر با مقدار ویژه  $\lambda_0 = 0$  و تابع ویژه  $u_0(x) = J_0(x)$  است. توجه

داشته باشید که این تابع، معادله (۲۷.۵) نه معادله (۲۶.۵) را حل می‌کند. همان‌طوری که پیش از این یاد شده است، این دو معادله اگر  $\mu = 0$  باشد، معادل نیستند.

برای  $n = 0$ ، مقادیر دیگر  $\mu_k$  باید در  $J'_n(\mu_k b) = 0$  یا به‌طور معادل،  $J_1(\mu_k b) = 0$

صدق کند. بنابراین، دنباله

$$\mu_k = \xi_{1k}/b, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

که  $\xi_{1k}$  ریشه‌های مثبت  $J_1$  هستند. در نتیجه، مقادیر ویژه باقی‌مانده از مسئله،

$$\lambda_k = \frac{\xi_{1k}^2}{b^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

متناظر با توابع ویژه زیر هستند:

$$u_k(x) = J_1(\mu_k x), \quad k \in \mathbb{N},$$

تحت شرط مرزی (۳۷.۵)، اگر  $n$  عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه صفر یک مقدار ویژه

نیست و مقادیر ویژه  $\lambda_k = \mu_k^2$  را با حل

$$J'_n(\mu_k b) = 0$$

به‌دست می‌آوریم. توابع ویژه متناظر به‌صورت  $u_k(x) = J_n(\mu_k x)$  هستند. در هر صورت،

چه  $n$  صفر یا مثبت باشد، نرم  $J_n$  از فرمول (۳۶.۵) با  $\beta_1 = 0$  محاسبه می‌شود.

مثال ۲.۵.۵. در  $\mathbb{R}^2$  مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  با مختصات دکارتی  $(x, y, z)$  توسط

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

که  $0 \leq r < \infty$ ،  $-\pi < \theta \leq \pi$  مشخص می‌شود. عملگر لاپلاس در مختصات استوانه‌ای

به صورت زیر است:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

ناحیه استوانه‌ای

$$\Omega = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r < b, -\pi < \theta \leq \pi, 0 < z < h\},$$

داده شده است. ما در جست‌وجوی یک تابع پتانسیل  $u$  که در معادله لاپلاس

$$\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

در  $\Omega$ ، صدق می‌کند، هستیم و مقادیر زیر را روی مرز  $\Omega$  فرض می‌کنیم:

$$u(r, \theta, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq b, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

$$u(b, \theta, z) = 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$u(r, \theta, h) = f(r), \quad 0 \leq r \leq b, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

این به مسئله دیریکله در  $\Omega$  معروف است.

مسئله دیریکله، کلی برای تعیین تابع  $u$  در دامنه  $\Omega$  که در معادله لاپلاس  $\Delta u = 0$  در

$\Omega$  و  $u = f$  روی مرز  $\partial\Omega$  صدق می‌کند، است که  $f$  یک تابع معین تعریف شده روی  $\partial\Omega$

است. وقتی  $\partial\Omega$  و  $f$  در شرایط منظم مشخص صدق می‌کنند، مسئله در  $C^1(\Omega)$  جواب

یکتا دارد [۱۳] را ببینید).

### جواب

چون  $u$  روی مرز مستقل از  $\theta$  است، به وسیله تقارن می‌توانیم فرض کنیم که داخل  $\Omega$  نیز مستقل از  $\theta$  است. با استفاده از متغیرهای جدا از هم، فرض کنید:

$$u(r, z) = v(r)w(z), \quad 0 \leq r \leq b,$$

و با جایگزینی آن در معادله لاپلاس به دست می‌آوریم:

$$v''(r)w(z) + r^{-1}v'(r)w(z) + v(r)w''(z) = 0.$$

این به دو معادله زیر منجر می‌شود:

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + \mu^2 r^2 v(r) = 0, \quad (38.5)$$

$$w''(z) - \mu^2 w(z) = 0, \quad (39.5)$$

که ثابت جداسازی  $-\mu^2$  فرض شده است. معادله (38.5) معادله بسل با  $\nu = 0$  است که جواب پیوسته آن در  $0 \leq r \leq b$ ،  $J_0(\mu r)$  است. تحت شرط مرزی  $v(b) = 0$ ، توابع ویژه  $J_0(\mu_k r)$  متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_k = \mu_k^2 = (\xi_{0,k}/b)^2$  هستند. مانند قبل،  $\xi_{0,1}, \xi_{0,2}, \xi_{0,3}, \dots$  ریشه‌های مثبت  $J_0$  هستند.

توابع ویژه متناظر معادله (39.5) تحت شرط  $w(0) = 0$ ،  $\sinh(\mu_k z)$  هستند؛

ازاین‌رو، دنباله توابع ویژه مسئله اصلی به صورت زیر است:

$$u_k(r, z) = J_0(\mu_k r) \sinh(\mu_k z), \quad k \in \mathbb{N}.$$



پیش از به کارگیری شرط مرزی ناهمگن در  $z = h$ ، جواب کلی معادله را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(r, z).$$

اکنون، شرط  $u(r, h) = f(r)$  نتیجه می‌دهد:

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(\mu_k h) J_0(\mu_k r), \quad (40.5)$$

که بسط سری فوریه-بسل تابع  $f$  است، با فرض اینکه  $f$  روی  $(0, b)$  قطعه‌به‌قطعه هموار است. ضرایب در بسط به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$c_k \sinh(\mu_k h) = \frac{1}{\|J_0(\mu_k r)\|_r} \int_0^b f(r) J_0(\mu_k r) r dr,$$

و این به طور کامل  $c_k$  ها را به ازای همه اعداد صحیح مثبت  $k$  معین می‌کند. توابع بسل معمولاً در جواب معادله لاپلاس هنگامی که مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود ظاهر می‌شوند از این رو، بیشتر به آنها توابع استوانه‌ای گفته می‌شود.

### تمرین‌ها

۳۳.۵. برای هریک از توابع زیر، بسط سری فوریه-بسل  $\sum c_k J_0(\mu_k x)$  را روی  $[0, b]$  مشخص کنید که  $\mu_k$  ریشه‌های مثبت معادله  $J_0(\mu b) = 0$  هستند.

الف)  $f(x) = 1$

ب)  $f(x) = x^2$

$$f(x) = x \text{ (پ)}$$

$$f(x) = b^x - x^x \text{ (ت)}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < b/2 \\ 1/2, & x = b/2 \\ 0, & b/2 < x < b. \end{cases} \text{ (ث)}$$

۳۴.۵. تابع  $f(x) = 1$  را روی  $[0, 1]$  برحسب  $J_n(\mu_k x)$  گسترش دهید که  $\mu_k$  ریشه‌های

نامنفی  $J'_n$  هستند.

۳۵.۵. تابع  $f(x) = x$  را روی  $[0, 1]$  برحسب  $J_1(\mu_k x)$  گسترش دهید که  $\mu_k$  ریشه‌های

مثبت  $J_1$  هستند.

۳۶.۵. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ،  $f(x) = x^n$  را روی  $[0, 1]$  برحسب  $J_n(\mu_k x)$

گسترش دهید که  $\mu_k$  ریشه‌های مثبت  $J'_n$  هستند.

۳۷.۵. ضرایب سری  $\sum c_k J_1(\mu_k x)$  را که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

روی  $[0, 2]$  نمایش می‌دهد، مشخص کنید که  $\mu_k$  ریشه‌های مثبت  $J'_1(2\mu)$  هستند. آیا

نمایش روی  $[0, 2]$  نقطه‌به‌نقطه است؟

۳۸.۵. نشان دهید که  $0$  یک مقدار ویژه معادله بسل (۲۷.۵) با شرط مرزی (۲۸.۵) است،

اگر و تنها اگر  $\beta_1/\beta_2 = -\nu/b$ ، و تابع ویژه متناظر  $x^\nu$  هست که  $\nu > 0$ .

۳۹.۵. معادله گرما روی صفحه هموار مستدیر در مختصات قطبی  $(r, \theta)$  به‌صورت زیر

است:

$$u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}).$$

فرض کنید که دمای  $u = u(r, t)$  به  $\theta$  بستگی ندارد و  $0 \leq r < 1$  است. اگر لبه صفحه در دمای صفر به ازای هر  $t > 0$  حفظ شده باشد، با استفاده از متغیرهای جدا از هم نشان دهید که به ازای هر  $r \in [0, 1)$ ، دما روی صفحه توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n^2 kt} J_0(\mu_n r) \quad t > 0, \quad (41.5)$$

که  $\mu_n$  ریشه‌های مثبت  $J_0$  هستند.

۴۰.۵. اگر دمای اولیه روی صفحه در تمرین ۳۹.۵،  $u(r, 0) = f(r)$  باشد، ثابت کنید که ضرایب فوریه- بسل در (۴۱.۵) توسط رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(\mu_n)} \int_0^1 f(r) J_0(\mu_n r) r dr.$$

۴۱.۵. یک پوسته مستدیر کشسان نازک به طور مورب بر حسب معادله موج

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r < R, t > 0,$$

نوسان می‌یابد. اگر شرط مرزی به ازای همه  $t > 0$ ،  $u(R, t) = 0$  باشد و شرایط اولیه

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r), \quad 0 \leq r < R,$$

باشد، شکل جواب کران‌دار  $u(r, t)$  را بر حسب  $J_n$  به ازای هر  $r \in [0, R)$ ،  $t > 0$  مشخص کنید.

## فصل ۶

# تبدیل فوریه

موضوع اصلی فصل‌های گذشته، نظریهٔ اشتروم-لیوویل بود. سه فصل اخیر نشان می‌دهد که چگونه توابع ویژه مسائل مختلف اشتروم-لیوویل به‌عنوان پایه‌ای برای  $L^2$ ، چه از طریق سری فوریه معمولی یا نسخهٔ تعمیم‌یافته‌اش به کار می‌رود. در این فصل، انتگرال فوریه را به‌عنوان یک حالت حدی از سری فوریهٔ کلاسیک معرفی می‌کنیم و شیوهٔ عملکرد آن را با شرایط معین به‌عنوان روشی برای نمایش توابع نامتناوب روی  $\mathbb{R}$  که دیگر سری فوریه کارایی لازم را ندارد، نشان می‌دهیم. در این فصل و فصل بعدی، به گسترش نظریهٔ سری‌های فوریه برای توابع نامتناوب می‌پردازیم.

### ۱.۶ تبدیل فوریه

فرض می‌کنیم  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  یک تابع  $L^2$  است. واضح است حدود آن برای  $(-l, l)$  به‌ازای هر  $l > 0$ ، در  $L^2(-l, l)$  قرار می‌گیرد. روی فاصلهٔ  $(-l, l)$  همیشه می‌توانیم  $f$  را با سری

فوریه زیر نمایش دهیم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad (1.6)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

با قراردادن،  $\Delta\xi = \pi/l$  و  $\xi_n = n\Delta\xi = n\pi/l$  می‌توان معادله‌های (۱.۶) و (۲.۶) را

به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad (3.6)$$

$$C(\xi_n) = 2lc_n = \int_{-l}^l f(x) e^{-i\xi_n x} dx. \quad (4.6)$$

اکنون، اگر فرض کنید  $l \rightarrow \infty$ ، یعنی اگر اجازه دهیم دوره تناوب  $(-l, l)$  به  $\mathbb{R}$  افزایش

یابد به طوری که  $f$  تناوبش را از دست دهد آن‌گاه متغیر گسسته  $\xi_n$  بیشتر به عنوان یک متغیر

حقیقی  $\xi$  رفتار خواهد کرد و فرمول (۴.۶) به

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (5.6)$$

میل خواهد کرد.

از طرف دیگر، سمت راست رابطه (۳.۶)، بسیار شبیه یک مجموع ریمان است که در حد

وقتی  $l \rightarrow \infty$  است، به انتگرال

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (6.6)$$

نزدیک می‌شود. بنابراین، ضرایب فوریه  $c_n$  به تابع  $c(\xi)$  تبدیل می‌شود، تبدیل فوریه  $f$ ، و سری فوریه (۱.۶) که نمایانگر  $f$  روی  $(-l, l)$  است، با انتگرال فوریه (۶.۶) جایگزین می‌شوند که احتمالاً تابع  $f$  را روی  $(-\infty, \infty)$  نشان می‌دهند.

روند توصیف‌شده در بالا، قصد ندارد که درستی فرمول‌های (۵.۶) و (۶.۶) را اثبات کند، حتی انتگرال در (۵.۶) ممکن است وجود داشته باشد. این به معنای استدلال محتمل برای ایجاد انگیزه در تعریف تبدیل فوریه (۵.۶) است که می‌تواند برای نمایش تابع (نامتناوب)  $f$  توسط انتگرال (۶.۶) استفاده شود، به همان شیوه که در فصل سوم برای نمایش توابع دوره‌ای مورد استفاده قرار گرفت.

برای هر فاصله حقیقی  $I$ ، از نماد  $L^1(I)$  برای نشان دادن مجموعه توابع  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  استفاده می‌کنیم، به طوری که

$$\int_I |f(x)| dx < \infty.$$

بنابراین، اگر  $I$  یک بازه کران‌دار باشد، هر تابع انتگرال‌پذیر روی  $I$  و به‌ویژه هر تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته، به  $L^1(I)$  تعلق دارد. افزون بر این،

$$x^\alpha \in L^1(0, 1) \Leftrightarrow \alpha > -1,$$

$$x^\alpha \in L^1(1, \infty) \Leftrightarrow \alpha < -1.$$

اگر  $I$  کران‌دار نباشد، یک تابع مانند  $\sin x/x$  روی  $(0, \infty)$  (تمرین ۴۴.۱ را ببینید)، ممکن است بدون آنکه به  $L^1(I)$  تعلق داشته باشد، انتگرال‌پذیر باشد (در مفهوم ناسره). به همین دلیل، به منظور جلوگیری از سردرگمی، وقتی که  $I$  بی‌کران است، به تابع  $L^1(I)$  به‌عنوان توابع

مطلقاً انتگرال پذیر روی  $I$  اشاره می‌کنیم. همان‌طور که با  $L^1(I)$ ، این یک مسئله ساده است که بررسی کنیم  $L^1(I)$  نیز یک فضای خطی است.

تعریف ۱.۱.۶. به‌ازای هر  $f \in L^1(I)$ ، تبدیل فوریه  $f$  به‌صورت تابع  $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  تعریف شد. با انتگرال ناسره،

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (۷.۶)$$

را تعریف می‌کنیم. همچنین، از نماد  $F(f)$  به جای  $\widehat{f}$  برای نشان دادن تبدیل فوریه  $f$  استفاده می‌کنیم.

چون  $|e^{i\xi x}| = 1$  است، به وضوح داریم:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

یعنی،  $\widehat{f}$  یک تابع کران‌دار روی  $\mathbb{R}$  است. با خطی بودن انتگرال،

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2)$$

به‌ازای هر  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  و  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ ، به این معنی است که تبدیل فوریه  $\widehat{f} : f \rightarrow \widehat{f}$  خطی است.

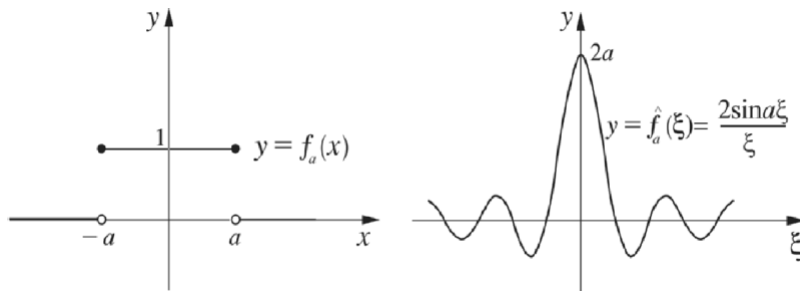
مثال ۲.۱.۶. به‌ازای هر ثابت مثبت  $a$ ، فرض کنید:

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a. \end{cases}$$

سپس

$$\widehat{f}_a(\xi) = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{-i\xi} (e^{-i\xi a} - e^{i\xi a}) = \frac{2}{\xi} \sin a\xi,$$

همان گونه که در شکل (۱.۶) نشان داده شده است. توجه داشته باشید  $\lim_{a \rightarrow \infty} \widehat{f}_a(\xi)$  وجود ندارد و  $f(x) = 1$  در  $L^1(\mathbb{R})$  قرار ندارد.



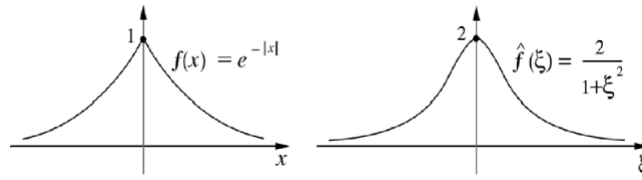
شکل ۱.۶: تابع  $f_a(x)$

مثال ۱.۶.۳. دربارهٔ تابع  $f(x) = e^{-|x|}$  داریم (شکل ۲.۶ را ببینید):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_a(\xi) &= \int_{-\infty}^{\cdot} e^x e^{-i\xi x} dx + \int_{\cdot}^{\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{1 - i\xi} + \frac{1}{1 + i\xi} \\ &= \frac{2}{1 + \xi^2}. \end{aligned}$$

وقتی که  $|f|$  روی  $\mathbb{R}$  انتگرال پذیر است (یعنی، وقتی  $f \in L^1(\mathbb{R})$ )، دیدیم که تبدیل فوریه  $\widehat{f}$  کران دار است، ولی همچنین، می توانیم ثابت کنیم که  $\widehat{f}$  پیوسته است. این نتیجه به یک قضیهٔ مشهور آنالیز حقیقی به نام قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ که در زیر بیان می کنیم، استوار است.





شکل ۲.۶: تابع  $f(x) = e^{-|x|}$

قضیه ۴.۱.۶. فرض کنید  $(f_n : n \in \mathbb{N})$  دنباله‌ای از توابع در  $L^1(I)$  است که  $I$  یک بازه حقیقی است و فرض کنید  $f_n \rightarrow f$  روی  $I$  همگرای نقطه‌ای باشد. اگر یک ثابت مثبت

$g \in L^1(I)$  وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر  $x \in I$

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

آن‌گاه  $f \in L^1(I)$  و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

اثبات این قضیه را می‌توان در [۱] یا [۱۴] پیدا کرد که در آن مفهوم انتگرال‌پذیری لبگ ارائه شده است، ولی وقتی انتگرال‌ها به عنوان انتگرال ریمان تعبیر می‌شوند، به همان اندازه معتبر هستند. توجه داشته باشید که بازه  $I$  متناهی است.

برای اثبات پیوسته بودن  $\hat{f}$ ، فرض کنید  $\xi$  یک عدد حقیقی است و فرض کنید  $(\xi_n)$

دنباله‌ای است که به  $\xi$  همگراست. چون

$$|\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| |f(x)| dx,$$

$$|e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| |f(x)| \leq 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| = 0.$$

قضیه ۴.۱.۶ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi_n) - \widehat{f}(\xi)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}| |f(x)| dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

به این ترتیب، برای مطالعه رفتار  $\widehat{f}(\xi)$  وقتی  $|\xi| \rightarrow \infty$  است، به نتیجه زیر نیاز داریم

که به لم (ریمان-لبگ) معروف است.

لم ۵.۱.۶. فرض می‌کنیم  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار روی  $\mathbb{R}$  است.

(۱) اگر  $[a, b]$  یک فاصله کران‌دار باشد، آنگاه

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\xi x} dx = 0.$$

(۲) اگر  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، آنگاه

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx = 0.$$

برهان. (۱) فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  نقاط ناپیوستگی  $f$  و  $f'$  روی  $(a, b)$  هستند که

به ترتیب قرار گرفته‌اند و فرض کنید  $a = x_0$  و  $b = x_{n+1}$ ، پس داریم:

$$\int_a^b f(x) e^{i\xi x} dx = \sum_{k=0}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) e^{i\xi x} dx.$$

کافی است ثابت کنیم که به ازای هر  $k$ ،

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) e^{i\xi x} dx = 0.$$

با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) e^{i\xi x} dx = \frac{1}{i\xi} f(x) e^{i\xi x} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{1}{i\xi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x) e^{i\xi x} dx,$$

و سمت راست این معادله به وضوح وقتی  $\xi \rightarrow \pm\infty$  است، به صفر میل می کند.

(۲) فرض کنید  $\epsilon$  عدد مثبت باشد. چون  $|f|$  روی  $(-\infty, \infty)$  انتگرال پذیر است پس عدد

مثبتی مانند  $L$  وجود دارد به طوری که

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx - \int_{-L}^L f(x) e^{i\xi x} dx \right| \leq \int_{|x|>L} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{4}.$$

ولی از قسمت (۱)، می دانیم که عدد مثبتی مانند  $K$  وجود دارد؛ به طوری که به ازای هر

$|\xi| > K$  داریم:

$$\left| \int_{-L}^L f(x) e^{i\xi x} dx \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

□ در نتیجه، اگر  $|\xi| > K$  باشد، آنگاه  $\epsilon > \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \right|$  است.

بنابراین، قضیه (۶.۱.۶) را اثبات کرده ایم.

قضیه ۶.۱.۶. به ازای هر  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ، تبدیل فوریه

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

یک تابع پیوسته کران دار روی  $\mathbb{R}$  است. افزون بر این، اگر  $f$  قطعه به قطعه هموار باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \quad (۸.۶)$$

تبصره ۷.۱.۶. ۱. در صورتی که  $e^{i\xi x}$  توسط  $\cos \xi x$  یا  $\sin \xi x$  جایگزین شود، لم ۵.۱.۶ بسیار معتبر است.

۲. لم (ریمان-لبگ) در حقیقت تحت شرط ضعیف تری که  $|f|$  صرفاً انتگرال پذیر است، برقرار است، ولی اثبات آن به کار بیشتر نیاز دارد (برای مثال به [۱۶] مراجعه کنید). در هر صورت، ما به این نتیجه کلی تر نیاز نداریم، زیرا لم ۵.۱.۶ در وضعیت هایی استفاده می شود (مانند اثبات قضیه) که فرض می شود  $f$  قطعه به قطعه هموار است.

۳. با توجه به تبصره بالا، معادله (۸.۶) به ازای هر  $f \in L^1(\mathbb{R})$  بدون فرض قطعه به قطعه هموار بودن برقرار است.

ما در مقدمه این فصل اشاره کردیم که تبدیل فوریه  $\widehat{f}$  که با  $C$  در (۵.۶) نمایش دادیم، نقش ضرایب فوریه تابع متناوب  $f$  را وقتی که تابع، متناوب بودنش را از دست می دهد بازی می کند. از این رو، رفتار مجانبی  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  وقتی که  $\xi \rightarrow \pm\infty$  مطابق با رفتار ضرایب فوریه  $c_n$  وقتی  $n \rightarrow \pm\infty$  است. اگرچه قضیه ۶.۱.۶ برخی از ویژگی های اساسی  $\widehat{f}$  را بیان می کند، ولی هیچ چیز در مورد نقش آن در نمایش  $f$  همان طور که توسط معادله ۶.۱.۶

پیشنهاد شده، مثلاً درستی فرمول زیر، چیزی نمی‌گوید.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (9.6)$$

سمت راست این معادله، انتگرال فوریه  $f$  نامیده می‌شود. این انتگرال ممکن است وجود نداشته باشد، حتی اگر تابع  $\widehat{f}(\xi)$  وقتی  $|\xi| \rightarrow \infty$  به صفر میل کند؛ مگر آنکه با سرعت کافی به صفر میل کند. افزون بر این، حتی اگر انتگرال فوریه وجود داشته باشد، برابری (۹.۶) ممکن است نقطه‌به‌نقطه روی  $\mathbb{R}$  برقرار نباشد. این موضوع بخش بعدی است.

### تمرین‌ها

۱.۶. تبدیل فوریه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{وگرنه} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲.۶. تابع  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  را در نظر بگیرید، ثابت کنید که

(الف) اگر  $I$  کران‌دار باشد و  $f \in L^1(I)$ ، آن‌گاه  $f \in L^1(I)$  است.

(ب) اگر  $f$  کران‌دار باشد و  $f \in L^1(I)$ ، آن‌گاه  $f \in L^1(I)$  است.

۳.۶. فرض کنید  $\phi: I \times J \rightarrow \mathbb{C}$  که  $I$  و  $J$  فاصله‌های حقیقی هستند و فرض کنید که

به‌ازای هر  $x \in I$ ،  $\phi(x, \cdot)$  یک تابع پیوسته روی  $J$  است. اگر  $\phi(\cdot, \xi)$  روی  $I$  به‌ازای هر

$\xi \in J$  انتگرال‌پذیر باشد و تابع مثبت  $g \in L^1(I)$  وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر

$x \in I$  و  $\xi \in J$ ،  $|\phi(x, \xi)| \leq g(x)$ ، با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی ثابت کنید که

تابع  $F(\xi) = \int_I \phi(x, \xi) dx$  روی  $J$  پیوسته است.

۴.۶. با کمک مفروض‌های تمرین ۳.۶، اگر  $\phi(x, \cdot)$  روی  $J$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد، ثابت کنید  $F$  روی  $J$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته است.

۵.۶. اگر تابع  $\phi(x, \cdot)$  در تمرین (۳.۶) روی  $J$  دیفرانسیل‌پذیر باشد و برای بعضی  $h \in L^1(x)$ ،  $|\phi_\xi(x, \cdot)| \leq h(x)$ ، ثابت کنید که  $F$  دیفرانسیل‌پذیر است و مشتق آن  $F'(\xi) = \int_I \phi_\xi(x, \xi) dx$  مساوی است. اگر  $\phi_\xi$  روی  $J$  پیوسته باشد، ثابت کنید که  $F'$  نیز روی  $J$  پیوسته است. راهنمایی: به‌ازای هر  $\xi \in J$ ،  $\psi_n(x, \xi) = (\xi_n - \xi)^{-1} [\phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)]$  برای نتیجه‌گیری،  $|\psi_n(x, \xi)| \leq |h(x)|$  روی  $I \times J$  از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید.

۶.۶. با استفاده از برابری زیر به‌ازای هر  $\xi > 0$ ،

$$\int_0^\infty e^{-\xi x} dx = \frac{1}{\xi},$$

نشان دهید که، به‌ازای هر عدد مثبت  $a$ ،

$$\int_0^\infty x^n e^{-\xi x} dx = \frac{n!}{\xi^{n+1}}, \quad \xi \geq a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

توجه داشته باشید اگر  $\xi = 1$  را در معادله آخر قرار دهیم، به رابطه  $n! = \Gamma(n+1)$  می‌رسیم.

۷.۶. با استفاده از تمرین‌های ۳.۶ و ۵.۶ نتیجه بگیرید که تابع گاما

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\xi-1} dx$$

روی  $[a, b]$  به‌ازای هر  $0 < a < b < \infty$  پیوسته است و مشتق  $n$  ام آن

$$\Gamma^{(n)}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^n}{d\xi^n} (x^{\xi-1}) dx$$

نیز روی  $[a, b]$  پیوسته است. از این نتیجه بگیرید که  $\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$  است.

۸.۶. از لم ۵.۱.۶ برای ارزیابی حدود زیر استفاده کنید که  $D_n$  هسته دیریکله است که در

قسمت (۲.۳) تعریف شد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_n(x) dx \text{ (الف)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} D_n(x) dx \text{ (ب)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/6}^{\pi/4} D_n(x) dx \text{ (ج)}$$

۹.۶. فرض کنید  $f$  و  $g$  روی  $(a, b)$  توابع قطعه‌به‌قطعه هموار باشند و فرض کنید که

$x_1, \dots, x_n$  نقاط ناپیوستگی‌شان هستند. فرمول زیر را با استفاده از انتگرال جزء‌به‌جزء

ثابت کنید.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) - \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{k=1}^{n-1} [f(x_{k+1}^-)g(x_{k+1}^-) - f(x_k^+)g(x_k^+)].$$

## ۲.۶ انتگرال فوریه

نتیجه اصلی این بخش، قضیه ۳.۲.۶ است که فرمول معکوس برای تبدیل فوریه را مشخص

می‌کند. اثبات قضیه وابسته به ارزیابی انتگرال ناسره

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

است که به عنوان انتگرال دیریکله شناخته شده است. برای اینکه نشان دهیم این انتگرال وجود دارد، می نویسیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx. \quad (10.6)$$

چون تابع  $\frac{\sin x}{x}$  روی  $(0, 1]$  پیوسته و کران دار است، که آن در رابطه  $0 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$  صدق می کند، انتگرال نخست از سمت راست (۱۰.۶) وجود دارد. با استفاده از انتگرال جزء به جزء در انتگرال دوم، داریم:

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

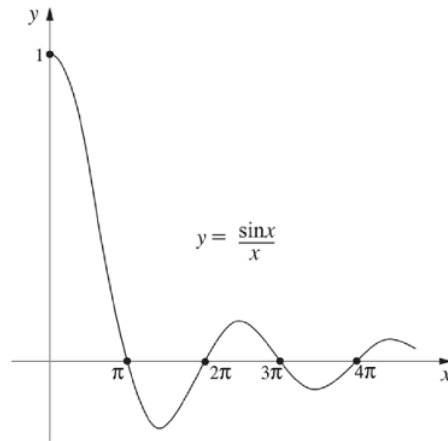
توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} \left| \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right| &\leq \int_1^b \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \\ &\leq \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq 1 - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

می بینیم که  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left( \frac{\cos x}{x^2} \right) dx$  موجود است؛ از این رو، انتگرال  $\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right) dx$  همگراست (برای یک روش جایگزین، تمرین ۴۴.۱ را ببینید). انتگرال  $\frac{\sin x}{x}$  در شکل ۳.۶ رسم شده است.

اکنون که می دانیم انتگرال دیریکله وجود دارد، مقدارش را تعیین می کنیم.



شکل ۳.۶: تابع  $\frac{\sin x}{x}$ 

لم ۱.۲.۶.

$$\int_{.}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}. \quad (11.6)$$

برهان. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. این موضوع ساده‌ای است که بررسی کنیم  $f$  و مشتق آن هر دو روی

$[0, \pi]$  پیوسته هستند. با استفاده از لم ۵.۱.۶، داریم:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{.}^{\pi} f(x) \sin \xi x dx = 0. \quad (12.6)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\int_{.}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{.}^{\pi \xi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi x}{x} dx \\
&= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi x}{\sin \frac{1}{\xi} x} dx.
\end{aligned}$$

توسط (۱۲.۶)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{\pi})x}{\sin \frac{1}{\pi} x} dx.$$

به تعریف هسته دیریکله برمی گردیم:

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx},$$

و با استفاده از لم ۳.۲.۳ می نویسیم:

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{\pi})x}{\sin \frac{1}{\pi} x}.$$

ما با استفاده از معادله (۱۷.۳) نتیجه می گیریم که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \int_0^{\pi} D_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

اگرچه تابع  $\frac{\sin x}{x}$  نسبت به هر دوی  $x > 0$  و  $\xi \in \mathbb{R}$  پیوسته است، تابع تعریف شده

توسط انتگرال ناسره

$$K(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

در  $\xi = 0$  برای

$$k(\xi) = \begin{cases} \pi/2 & \xi > 0 \\ 0 & \xi = 0 \\ -\pi/2 & \xi < 0 \end{cases}$$

پیوسته نیست.

این به معنای آن است که تابع  $|\sin \xi x/x|$  توسط تابعی در  $L^1(0, \infty)$  تحت تسلط (کران دار) نیست، که به وضوح از این واقعیت ناشی می شود که  $|\sin \xi x/x|$  روی  $(0, \infty)$  انتگرال پذیر نیست (تمرین ۴۴.۱ را ببینید). وضعیتی که ما در اینجا داریم، مشابه همگرایی سری فوریه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\xi}{n}$$

به یک تابع ناپیوسته است، زیرا همگرایی آن یکنواخت نیست. براساس این مقایسه، گفته می شود انتگرال ناسره

$$F(\xi) = \int_a^{\infty} \phi(x, \xi) dx$$

روی بازه  $I$  به طور یکنواخت همگرا می شود اگر به ازای هر  $\epsilon > 0$  مفروض، عدد  $N > a$  وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر  $\xi \in I$ ، داریم:

$$b > N \Rightarrow \left| F(\xi) - \int_a^b \phi(x, \xi) dx \right| = \left| \int_b^{\infty} \phi(x, \xi) dx \right| < \epsilon.$$

عدد  $N$  به  $\epsilon$  بستگی دارد و مستقل از  $\xi$  است.

برابر با آزمون  $M$  - وایراشتراس برای همگرایی یکنواخت سری، آزمون زیر را برای همگرایی یکنواخت انتگرال های ناسره داریم. اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

لم ۲.۲.۶. فرض کنید  $\phi : [a, \infty) \times I \rightarrow \mathbb{C}$  و فرض کنید که تابع  $g \in L^1(a, \infty)$  وجود دارد، به طوری که به ازای هر  $\xi$  در فاصله  $I$ ،  $|\phi(x, \xi)| \leq g(x)$ . در این صورت، انتگرال  $\int_a^\infty \phi(x, \xi) dx$  روی  $I$  به طور یکنواخت همگراست.

اگر تابع  $\phi(x, \xi)$  در شرایط لم ۲.۲.۶ با  $I = [\alpha, \beta]$  صدق کند و افزون بر این، اگر

به ازای هر  $x \in [0, \infty)$  روی  $[\alpha, \beta]$  پیوسته باشد، آنگاه تابع

$$F(\xi) = \int_a^\infty \phi(x, \xi) dx$$

نیز روی  $[\alpha, \beta]$  پیوسته است (تمرین ۳.۶) و داریم:

$$\int_\alpha^\beta F(\xi) d\xi = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta \phi(x, \xi) d\xi dx. \quad (13.6)$$

این از این واقعیت نتیجه می شود که وقتی  $b \rightarrow \infty$  همگرایی یکنواخت

$$\int_a^b \phi(x, \xi) dx \rightarrow F(\xi)$$

ایجاب می کند که به ازای هر  $\epsilon > 0$ ،  $N > 0$  وجود دارد، به طوری که

$$\begin{aligned} b \geq N &\Rightarrow \left| F(\xi) - \int_a^b \phi(x, \xi) dx \right| \leq \int_b^\infty g(x) dx < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta F(\xi) d\xi - \int_a^b \int_\alpha^\beta \phi(x, \xi) d\xi dx \right| \\ &= \left| \int_\alpha^\beta F(\xi) d\xi - \int_\alpha^\beta \int_a^b \phi(x, \xi) dx d\xi \right| \leq \epsilon(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

به بیان دیگر، تحت مفروض های لم ۲.۲.۶، می توانیم ترتیب انتگرال گیری را در انتگرال

دوگانه زیر تغییر دهیم:

$$\int_a^\infty \int_\alpha^\beta \phi(x, \xi) d\xi dx = \int_\alpha^\beta \int_a^\infty \phi(x, \xi) dx d\xi.$$

این برابری وقتی  $\beta \rightarrow \infty$  به شرط آنکه  $F$  روی  $[\alpha, \infty]$  انتگرال پذیر است، معتبر باقی می ماند.

در مقایسه با سری فوریه با نتیجه گیری منطقی آن، ما باید انتظار داشته باشیم که بتوانیم  $L^1$  تابع  $f$  را تنها از شناخت تبدیل  $\hat{f}$  بازسازی کنیم؛ به همان ترتیبی که یک تابع متناوب به وسیله ضرایب فوریه اش تعیین می شود. (طبق قضیه ۴.۲.۳)، براساس تبصره ۵.۲.۳ و معادله (۶.۶) می نویسیم:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

با فرض اینکه  $x$  یک نقطه پیوستگی  $f$  است، ما از حالت مشخص شده خیلی دور نمی شویم. تنها مسئله این است که اگرچه  $|f|$  پیوسته و کران دار است، ممکن است روی  $(-\infty, \infty)$  انتگرال پذیر نباشد، به طوری که انتگرال بالا ممکن است همگرا نباشد. برخی از رفتارها، تابع میرا را معرفی می کنند، مانند  $e^{-\epsilon^2 \xi^2 / 2}$ . در تابع زیر انتگرال باعث همگرایی می شود، و سپس حد انتگرال حاصل را وقتی  $\epsilon \rightarrow 0$  است، در نظر بگیرید. اینجا یک تابع برشی معرفی می کنیم که پیش از این توسط نمایش سری فوریه

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N C_n e^{inx}, \quad (14.6)$$

پیشنهاد شده است و در تبصره ۴.۲.۶ توضیح داده شده است.

مطابق قضیه ۴.۲.۳ برای سری فوریه، قضیه اساسی زیر را برای نمایش تابع  $L^1$  توسط

انتگرال فوریه داریم.

قضیه ۳.۲.۶. فرض کنید  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار در  $L^1(\mathbb{R})$  است. اگر

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (15.6)$$

آن‌گاه به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [f(x^+) + f(x^-)]. \quad (16.6)$$

پیش از اثبات این قضیه، شایسته است برخی از مشاهدات مهم دربارهٔ معنا و مفهوم معادله (۱۶.۶) را در نظر بگیریم.

تبصره ۴.۲.۶. ۱. حد

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (17.6)$$

مقدار اصلی کوشی انتگرال ناسره،

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi = \lim_{ab \rightarrow \infty - \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi, \quad (18.6)$$

است. حد محدودشده (۱۷.۶)، همان گونه که مشهور است، ممکن است وجود داشته باشد، حتی اگر حد کلی‌تر (۱۸.۶) وجود نداشته باشد. اگر  $\widehat{f}$  در  $L^1(\mathbb{R})$  قرار بگیرد آن‌گاه دو حد باهم برابرند.

۲. اگر  $f$  در هر نقطهٔ ناپیوستگی  $x$  توسط

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [f(x^+) + f(x^-)], \quad (19.6)$$

تعریف شده باشد، آن‌گاه (۱۶.۶) می‌شود:

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dx = F^{-1}(\widehat{f}),$$

که تبدیل فوریه معکوس  $\widehat{f}$ ، یا انتگرال فوریه  $\widehat{f}$  است.

۳. وقتی که  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  و (۱۹.۶) برقرار باشد، معادله‌های (۱۵.۶) و (۱۶.۶) هردو تبدیل

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \\ f(x) &= F^{-1}(\widehat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \end{aligned}$$

نمایشی که درجه بالای از تقارن را نشان می‌دهد، تعریف می‌کنند. برخی از کتاب‌ها تعریف

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

از

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

را می‌پذیرند و به این ترتیب به تقارن کامل می‌رسند. تعریف ما یک توسعه طبیعی از نمادهای مورد استفاده در سری فوریه است.

۴. اگر  $\widehat{f} = 0$  آن‌گاه (۱۶.۶)  $f = 0$  را ایجاب می‌کند، با فرض اینکه معادله (۱۹.۶) معتبر

است. این به معنای آن است که تبدیل فوریه  $F$ ، تعریف شده روی توابع قطعه‌به‌قطعه هموار در  $L^1(\mathbb{R})$ ، یک‌به‌یک است.

برهان.

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \int_{-L}^L \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right] e^{ix\xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L}^L f(y) e^{i\xi(x-y)} d\xi dy,\end{aligned}$$

چون تابع

$$f(y) e^{i\xi(x-y)}$$

در شرایط لم ۲.۲.۶ صدق می‌کند. از معادله (۱۳.۶) برای تغییر ترتیب انتگرال‌گیری نسبت

به  $y$  و  $\xi$  استفاده می‌کنیم. با انتگرال‌گیری نسبت به  $\xi$ ، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin * (L(x-y))}{x-y} f(y) dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(L\eta)}{\eta} f(x+\eta) d\eta.\end{aligned}\quad (۲۰.۶)$$

اکنون فرض کنید که  $\delta$  عدد مثبت دلخواه است. به عنوان یک تابع از  $\eta$ ،  $\frac{f(x+\eta)}{\eta}$

قطعه به قطعه هموار است و قدر مطلق آن روی  $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$  انتگرال پذیر است،

لذا با استفاده از لم ۵.۱.۶ نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{|\eta| \geq \delta} \frac{\sin(L\eta)}{\eta} f(x+\eta) d\eta = 0.$$

با حدگیری از دو طرف معادله (۲۰.۶) وقتی  $L \rightarrow \infty$  است، داریم

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = 2 \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(L\eta)}{\eta} f(x+\eta) d\eta$$



$$= \frac{1}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \frac{\sin(L\eta)}{\eta} [f(x + \eta) + f(x - \eta)] d\eta.$$

ولی

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \frac{\sin L\eta}{\eta} f(x + \eta) d\eta &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \sin L\eta \frac{f(x + \eta) - f(x^+)}{\eta} d\eta \\ &+ \lim_{L \rightarrow \infty} f(x^+) \int_{-}^{\delta} \frac{\sin L\eta}{\eta} d\eta. \end{aligned}$$

اکنون لم ۵.۱.۶ ایجاب می‌کند:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \sin L\eta \frac{f(x + \eta) - f(x^+)}{\eta} d\eta = 0,$$

و لم ۱.۲.۶ نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \frac{\sin L\eta}{\eta} d\eta = \int_{-}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

ازاین‌رو،

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \frac{\sin L\eta}{\eta} f(x + \eta) d\eta = \frac{\pi}{2} f(x^+).$$

به‌طور مشابه،

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-}^{\delta} \frac{\sin L\eta}{\eta} f(x - \eta) d\eta = \frac{\pi}{2} f(x^-).$$

درنتیجه،

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \pi [f(x^+) + f(x^-)],$$

□

و پس از تقسیم معادله بر  $2\pi$ ، برابری مطلوب به‌دست می‌آید.

شباهت بین قضایای ۵.۲.۳ و ۳.۲.۶ بسیار قابل توجه است. اگرچه آن تا حدودی به وسیله این حقیقت که شکل مثلثاتی سری فوریه در اظهارت و اثبات قضیه ۴.۲.۳ استفاده شده بود پیچیده و مبهم شده است. درحالی که قضیه ۳.۲.۶ در جمله‌هایی از شکل نمایی تبدیل و انتگرال فوریه بیان شده است. تطابق وقتی آشکارتر می‌شود که فرمول‌ها در قضیه ۴.۲.۳ به شکل نمایی زیر ارائه شوند.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

از طرف دیگر، شکل مثلثاتی قضیه ۳.۲.۶ به راحتی از رابطهٔ اویلر  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  گرفته می‌شود. فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$  تابعی قطعه‌به‌قطعه هموار حقیقی است که در هر نقطهٔ ناپیوستگی در

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

صدق می‌کند. چنین تابعی تبدیل فوریهٔ زیر را دارد:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx \\ &= A(\xi) - iB(\xi), \end{aligned} \quad (21.6)$$

که

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx, \quad (22.6)$$

$$B(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (23.6)$$

به ترتیب، تبدیل‌های فوریه سینوسی و کسینوسی  $f$  هستند.

اکنون از قضیه ۳.۲.۶ می‌توانیم  $f(x)$  را به صورت زیر نشان دهیم:

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L [A(\xi) - iB(\xi)] e^{ix\xi} d\xi.$$

چون  $A(\xi)$  زوج و  $B(\xi)$  فرد است، داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L [A(\xi) \cos x\xi - iB(\xi) \sin x\xi] d\xi \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L [A(\xi) \cos x\xi - iB(\xi) \sin x\xi] d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) \cos x\xi - iB(\xi) \sin x\xi] d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (24.6)$$

اگر  $f$  زوج باشد، آنگاه (۲۳.۶) ایجاب می‌کند  $B(\xi) = 0$  و هر دو تبدیل (۲۲.۶) و

(۲۴.۶) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$A(\xi) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx, \quad (25.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos x\xi d\xi. \quad (26.6)$$

اگر  $f$  فرد باشد، آنگاه  $A(\xi) = 0$  و به دست می‌آوریم:

$$B(\xi) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx, \quad (27.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \sin x\xi d\xi. \quad (28.6)$$

توجه خواننده را به تشابه بین این فرمول‌ها و فرمول‌های متناظر برای  $a_n$  و  $b_n$  در نمایش سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب جلب می‌کنیم.

مثال ۵.۲.۶. با به‌کار بردن قضیه ۳.۲.۶ در مثال ۲.۱.۶، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{\xi} \sin a\xi e^{ix\xi} d\xi &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{\xi} \sin a\xi \cos x\xi d\xi, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} \sin a\xi \cos x\xi d\xi, \end{aligned}$$

چون  $\sin \frac{a\xi}{\xi}$  یک تابع زوج و  $\cos \xi x$  قسمت (حقیقی) زوج  $e^{ix\xi}$  است. بنابراین، با یادآوری تعریف  $f_a$  به ارزیابی جالب زیر از انتگرال بالا می‌رسیم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} \sin a\xi \cos x\xi d\xi = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \frac{1}{2}, & x = -a \\ 1, & -a < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = a \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

این واقعیت که سمت راست این برابری یک تابع پیوسته نیست، دلالت بر این دارد که انتگرال در سمت چپ به‌طور یکنواخت همگرا نمی‌شود.

مثال ۶.۲.۶. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

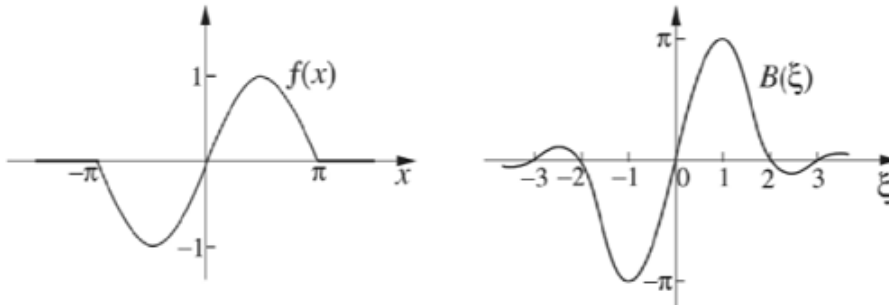
فرد است. از این رو، تبدیل‌های کسینوسی و سینوسی آنها به‌ترتیب به‌صورت زیر هستند:

$$A(\xi) = 0,$$

و

$$\begin{aligned}
 B(\xi) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \sin \xi x dx \\
 &= \frac{1}{1-\xi} \sin(1-\xi)\pi - \frac{1}{1+\xi} \sin(1+\xi)\pi \\
 &= \frac{2 \sin \pi \xi}{1-\xi^2}.
 \end{aligned}$$

در شکل ۴.۶ نشان داده شده‌اند.  $B(\xi)$  و  $f(x)$



شکل ۴.۶:  $f$  و تبدیل‌های سینوس آن

بنابراین، توسط (۲۸.۶)، نمایش انتگرال فوریه  $f$  به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \xi}{1-\xi^2} \sin x \xi d\xi. \quad (29.6)$$

توجه داشته باشید که در اینجا

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm 1} \frac{\sin \pi \xi}{1-\xi^2} \sin x \xi = \pm \frac{\pi}{2} \sin x.$$

بنابراین، انتگرالده  $\sin \pi \xi \sin x \xi (1 - \xi^2)^{-1}$  روی  $0 < \xi < \infty$  کران دار شده است. وقتی  $\xi \rightarrow \infty$  برای ثابت مثبت  $c$  داریم:

$$|(1 - \xi^2)^{-1} \sin \pi \xi \sin x \xi| \leq \frac{c}{\xi^2}.$$

بنابراین، انتگرال فوریه (۲۹.۶) روی  $\mathbb{R}$  به تابع پیوسته  $f$  به طور یکنواخت همگراست.

مثال ۷.۲.۶. پیش از این، در مثال ۳.۱.۶ دیده ایم که تبدیل فوریه تابع زوج  $e^{-|x|}$  به صورت زیر است:

$$F(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1 - \xi^2},$$

که یک تابع  $L^1$  روی  $\mathbb{R}$  است؛ از این رو، با استفاده از (۲۶.۶) داریم:

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \xi}{1 - \xi^2} d\xi.$$

در  $x = 0$  نتیجه آشنا زیر را به دست می آوریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{1 - \xi^2} = \frac{\pi}{2}.$$

ما این بخش را با یک نگاه مختصر به تبدیل فوریه در  $L^2$ ، فضایی که در آن نظریه

سری فوریه در فصل سوم توسعه داده شده بود، به پایان می رسانیم. به طور کلی، تمرین ۲.۶

نشان می دهد که هیچ رابطه تعلق بین  $L^1(\mathbb{R})$  و  $L^2(\mathbb{R})$  وجود ندارد، ولی توابع کران دار

در  $L^1(\mathbb{R})$  متعلق به  $L^2(\mathbb{R})$  هستند، زیرا  $\int |f|^2 \leq M \int |f| \leq M^2$  هرگاه  $|f| \leq M$  باشد.

فرض کنید  $f$  و  $g$  هر دو توابع قطعه به قطعه هموار در  $L^1(\mathbb{R})$  هستند و از این رو، کران دارند

و تبدیلیشان  $\widehat{f}$  و  $\widehat{g}$  نیز به  $L^1(\mathbb{R})$  تعلق دارند. با توجه به قضیه ۶.۱.۶، توابع  $\widehat{f}$  و  $\widehat{g}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته و کران دار هستند. انتگرال‌های ناسره

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

نیز روی  $\mathbb{R}$  قطعه به قطعه هموار هستند، برای آنها به ترتیب توسط قضیه ۳.۲.۶، توابع  $\sqrt{2\pi} f(x)$  و  $\sqrt{2\pi} g(x)$  را نشان می‌دهند. البته در اینجا فرض می‌کنیم که  $f$  و  $g$  در هر نقطه ناپیوستگی توسط میانگین پرش در آن نقطه تعریف می‌شوند. بنابراین، توابع  $f, g, \widehat{f}$  و  $\widehat{g}$  همگی به  $L^2(\mathbb{R})$  تعلق دارند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \langle f, g \rangle &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{ix\xi} d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \overline{g(x)} dx d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \end{aligned} \quad (30.6)$$

وقتی  $g = f$  است، یک رابطه بین نرم‌های  $L^2$  از  $f$  و تبدیل فوریه آن به دست می‌آوریم،

$$\|\widehat{f}\|^2 = \sqrt{2\pi} \|f\|^2, \quad (31.6)$$

که متناظر با رابطه پارسوال (۲۳.۱) است. معادله‌های (۳۰.۶) و (۳۱.۶) در کنار هم قضیه شناخته شده پلانچرال<sup>۱</sup> را تشکیل می‌دهند که در واقع تحت شرایط ضعیف‌تر روی  $f$  و  $g$

<sup>۱</sup>plancherel

برقرار است. این جفت از معادله‌ها، هرگاه که  $f$  و  $g$  در  $L^2(\mathbb{R})$  قرار گیرند، معتبر است. اثبات این نتیجه کلی‌تر براساس این واقعیت است که مجموعه توابع  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  در  $L^2(\mathbb{R})$  چگال است؛ یعنی، هر تابع در  $L^2(\mathbb{R})$  حد دنباله توابع در  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  است.

### تمرین‌ها

۱۰.۶. هریک از توابع زیر را به صورت انتگرال فوریه مثلثاتی بیان کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 < x < 1 \\ -1-x & -1 < x < 0 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi/2 \\ -\cos x, & \pi/2 < x < \pi \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x < 0, x > \pi \end{cases} \quad (\text{ه})$$

۱۱.۶. با استفاده از نتیجه تمرین (۱۰.۶) (ه) نشان دهید که

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \pi \xi}{1 - \xi^2} d\xi.$$

۱۲.۶. ثابت کنید که به ازای هر  $x > 0$  و  $\alpha > 0$  داریم:

$$e^{-\alpha x} = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \pi \xi}{\xi^2 + \alpha^2} d\xi.$$

توضیح دهید چرا برابری در  $x = 0$  برقرار نیست.



۱۳.۶. ثابت کنید که به ازای هر  $x > 0$  داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi^x \sin x \xi}{\xi^4 + 4} d\xi = \frac{\pi}{4} e^{-x} \cos x.$$

آیا انتگرال روی  $(0, \infty)$  به طور یکنواخت همگراست؟

۱۴.۶. انتگرال کسینوس فوریه را برای  $e^{-x} \cos x$ ،  $x \geq 0$ ، تعیین کنید. آیا نمایش آن

نقطه به نقطه است؟

۱۵.۶. ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi \xi}{\xi} \sin x \xi d\xi = \begin{cases} \pi/2, & 0 < x < \pi \\ \pi/4, & x = \pi \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$$

۱۶.۶. تبدیل فوریه  $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ ،  $x \in \mathbb{R}$ ، را تعیین کنید.

۱۷.۶. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

داده شده است. نشان دهید:

$$\widehat{f}(\xi) = \left[ \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right]^2.$$

سپس نتیجه بگیرید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \pi.$$

۱۸.۶. برابری  $\|\widehat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2$  را درحالی که  $f(x) = e^{-|x|}$  باشد، بررسی کنید.

۱۹.۶. رابطه (۳۱.۶) را برحسب تبدیل های سینوس و کسینوس  $A$  و  $B$  بیان کنید.

## ۳.۶ ویژگی‌ها و کاربردها

قضیه زیر، ویژگی‌های اساسی تبدیل فوریه را تحت مشتق‌گیری به ما نشان می‌دهد. فرمول تبدیل مشتق نه تنها به عنوان ابزار برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی، بلکه همچنین به عنوان یک نتیجه اساسی که وجود جواب‌هایی برای چنین معادله‌هایی دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

قضیه ۱.۳.۶. فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

(۱) اگر  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  و  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، آنگاه داریم:

$$F(f') = i\xi F(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (۳۲.۶)$$

(۲) اگر  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ، آنگاه  $F(f)$  مشتق‌پذیر است و مشتق آن

$$\frac{d}{d\xi} F(f)(\xi) = F(-ixf)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (۳۳.۶)$$

روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.

برهان. (۱) تابع  $|f'|$  انتگرال‌پذیر است. تبدیل فوریه  $F(f')$  وجود دارد و

$$F(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

پیوستگی  $f$  به ما این اجازه را می‌دهد که بنویسیم  $\int_{\cdot}^x f'(t) dt = f(x) - f(\cdot)$ ، از این رو،

دو حد

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(\cdot) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{\cdot}^x f'(t) dt$$

وجود دارد. ولی چون  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته و انتگرال پذیر است،  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  است. حال با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} F(f')(\xi) &= f(x)e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx. \\ &= i\xi F(f)(\xi), \end{aligned}$$

(۲)

$$\frac{\widehat{f}(\xi + \delta\xi) - \widehat{f}(\xi)}{\Delta\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i(\xi+\Delta\xi)x} - e^{-i\xi x}}{\Delta\xi} dx.$$

وقتی  $\Delta\xi \rightarrow 0$  است، به دست می آوریم:

$$\frac{d}{d\xi} F(f)(\xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\xi+\Delta\xi)x} - e^{-i\xi x}}{\Delta\xi} dx.$$

با توجه به فرض، حد

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{e^{-i(\xi+\Delta\xi)x} - e^{-i\xi x}}{\Delta\xi} = -ixf(x)e^{-i\xi x}$$

توسط  $|xf(x)| \in L^1(\mathbb{R})$  به ازای هر  $\xi \in \mathbb{R}$  کران دار می شود، بنابراین، می توانیم از قضیه

۴.۱.۶ استفاده کنیم تا نتیجه بگیریم که

$$\frac{d}{d\xi} F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [-ixf(x)]e^{-i\xi x} dx = F(-ixf)(\xi).$$

□

با استفاده از استقرا، این نتیجه به راحتی قابل تعمیم است.

نتیجه ۱۰. فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$  و  $n$  یک عدد صحیح مثبت است.

(۱) اگر  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$  به‌ازای هر  $1 \leq k \leq n$ ، و  $f^{(n-1)}$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، آنگاه

داریم:

$$F(f^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n F(f)(\xi). \quad (۳۴.۶)$$

(۲) اگر  $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ، آنگاه داریم:

$$\frac{d^n}{d\xi^n} F(f)(\xi) = F[(-ix)^n f](\xi). \quad (۳۵.۶)$$

انتگرال‌پذیری  $|x^n f(x)|$  روی  $\mathbb{R}$  می‌تواند به‌عنوان مقیاسی که خیلی سریع تابع  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  به صفر میل کند، در نظر گرفته شود. به این معنا که  $f(x)$  هرچه  $n$  بزرگ‌تر باشد سریع‌تر، به صفر میل می‌کند. این معادله (۳۴.۶) ایجاب می‌کند که وقتی مرتبه مشتق‌پذیری (یا همواری)  $f$  افزایش یابد، میزان تباهی  $\hat{f}$  نیز افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، معادله (۳۵.۶) نشان می‌دهد که توابعی که سریع‌تر تباهیده می‌شوند، تبدیل‌های هموارتری دارند.

مثال ۲.۳.۶. فرض کنید:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

برای به‌دست آوردن تبدیل فوریه  $f$ ، به یاد می‌آوریم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (۳۶.۶)$$

( تمرین ۱۵.۴ )، چون  $f$  در شرایط قضیه ۱.۳.۶ صدق می‌کند، معادله (۳۶.۶) به ما این اجازه را می‌دهد تا بنویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \widehat{f}(\xi) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-i\xi) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\frac{\xi}{2} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

جواب این معادله به صورت

$$\widehat{f}(\xi) = c e^{-\xi^2/4},$$

است، که ثابت انتگرال‌گیری با قرار دادن  $\xi = 0$  و با استفاده از معادله (۳۶.۶) معین می‌شود. یعنی،

$$c = \widehat{f}(0) = \sqrt{\pi}.$$

بنابراین،  $F(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$ .

### ۱.۳.۶ انتقال گرما در یک نوار نامتناهی

درست همان‌طور که سری فوریه ما را در ساخت جواب‌هایی برای مسائل مقدار مرزی در دامنه‌های فضای کران‌دار یاری داد، اکنون نشان می‌دهیم که وقتی دامنه فضایی بی‌کران است چگونه چنین جواب‌هایی را می‌توان با انتگرال‌های فوریه نشان داد. در اینجا به سوال

منحصربه‌فرد بودن جواب که از این طریق به دست می‌آید، پرداخته نمی‌شود، زیرا مربوط به نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی است. ولی معادله‌هایی که پیش از این ارائه شده‌اند (معادله لاپلاس، معادله گرما، معادله موج)، همه تحت شرایط مرزی اعمال شده‌اند، چه متغیر فضا کران‌دار باشد یا نه، جواب‌های منحصربه‌فردی دارند. از این حقیقت، نتیجه می‌گیریم که با توجه به خطی بودن این معادله‌ها و شرایط مرزی آنها، تفاضل بین هر دو جواب یک مسئله در یک معادله دیفرانسیل همگن تحت شرایط مرزی همگن صدق می‌کند، که تنها می‌تواند یک جواب بدیهی داشته باشد [به [۱۳] رجوع کنید].

**مثال ۳.۳.۶.** فرض کنید که توزیع دمای اولیه، یک نوار نازک نامتناهی در امتداد طول خود دارد که آن را با  $f(x)$  نشان می‌دهیم. ما می‌خواهیم دمای  $u(x, t)$  را در امتداد نوار به ازای هر  $t > 0$  تعیین کنیم. برای حل این مسئله توسط تبدیل فوریه، فرض می‌کنیم که  $f$  قطعه‌به‌قطعه هموار و  $|f|$  روی  $(-\infty, \infty)$  انتگرال‌پذیر است.

دمای  $u(x, t)$  در معادله گرما

$$u_t = ku_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (37.6)$$

و شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (38.6)$$

صدق می‌کند. مانند قبل، با فرض

$$u(x, t) = v(x)w(t)$$

به جداسازی متغیرها متوسل می‌شویم. با جای‌گذاری در معادله (۳۷.۶)، معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\nu''(x)}{\nu(x)} = \frac{1}{k} \frac{w'(t)}{w(t)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

که ایجاب می‌کند که هر طرف باید ثابتی مانند  $-\lambda^2$  باشد. حاصل این دو معادله به جواب‌های زیر منجر می‌شود:

$$\nu(x) = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x,$$

$$w(x) = C(\lambda) e^{-k\lambda^2 t},$$

که  $A$ ،  $B$  و  $C$  به پارامتر  $\lambda$  بستگی دارند. وقتی شرایط مرزی روی جواب وجود ندارد،  $\lambda$  یک متغیر حقیقی خواهد بود و  $A = A(\lambda)$  و  $B = B(\lambda)$  به ترتیب توابعی از  $\lambda$  خواهند بود و ما می‌توانیم در ضرب  $\nu(x)w(t)$ ،  $C(\lambda) = 1$  قرار دهیم. متناظر با هر  $\lambda \in \mathbb{R}$  تابع

$$u_\lambda(x, t) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-k\lambda^2 t}$$

در معادله (۳۷.۶) صدق می‌کند و  $A(\lambda)$  و  $B(\lambda)$  توابعی دلخواه از  $\lambda \in \mathbb{R}$  می‌شوند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که  $\lambda \geq 0$  است، زیرا مقادیر منفی  $\lambda$  جواب‌های اضافی تولید نمی‌کند.

از  $u_\lambda(x, t)$  نمی‌توان انتظار داشت که شرط اولیه (۳۸.۶) را برای تابع کلی  $f$  برآورده

کند، بنابراین، فرض می‌کنیم که جواب موردنظر به شکل زیر است:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_\lambda(x, t) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-k\lambda^2 t} d\lambda. \quad (39.6)$$

این فرض با جمع‌بندی (۳۰.۳) روی مقادیر گسسته  $\lambda$  پیشنهاد می‌شود و عامل  $\frac{1}{\pi}$  به منظور نمایش  $u$  در شکل انتگرال فوریه معرفی می‌شود. در  $t = 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \\ &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (40.6)$$

با توجه به قضیه ۳.۲.۶ و معادله‌های (۲۲.۶) و (۲۴.۶)، می‌بینیم که معادله (۴۰.۶) به‌طور منحصر به فرد  $A$  و  $B$  را به ترتیب به‌عنوان تبدیلات کسینوس و سینوس از  $f$  تعیین می‌کند:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \lambda y dy \\ B(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin \lambda y dy. \end{aligned}$$

با جایگزینی دوباره (۳۹.۶) و با استفاده از خواص زوج و فرد بودن  $A$  و  $B$ ، به جواب معادله گرما (۳۷.۶) می‌رسیم که در شرط اولیه (۳۸.۶) صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) [\cos \lambda y \cos \lambda x + \sin \lambda y \sin \lambda x] e^{-k\lambda^2 t} dy d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos(x - y) e^{-k\lambda^2 t} dy d\lambda. \end{aligned} \quad (41.6)$$

همچنین جواب (۴۱.۶) را می‌توانیم با گرفتن تبدیل فوریه از هر دو طرف معادله گرما،

به‌عنوان توابعی از  $x$ ، و با استفاده از نتیجه ۱۰ به‌دست آوریم. داریم:

$$\hat{u}_t = k(i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t) = -k\xi^2 \hat{u}(\xi, t),$$



که جواب این معادله به صورت

$$\widehat{u}(\xi, t) = ce^{-k\xi^2 t}$$

با شرط اولیه  $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$  است. بنابراین، به عنوان یک تابع از  $\xi$ ،

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$$

تبدیل فوریه  $u(x, t)$  به ازای هر  $t > 0$  است و  $u$  می تواند طبق قضیه ۳.۲.۶ و توسط انتگرال

زیر نمایش داده شود:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-i\xi y} dy \right] e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{i(x-y)\xi} e^{-k\xi^2 t} d\xi dy. \end{aligned}$$

در اینجا این حقیقت که  $e^{-k\xi^2 t} |\widehat{f}(\xi)|$  روی  $-\infty < \xi < \infty$  انتگرال پذیر است، به ما اجازه می دهد که مقدار اصلی کوشی در رابطه (۱۰) را با انتگرال ناسره متناظر جایگزین کنیم، تعویض ترتیب انتگرال گیری در آخرین مرحله با فرض اینکه  $|f|$  انتگرال پذیر است، تنظیم شده است. اینک چون  $e^{-k\xi^2 t}$  یک تابع زوج از  $\xi$  است، داریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-y)\xi e^{-k\xi^2 t} d\xi dy,$$

که با (۴۱.۶) برابر است.

با استفاده از فرمول انتگرال گیری (رجوع شود به تمرین ۲۳.۶) به ازای هر  $z \in \mathbb{R}$ ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b\xi^2} \cos z\xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-z^2/4b}, \quad b > 0, \quad (42.6)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(y-x)^2/4kt} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \sqrt{kt}p) e^{-p^2} dp. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، این مسئله ساده است که بررسی کنیم که این آخرین عبارت برای  $u(x, t)$  در معادله گرما صدق می‌کند. همچنین، شرط اولیه  $u(x, 0) = f(x)$  با نتیجه از تمرین ۱۵.۴ برقرار است.

**مثال ۴.۳.۶.** مسئله مقدار مرزی مربوط به نوار نیمه-نامتناهی، که از یک طرف عایق‌بندی شده است، توسط دستگاه معادله‌های زیر تعریف می‌شود:

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (43.6)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (44.6)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (45.6)$$

جواب معادله (۴۳.۶) توسط جداسازی متغیرها به مجموعه‌ای از جواب‌های به دست

آمده در مثال ۳.۳.۶ منجر می‌شود:

$$u_\lambda(x, t) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-k\lambda^2 t}, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

برای اینکه هر جواب در این مجموعه، در شرط مرزی در  $x = 0$  صدق کند، باید به ازای هر

$t > 0$  داشته باشیم:

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda B(\lambda) e^{-k\lambda^2 t} = 0.$$

اگر  $\lambda = 0$  باشد، جواب ثابت  $u = A(0)$  را به دست می‌آوریم، و اگر  $B(\lambda) = 0$  جواب به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) \cos \lambda x e^{-k\lambda^2 t}. \quad (46.6)$$

این به معنای آن است که (46.6)، که  $0 \leq \lambda < \infty$  است، همه جواب‌های معادله گرما را که در شرط مرزی (44.6) صدق می‌کند، ارائه می‌دهد.

برای برقراربودن شرط اولیه (45.6)، انتگرال زیر را تشکیل می‌دهیم

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x, t) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x e^{-k\lambda^2 t} d\lambda.$$

وقتی  $t = 0$  باشد،

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (47.6)$$

با گسترش  $f$  به عنوان یک تابع زوج به بازه  $(-\infty, \infty)$ ، از نمایش (47.6) می‌بینیم که

$A(\lambda)$  تبدیل کسینوسی  $f$  است؛ از این رو، با  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ،

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \lambda y dy = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos \lambda y dy,$$

و جواب مسئله مقدار مرزی به صورت زیر معین می‌شود:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \lambda y \cos \lambda x e^{-k\lambda^2 t} dy d\lambda. \quad (48.6)$$

با استفاده از اتحاد  $2 \cos \lambda y \cos \lambda x = \cos \lambda(y-x) + \cos \lambda(y+x)$  و فرمول (42.6)،

این انتگرال دوگانه به انتگرال یگانه تبدیل می‌شود و داریم:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[ e^{-(y-x)^2/4kt} + e^{-(y+x)^2/4kt} \right] dy.$$

برای به دست آوردن یک عبارت صریح برای جواب وقتی که

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < a \\ 0, & y > a, \end{cases}$$

می‌توانیم از تعریف تابع خطای داده شده در تمرین ۶.۵ استفاده کنیم، یعنی

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp.$$

می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \int_0^a f(y) \left[ e^{-(y-x)^2/4kt} + e^{-(y+x)^2/4kt} \right] dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{kt}}^{(a-x)/\sqrt{kt}} e^{-p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{kt}}^{(a+x)/\sqrt{kt}} e^{-p^2} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a-x)/\sqrt{kt}} e^{-p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a+x)/\sqrt{kt}} e^{-p^2} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{a-x}{\sqrt{kt}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{a+x}{\sqrt{kt}}\right). \end{aligned}$$

از ویژگی‌های تابع خطا (تمرین ۶.۵) به آسانی می‌توان دریافت که به ازای هر  $t > 0$  وقتی

$$x \rightarrow \infty$$

$$u(x, t) \rightarrow 0,$$

$$u(x, t) \rightarrow \operatorname{erf}(a/\sqrt{kt}),$$

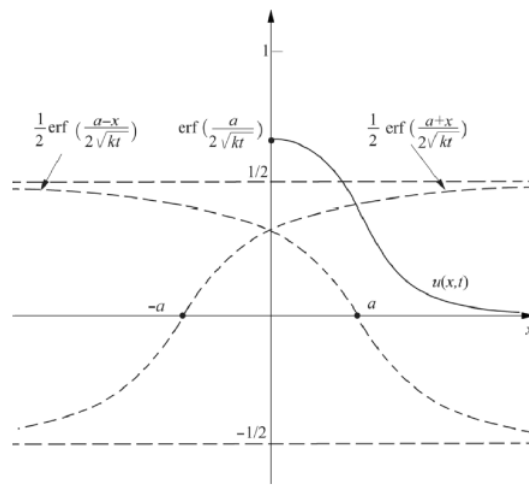
و به ازای هر  $x > 0$  وقتی  $t \rightarrow \infty$  باشد،

$$u(x, t) \rightarrow 0,$$

وقتی  $t \rightarrow 0$  باشد،

$$u(x, t) \rightarrow \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

بنابراین، در هر نقطه روی نوار وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، دما به صفر نزدیک می‌شود و در هر لحظه، وقتی  $x \rightarrow \infty$  دما به صفر نزدیک می‌شود. این انتظار می‌رود، چون سرانجام گرمای اولیه در نوار تا بی‌نهایت به بیرون تراوش می‌کند. همچنین، گفتنی است که وقتی  $t \rightarrow 0$ ،  $u(a, t) \rightarrow 1/2 = [f(a^+) + f(a^-)]/2$  (شکل ۵.۶ را ببینید).



شکل ۵.۶: توزیع دما بر روی میله نیمه نامتناهی

### ۲.۳.۶ معادله‌های ناهمگن

معادله دیفرانسیل ناهمگن  $y - y'' = f$  می‌تواند به‌طور مستقیم از روش‌های شناخته‌شده وقتی که  $f$  یک چندجمله‌ای یا تابع نمایی است، حل شود؛ ولی چنین روش‌هایی برای

کلاس‌های کلی‌تر توابع کار نمی‌کند. اگر  $f$  دارای یک تبدیل فوریه باشد با استفاده از نتیجه ۱۰ داریم:

$$\widehat{y} + \xi^2 \widehat{y} = \widehat{f}.$$

بنابراین، جواب معادله دیفرانسیل به‌طور کلی به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y(x) = F^{-1} \left( \widehat{f}(\xi) \frac{1}{\xi^2 + 1} \right) (x). \quad (49.6)$$

ما تبدیل‌های معکوس هر دو تابع  $\widehat{f}$  و  $(\xi^2 + 1)^{-1}$  را می‌دانیم، ولی هیچ روش مشخصی برای معکوس کردن ضرب این دو تبدیل، یا حتی تصمیمی درمورد اینکه آیا چنین حاصل ضربی معکوس‌پذیر است، نداریم، با این حال نشان دادیم که چگونه می‌توان  $F^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$  را برحسب  $f$  و  $g$  تحت محدودیت‌های نسبی روی توابع  $f$  و  $g$  بیان کرد.

**تعریف ۵.۳.۶.** فرض کنید  $I$  یک بازه حقیقی است. تابع  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  روی  $I$  موضعاً انتگرال‌پذیر گفته می‌شود، اگر  $|f|$  روی هر زیربازه متناهی  $I$  انتگرال‌پذیر باشد.

بنابراین، همه توابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته روی  $I$  و همه توابع در  $L^1(I)$  موضعاً انتگرال‌پذیرند.

**تعریف ۶.۳.۶.** اگر توابع  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  موضعاً انتگرال‌پذیر باشند، کانولوشن<sup>۱</sup> آنها

تابعی است که به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  توسط انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  انتگرال بالا همگراست.

<sup>۱</sup>Convolution

با قرارداد  $x - t = s$  در انتگرال بالا، رابطه جابه‌جایی زیر را به دست می‌آوریم:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds = g * f(x).$$

کانولوشن  $f * g$  به عنوان تابعی روی  $\mathbb{R}$  تحت شرایط مختلف روی  $f$  و  $g$  وجود دارد. در اینجا چند مثال بیان می‌کنیم.

۱. اگر یکی از توابع مطلقاً انتگرال‌پذیر و دیگری کران‌دار باشد. فرض کنید  $f \in L^1(\mathbb{R})$  و  $|g| \leq M$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|dt \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty. \end{aligned}$$

۲. اگر هر دو  $f$  و  $g$  روی  $(-\infty, 0)$  صفر شوند، در این صورت داریم:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

۳. اگر هر دو  $f$  و  $g$  به  $L^1(\mathbb{R})$  تعلق داشته باشند، این به طور مستقیم از نابرابری کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود.

۴. اگر  $f$  یا  $g$  کران‌دار و در خارج از یک بازه متناهی صفر شود، آن‌گاه  $f * g$  به وضوح کران‌دار است. ولی برای ادامه کار، بیشتر به کران‌داری  $f * g$  نیاز داریم.

قضیه ۷.۳.۶. اگر  $f$  و  $g$  به  $L^1(\mathbb{R})$  تعلق داشته باشند و هر دو تابع، کران‌دار باشد، آن‌گاه

$f * g$  در  $L^1(\mathbb{R})$  قرار دارد و

$$F(f * g) = \widehat{f\hat{g}}. \quad (50.6)$$

برهان. برای اینکه  $f * g$  یک تبدیل فوریه داشته باشد، ابتدا ثابت کنید که  $|f * g|$  روی  $\mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که  $|g|$  روی  $\mathbb{R}$  توسط ثابت مثبت  $M$  کران‌دار است. چون

$$|f(x-t)g(t)| \leq M|f(x-t)|$$

و  $M|f(x-t)|$  روی  $(-\infty, \infty)$  به‌ازای هر  $t \in \mathbb{R}$  (به‌عنوان یک تابع از  $x$ ) انتگرال‌پذیر است. از لم ۲.۲.۶ نتیجه می‌گیریم که انتگرال

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

همگرای یکنواخت است؛ در نتیجه، به‌ازای هر  $a > 0$  می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^a |f * g(x)|dx &= \int_{\cdot}^a \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \\ &\leq \int_{\cdot}^a \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\cdot}^a |f(x-t)g(t)| dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \int_{\cdot}^a |f(x-t)| dx dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

این نابرابری به‌ازای هر  $a > 0$  برقرار است. بنابراین،  $|f * g|$  روی  $(-\infty, 0)$  انتگرال‌پذیر است. به‌طور مشابه،  $|f * g|$  روی  $(0, \infty)$  انتگرال‌پذیر است و بنابراین، روی  $\mathbb{R}$  انتگرال‌پذیر است.



برای اثبات برابری (۵۰.۶) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} F(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)e^{-i\xi x} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-i\xi(x-t)}g(t)e^{-i\xi t} dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\xi s} ds \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\xi t} dt \\ &= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \end{aligned}$$

که در آن تغییر در ترتیب انتگرال‌گیری، با همگرایی یکنواخت انتگرال کانولوشن توجیه می‌شود.  $\square$

با استفاده از معادله (۵۰.۶) و نتیجه مثال ۳.۱.۶، نتیجه می‌گیریم که جواب خصوصی

$$y - y'' = f$$

زیر معین می‌شود:

$$\begin{aligned} y(x) &= F^{-1} \left( \widehat{f}(\xi) \frac{1}{\xi^2 + 1} \right) (x) \\ &= f * \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|\cdot|} \right) (x) \end{aligned} \quad (51.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-|x-t|} dt. \end{aligned} \quad (52.6)$$

این را به‌عنوان یک تمرین برای بررسی باقی می‌گذاریم. با مشتق‌گیری مستقیم، این عبارت

انتگرالی در معادله  $y - y'' = f$  به شرطی که  $f$  پیوسته است، صدق می‌کند.

در این رابطه، قابل توجه است که هسته تابع  $e^{-|x-t|}$  در نمایش انتگرال  $y$  در معادله

(۵۲.۶) چیزی به جز تابع گرین،  $G(x, t)$  برای عملگر اشتروم-لیوویل

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 \quad (۵۳.۶)$$

روی بازه  $(-\infty, \infty)$ ، تحت شرایط مرزی  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x, t) = 0$  نیست. برای معادله ناهمگن  $Ly = f$  به صورت زیر حل می‌شود:

$$y(x) = L^{-1} f = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) f(t) dt.$$

این جواب وقتی  $x \rightarrow \pm\infty$  به صفر میل می‌کند، همان‌طور که باید روی  $(-\infty, \infty)$  پیوسته و انتگرال‌پذیر باشد. تحت چنین شرایط مرزی، جواب معادله همگن  $y - y'' = 0$ ، یعنی  $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ، تنها می‌تواند یک جواب بدیهی باشد.

برای حل همان معادله  $y - y'' = f$  روی بازه نیمه نامتناهی  $[0, \infty)$ ، به شرط مرزی به کاررفته در  $x = 0$  مثلاً

$$y(0) = y_0,$$

نیاز داریم، در این حالت، همان روند بالا منجر به جواب خصوصی زیر می‌شود:

$$y_p(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) e^{-|x-t|} dt.$$

ولی اینجا جواب همگن

$$y_h(x) = ce^{-x}, \quad x \geq 0,$$

برای هر ثابت  $c$  قابل قبول است. با به کار بردن شرط مرزی در  $x = 0$  برای  $y = y_p + y_h$  نتیجه می‌گیریم:

$$y_0 = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f(t)e^{-t} dt + c,$$

که از آن  $c$  تعیین می‌شود. بنابراین، جواب موردنظر به صورت زیر است:

$$y(x) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f(t)e^{-|x-t|} dt + (y_0 - \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f(t)e^{-t} dt)e^{-x}.$$

اگر  $y_0 = 0$ ، یعنی اگر شرایط مرزی در  $x = 0$  همگن باشد، آنگاه

$$y(x) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} f(t)(e^{-|x-t|} - e^{-(x+t)}) dt$$

و یک بار دیگر، نتیجه می‌گیریم که تابع گرین برای همان عملگر (۵۳.۶) روی فاصله  $[0, \infty)$  تحت شرایط مرزی همگن  $y(0) = 0$  به صورت زیر است:

$$G(x, t) = \frac{1}{\gamma} (e^{-|x-t|} - e^{-(x+t)}).$$

در فصل هفتم نشان می‌دهیم که تبدیل لاپلاس یک ابزار مؤثر برای حل معادله‌های دیفرانسیل ناهمگن در  $[0, \infty)$  است؛ به‌ویژه اگر ضرایب ثابت باشند.

تمرین‌ها

۲۰.۶. فرمول‌های زیر را اثبات کنید.

$$F[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$$

$$F[e^{ia\xi} f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi - a).$$

۲۱.۶. تابع هرمیت از مرتبه  $n$  را به‌ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad -\infty < x < \infty$$

که  $H_n$  چندجمله‌ای هرمیت از مرتبه  $n$  است. ثابت کنید که  $\widehat{\psi}_n$  وجود دارد و در

$$\widehat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n \sqrt{2\pi} \psi_n(\xi)$$

صدق می‌کند. راهنمایی: از مثال (۲.۳.۶) و اثبات روی  $n$  استفاده کنید.

۲۲.۶. معادله انتگرال

$$\int_0^\infty u(x) \cos \xi x dx = \begin{cases} 1, & 0 < \xi < \pi \\ 0, & \pi < \xi < \infty \end{cases}$$

را حل کنید.

۲۳.۶. فرمول انتگرال (۲۴.۶) را اثبات کنید. راهنمایی: انتگرال را با  $I(z)$  نشان می‌دهیم.

نشان دهید که آن در معادله دیفرانسیل  $2bI'(z) + 2I(z) = 0$  صدق می‌کند و آنگاه این

معادله را حل کنید.

۲۴.۶. با فرض اینکه

$$f(x) = \begin{cases} T, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases},$$

در مثال ۳.۳.۶، ثابت کنید که

$$u(x, t) = \frac{T}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+a}{\sqrt{2\sqrt{kt}}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x-a}{\sqrt{2\sqrt{kt}}} \right) \right].$$

این معادله را با جواب مثال ۴.۳.۶ مقایسه کنید و شباهت بین این دو را توضیح دهید.

۲۵.۶. نشان دهید که جواب مسئله مقدار مرزی

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \infty,$$

که  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار در  $L^1(0, \infty)$  است، به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} f(y) \left[ e^{-(y-x)^2/\sqrt{kt}} - e^{-(y+x)^2/\sqrt{kt}} \right] dy.$$

این یک مدل ریاضی برای جریان گرما در میله نیمه‌متناهی با یک انتهای در دمای صفر است.

۲۶.۶. اگر  $f(x)$  روی  $(0, a)$  یک و در جاهای دیگر صفر باشد در تمرین ۲۵.۶،  $u(x, t)$

را از نظر تابع خطا بیان کنید.

۲۷.۶. برای حل مسئله مقدار اولیه از معادله موج، از تبدیل فوریه استفاده کنید.

$$u_{tt} = c^2 y_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u_t(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

که  $f$  یک تابع قطعه‌به‌قطعه هموار در  $L^1(R)$  در نظر گرفته شده است.

نشان دهید که جواب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos ct\xi e^{ix\xi} d\xi,$$

و نمایش دی المبرت<sup>۱</sup> را استخراج کنید.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)].$$

۲۸.۶. معادله موج را روی دامنه نیمه‌متناهی  $0 < x < \infty$  تحت شرایط اولیه در تمرین

۲۷.۶ و شرط مرزی  $u(0, t) = 0$  به‌ازای هر  $t > 0$  حل کنید.

۲۹.۶. با مشتق‌گیری مستقیم بررسی کنید که عبارت انتگرالی (۵۲.۶) معادله  $y - y'' = f$

را حل می‌کند.

---

<sup>۱</sup>J' Alembert



## فصل ۷

# تبدیلات لاپلاس

اگر متغیر موهومی  $i\xi$  را در تبدیل فوریه

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

جایگزین متغیر مختلط  $s = \sigma + i\xi$  کنیم و به ازای هر  $x < 0$ ،  $f(x) = 0$  را در نظر بگیریم، تابع تعریف شده توسط انتگرال حاصل،

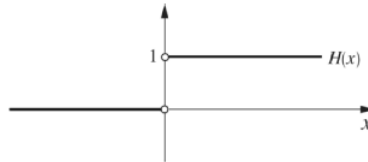
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx, \quad (1.7)$$

تبدیل لاپلاس  $f$  نامیده می‌شود. وقتی  $Res = \sigma$  مثبت باشد، انتگرال ناسره در معادله (۱.۷) حتی اگر  $|f|$  روی بازه  $(0, \infty)$  انتگرال پذیر نباشد، وجود دارد؛ مانند وقتی که  $f$  یک چندجمله‌ای است و این مزیت تبدیل لاپلاس است. چون نمای  $e^{-\sigma x}$  برای  $\sigma > 0$  تباهیده می‌شود، تبدیل لاپلاس در یک کلاس بسیار بزرگ‌تر از توابع  $L^1(0, \infty)$  تعریف شده است.



## ۱.۷ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۱.۷. از  $\varepsilon$  برای نشان دادن کلاس توابع  $\mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$   $f$  استفاده می‌کنیم به طوری که  $f$  در  $[0, \infty)$  موضعاً انتگرال پذیر باشد و  $f(x)e^{-\alpha x}$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  است، به ازای برخی از اعداد حقیقی  $\alpha$  کران دار باقی بماند. بنابراین، تابع  $f \in \varepsilon$  با دو ویژگی



شکل ۱.۷: عملگر هوی ساید

زیر مشخص می‌شود. نخست، با وجود اینکه  $f$  به طور موضعی انتگرال پذیر است، ولی به ما این اجازه را می‌دهد که روی بازه  $[0, \infty)$  نقاط تکین داشته باشیم. دوم، آنکه وقتی  $x \rightarrow \infty$  است،  $f(x)$  حداکثر رشد نمایی را دارد، یعنی، اعداد ثابت  $c > 0$  و  $\alpha$  چنان وجود دارند به طوری که برای  $x \geq b$

$$|f(x)| \leq ce^{\alpha x}. \quad (۲.۷)$$

برای راحتی،  $\varepsilon$  را شامل همه توابع تعریف شده روی  $\mathbb{R}$  که در بازه  $(-\infty, 0)$  صفر می‌شود و در تعریف ۱.۱.۷ روی  $[0, \infty)$  صدق می‌کند، در نظر می‌گیریم. اکنون اگر تابع هوی ساید  $H$  را روی  $\mathbb{R} - \{0\}$  به صورت زیر تعریف کنیم:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

آنگاه توابع زیر همگی در  $\varepsilon$  قرار می‌گیرند.

۱. تابع  $H(x)g(x)$  برای هر تابع کران‌دار موضعاً انتگرال‌پذیر  $g$  روی  $\mathbb{R}$ ، مثل  $\cos x$  یا

$\sin x$ . اینجا  $\alpha$  همان‌طور که در تعریف ۱.۱.۷ ذکر شده، می‌تواند عددی نامنفی باشد.

۲. تابع  $H(x)p(x)$  به‌ازای هر چندجمله‌ای  $p$ ، اینجا  $\alpha$  عددی مثبت است.

۳. تابع  $H(x)e^{kx}$ ،  $\alpha \geq k$ .

۴. تابع  $H(x)\log x$ ،  $\alpha$  عددی مثبت است.

۵. تابع  $H(x)x^\mu$ ،  $\mu > -1$ ،  $\alpha$  عددی مثبت است.

ولی چنین توابعی مانند  $H(x)e^{x^t}$  یا  $H(x)2^{3x}$  متعلق به  $\varepsilon$  نیستند. در مثال‌های بالا از

توابع در  $\varepsilon$ ،  $f(0)$  را  $f(0^+)$  در نظر می‌گیریم و آن وابسته به چگونگی تعریف  $f$  در  $x = 0$

نیست، به همین دلیل، ما  $H$  را در نقطهٔ صفر تعریف نمی‌کنیم. میزان رشد تابع  $f$  توسط

کوچک‌ترین مقدار  $\alpha$  که  $f(x)e^{-\alpha x}$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  را کران‌دار می‌سازد، مشخص می‌شود.

وقتی چنین مقدار کوچکی وجود داشته باشد، آن را به‌عنوان مرتبهٔ نمایی  $f$  در نظر می‌گیریم

مانند  $\alpha = 0$  در (۱) و  $\alpha = k$  در (۳). در (۲)، (۴) و (۵) هر عدد مثبت را می‌توانیم در

نظر بگیریم. تابعی را که در نابرابری (۲.۷) صدق کند، مرتبهٔ نمایی می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۷. به‌ازای هر  $f \in \varepsilon$ ، تبدیل لاپلاس  $f$  را به‌ازای هر  $\text{Res} = \sigma > \alpha$  توسط

انتگرال ناسرهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx. \quad (3.7)$$

اساساً، این تعریف تضمین می‌کند که  $f(x)e^{-sx}$  در  $L^1(0, \infty)$  قرار دارد. با تخمین

(۲.۷) به ازای هر  $\sigma > \alpha$  داریم:

$$\int_0^{\infty} |f(x)e^{-(\sigma+i\xi)x}| dx \leq c \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-\alpha)x} dx < \infty.$$

می بینیم که انتگرال (۳.۷) به ازای هر  $\sigma > \alpha$  همگراست. همگرایی در نیم صفحه  $\sigma \geq \alpha + \epsilon$  به ازای هر  $\epsilon > 0$  یکنواخت است. بنابراین، می توانیم از انتگرال نسبت به  $s$  با عبور از علامت انتگرال مشتق بگیریم. انتگرال حاصل

$$- \int_0^{\infty} x f(x) e^{-sx} dx$$

همچنین در  $\sigma \geq \alpha + \epsilon$  همگرا می شود؛ در نتیجه، تبدیل لاپلاس  $L(f)$  یک تابع تحلیلی از متغیر مختلط  $s$  در نیم صفحه  $Res > \alpha$  است. مانند تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس  $L$  نیز روی کلاس توابع  $\epsilon$  خطی است؛ به طوری که

$$L(\alpha f + bg) = \alpha L(f) + bL(g), \quad \alpha, b \in \mathbb{C}, \quad f, g \in \epsilon.$$

مثال ۳.۱.۷. تابع ثابت  $f(x) = 1$  روی  $[0, \infty)$  با مرتبه‌نمایی  $\alpha = 0$  به وضوح به  $\epsilon$  تعلق دارد و تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر است:

$$L(1)(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad Res > 0$$

به طور مشابه، تابع  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده با  $f(x) = x^n$ ، با  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\alpha > 0$  به  $\epsilon$  تعلق دارد. به ازای هر  $Res > 0$  با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$L(x^n)(s) = \int_0^{\infty} x^n e^{-sx} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-sx} dx \\
&= \dots \\
&= \frac{n!}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}. \\
\Rightarrow L(x^n)(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

انتگرال پذیری  $|f(x)e^{-sx}|$  به  $Im s = \varepsilon$  بستگی ندارد؛ بنابراین، بهتر است برای ارزیابی انتگرال (۳.۷)،  $Im s = 0$  را در نظر بگیریم. تابع  $F = L(f)$  با توجه به تحلیلی بودن روی  $Res > \alpha$  در صفحه مختلط  $s$  به طور منحصر به فرد توسط مقادیر آن روی محور حقیقی  $s > \alpha$  تعیین می شود.

مثال ۱.۷.۴. به ازای هر  $\mu > -1$ ، تبدیل لاپلاس

$$L(x^\mu) = \int_0^{\infty} x^\mu e^{-sx} dx$$

وجود دارد؛ چون نقطه منفرد  $x^\mu$ ، وقتی  $x \rightarrow 0^+$  انتگرال پذیر است. برای محاسبه این انتگرال نامعین، ما فرض می کنیم  $s$  حقیقی است و  $sx = t$  را در نظر می گیریم. اگر  $s$  مثبت باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
L(x^\mu) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^\mu e^{-t} \frac{dt}{s} \\
&= \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^\mu dt \\
&= \frac{1}{s^{\mu+1}} \Gamma(\mu + 1), \quad s > 0.
\end{aligned}$$

این نتیجه اکنون می‌تواند به صورت تحلیلی به  $Res > 0$  تعمیم داده شود و به وضوح

تعمیم مثال (۳.۷) است.

مثال ۱.۷.۵. به ازای هر عدد حقیقی  $a$  داریم:

$$L(e^{ax})(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

از این رو،

$$\begin{aligned} L(\sinh ax)(s) &= L\left(\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|. \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$L(e^{iax})(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-ia)x} dx = \frac{1}{s-ia}, \quad s > 0.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} L(\sin ax)(s) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

برای به دست آوردن تابع  $f$  از تبدیل لاپلاس آن  $L(f) = F$ ، از فرمول معکوس فوریه

(۱۶.۶) استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $f \in \varepsilon$  به طوری که  $|f(x)e^{-\alpha x}|$  روی  $[0, \infty)$  برای

برخی مقادیر حقیقی  $\alpha$  انتگرال پذیر است، با انتخاب  $\beta > \alpha$  و تعریف تابع

$$g(x) = \begin{cases} f(x)e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

به وضوح به  $L^{-1}(\mathbb{R})$  تعلق دارد. تبدیل فوریه آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\beta x}e^{-i\xi x}dx = L(f)(\beta + i\xi) = F(\beta + i\xi).$$

اگر فرض کنیم که  $f$  روی  $[0, \infty)$  قطعه‌به‌قطعه هموار است آن‌گاه  $g$  نیز روی  $\mathbb{R}$  قطعه‌به‌قطعه هموار خواهد شد و می‌توانیم  $g$  را به عنوان میانگین حدود چپ و راست آن در هر نقطه ناپیوستگی تعریف کنیم. توسط قضیه ۲.۲.۶،

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)e^{-\beta x} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L F(\beta + i\xi)e^{ix\xi}d\xi, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

با  $\beta$  ثابت، متغیر مختلط  $s = \beta + i\xi$  را تعریف می‌کنیم، به طوری که  $ds = id\xi$  و انتگرال روی بازه  $(-L, L)$  به یک انتگرال روی منحنی بسته ساده در صفحه مختلط  $s$  روی پاره خط  $\beta - iL$  تا  $\beta + iL$  تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$f(x)e^{-\beta x} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{\beta - iL}^{\beta + iL} F(s)e^{x(s-\beta)}ds,$$

و

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{\beta - iL}^{\beta + iL} F(s)e^{xs}ds, \quad (4.7)$$

که فرمول معکوس موردنظر برای تبدیل لاپلاس  $L : f \rightarrow F$  است. فرمول (۴.۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = L^{-1}(F)(x),$$

که

$$L^{-1}(F)(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{\beta-iL}^{\beta+iL} F(s)e^{xs} ds$$

تبدیل لاپلاس معکوس  $F$  است.

باید در نظر داشته باشید که رابطه (۴.۷) یک تساوی نقطه به نقطه است. به عنوان مثال، برای توابعی که در  $[0, \infty)$  دارای نقاط منفرد هستند، به کار نمی‌رود؛ زیرا این فرض با فرض اینکه تابع  $f$  قطعه به قطعه هموار است، مستثنا شده است. افزون بر این، چون  $f(0^-) = 0$  داریم:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{\beta-iL}^{\beta+iL} F(s)e^{xs} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(0^+). \quad (5.7)$$

انتگرال روی منحنی بسته ساده در رابطه (۴.۷) همیشه با انتگرال گیری مستقیم، آسان نیست. برعکس، این فرمول برای ارزیابی انتگرال زمانی که تابع  $f$  معلوم باشد، استفاده می‌شود. همین مشاهدات برای رابطه (۵.۷) به کار می‌رود. به عنوان مثال، با مراجعه به مثال ۳.۱.۷، اگر  $\epsilon > 0$  باشد،

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \int_{\epsilon-iL}^{\epsilon+iL} \frac{1}{s} e^{xs} ds = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

فرمول معکوس به وضوح ایجاب می‌کند که تبدیل لاپلاس  $L$  روی توابع قطعه به قطعه هموار در  $\epsilon$  یک به یک است. بنابراین، اگر  $F = L(f)$  و  $G = L(g)$  که  $f$  و  $g$  توابع قطعه به قطعه هموار در  $\epsilon$  هستند، آنگاه

$$F = G \Rightarrow f = g.$$

## تمرین‌ها

۱.۷. تبدیل لاپلاس  $F(s)$  را برای هریک از توابع تعریف‌شده زیر روی  $(0, \infty)$  تعیین کنید.

$$f(x) = (ax + b)^{\nu} \quad \text{الف}$$

$$f(x) = \cosh x \quad \text{ب}$$

$$f(x) = \sin^{\nu} x \quad \text{پ}$$

$$f(x) = \sin x \cos x \quad \text{ت}$$

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < a \\ \cdot & a < x < \infty \end{cases} \quad \text{ث}$$

$$f(x) = \begin{cases} a - ax/b & 0 < x < b \\ \cdot & x > b \end{cases} \quad \text{ج}$$

$$f(x) = x \sinh x \quad \text{چ}$$

$$f(x) = x^{\nu} e^x \quad \text{ح}$$

$$f(x) = 1/\sqrt{x} \quad \text{خ}$$

۲.۷. تبدیل لاپلاس معکوس  $f(x)$  را برای هریک از توابع تبدیل زیر تعیین کنید.

$$F(s) = \frac{a}{s+b} \quad \text{الف}$$

$$F(s) = \frac{\nu s - \delta}{s^{\nu} - a} \quad \text{ب}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad \text{پ}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^{\nu} + \nu s} \quad \text{ت}$$

$$F(s) = \frac{\nu(s-1)}{s^{\nu} - \nu} \quad \text{ث}$$

$$F(s) = 1/s^{\nu} \quad \text{ج}$$

$$F(s) = \frac{14s^{\nu} + 55s + 51}{\nu s^{\nu} + 12s^{\nu} + 22s + 12} \quad \text{چ}$$



۳.۷. اگر  $a > 0$  باشد، ثابت کنید:

$$L(f(ax))(s) = \frac{1}{a} F(s/a)$$

که  $F(s) = L(f(x))(s)$ .

## ۲.۷ ویژگی‌ها و کاربردها

همانند تبدیل فوریه، وقتی یک تابع و مشتقات آن دارای تبدیلات لاپلاس هستند، توابع توسط فرمولی که به راحتی با استفاده از انتگرال جزء به جزء به دست می‌آید، مرتبط می‌شوند. می‌دانیم که یک تابع قطعه به قطعه پیوسته همواره موضعاً انتگرال پذیر است؛ از این رو، همه توابع قطعه به قطعه پیوسته از مرتبه‌نمایی در  $\varepsilon$  قرار می‌گیرند.

قضیه ۱.۲.۷. (۱) اگر  $f$  یک تابع پیوسته و قطعه به قطعه هموار روی  $[0, \infty)$  باشد، به طوری که هر دوی  $e^{-ax} f(x)$  و  $e^{-ax} f'(x)$  کران دار باشند، آنگاه داریم:

$$L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0^+), \quad \text{Res} > \alpha. \quad (۶.۷)$$

(۲) اگر  $f$  یک تابع قطعه به قطعه پیوسته روی  $[0, \infty)$  و  $e^{-ax} f(x)$  کران دار باشد، آنگاه داریم:

$$L\left(\int_0^x f(t) dt\right)(s) = \frac{1}{s} L(f)(s), \quad x > 0, \quad \text{Res} > \alpha. \quad (۷.۷)$$

برهان. (۱) فرضیه‌های روی  $f$ ، وجود  $L(f)(s)$  و  $L(f')(s)$  روی  $\text{Res} > \alpha$  را تضمین می‌کند. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$L(f')(s) = \int_0^{\infty} f'(x) e^{-sx} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-sx} f(x) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \\
 &= sL(f)(s) - f(0^+), \quad \text{Res} > \alpha.
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که پیوستگی  $f$  برای اینکه برابری دوم برقرار باشد، لازم است (تمرین ۹.۶ را ببینید).

(۲) فرض کنید:

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

چون تابع  $|e^{-\alpha x} f(x)|$  روی  $[0, \infty)$  توسط یک ثابت مثبت، مثلاً  $M$  کران‌دار است، داریم:

$$|g(x)| \leq M \int_0^x e^{\alpha t} dt \leq \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha x} - 1), \quad x \geq 0, \quad \alpha \neq 0.$$

ازاین‌رو،

$$e^{-\alpha x} |g(x)| \leq \frac{M}{|\alpha|}.$$

این به معنای آن است که  $e^{-\alpha x} g(x)$  روی  $[0, \infty)$  کران‌دار است.  $g$  پیوسته است و  $g' = f$  روی  $[0, \infty)$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته است، بنابراین، با استفاده از قسمت (۱) به این نتیجه می‌رسیم که

$$L(f)(s) = L(g')(s) = sL(g) - g(0^+).$$

با  $g(0^+) = 0$  به نتیجه مطلوب خواهیم رسید؛ حالتی که  $\alpha = 0$  بدیهی است.  $\square$

با استقرای روی  $n$ ، می‌توانیم رابطه ۱.۲.۷ را تا فرمول مربوط به مشتقات مرتبه  $n$ ام تعمیم دهیم و جزئیات اثبات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

**نتیجه ۱۱.** فرض کنید  $f, f', \dots, f^{n-1}$  روی  $[0, \infty)$  پیوسته و قطعه‌به‌قطعه هموار باشند. اگر  $f, f', \dots, f^n$  از مرتبه‌نمایی باشند، آنگاه

$$L(f^{(n)})(s) = s^n L(f)(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+),$$

$$Res > \alpha. \quad (۸.۷)$$

**مثال ۲.۲.۷.** (۱) با استفاده از نتیجه مثال ۵.۷ و قضیه ۶.۷، داریم:

$$\begin{aligned} L(\cos ax)(s) &= L\left(\frac{1}{a} \frac{d}{dx} \sin ax\right)(s) \\ &= \frac{1}{a} \left(s \frac{a}{s^2 + a^2} - \sin 0\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

(۲)

$$L(f)(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)}, \quad s > 1,$$

داده شده است. با استفاده از فرمول (۷.۷) به دست می‌آوریم:

$$f(s) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 - 1)}\right)(x) = \int_0^x \sinh t dt = \cosh x - 1.$$

برطبق قضیه ۱.۲.۷، مشتق‌گیری از  $F$  تحت  $L$  به ضرب در  $s$  منهای  $f(0^+)$  تبدیل می‌شود و انتگرال‌گیری روی  $(0, x)$  به تقسیم  $s$  تبدیل می‌شود. برعکس، اگر  $f \in \mathcal{E}$  و

$L(f) = F$  باشد، آنگاه می‌توانیم نشان دهیم که

$$L(xf)(s) = -\frac{d}{ds}L(f)(s) = -F'(s) \quad (۹.۷)$$

$$L(f/x)(s) = \int_s^{\infty} F(z)dz, \quad (۱۰.۷)$$

که در رابطه (۱۰.۷) فرض شده است که تابع  $f(x)/x$  موضعاً انتگرال‌پذیر است و منحنی ساده بسته انتگرال در صفحه  $z$  از  $s$  تا  $\infty$  به‌گونه‌ای است که  $Imz$  کران‌دار باقی می‌ماند. اثبات این دو فرمول را به خواننده واگذار می‌کنیم.

### ۱.۲.۷ کاربردها در معادلات دیفرانسیل معمولی

قضیه ۶.۷ و نتیجه آن باعث می‌شود تبدیل لاپلاس، ابزاری مؤثر برای حل مسائل مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی باشد؛ به‌ویژه هنگامی که ضرایب در معادله ثابت هستند. برای حل یک معادله دیفرانسیل با این روش، نخست معادله دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به یک معادله جبری تبدیل می‌کنیم و جواب معادله جبری را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از تبدیل معکوس از جواب معادله جبری، جواب معادله اصلی را پیدا می‌کنیم. به‌عنوان مثال، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad x > 0, \quad (۱۱.۷)$$

را که  $a$  و  $b$  ثابت هستند، تحت شرایط اولیه زیر در نظر بگیرید:

$$y(0^+) = y_0, \quad y'(0^+) = y_1. \quad (۱۲.۷)$$

با استفاده از نتیجه ۱۱، با  $L(y) = Y$  و  $L(f) = F$  به دست می‌آوریم:

$$s^2 Y - sy_0 - y_1 + a(sY - y_0) + bY = F.$$

از این رو،

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b},$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= L^{-1}(Y)(x) \\ &= L^{-1} \left[ \frac{F(s)}{s^2 + as + b} \right] (x) + L^{-1} \left[ \frac{y_0(s + a) + y_1}{s^2 + as + b} \right] (x) \\ &= y_p(x) + y_h(x). \end{aligned}$$

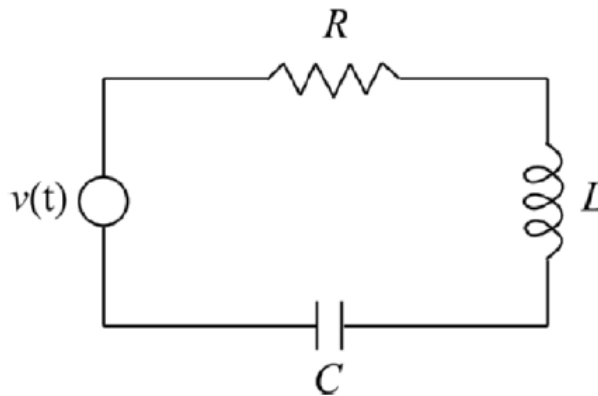
جواب  $y_p$  یک جواب خصوصی معادله ناهمگن (۱۱.۷) و  $y_h$  یک جواب معادله همگن متناظر است. این روش، یک راه مناسب برای به دست آوردن  $y_p$  فراهم می‌کند، به ویژه زمانی که تابع  $f$  پیوسته نباشد. بخش همگن جواب تبدیل معکوس ساده از یک تابع گویا بر حسب  $s$  است که ممکن است با استفاده از کسرهای جزئی محاسبه شود و وقتی که شرایط اولیه روی  $y$  و  $y'$  همگن باشد، یعنی وقتی  $y_0 = y_1 = 0$  است، صفر می‌شود. بنابراین، جمله‌های ناهمگن در هر معادله دیفرانسیل یا شرط مرزی، تنها جمله‌های بیشتری به تابع تبدیل  $Y$  اضافه می‌کند. ولی در سایر جاها پیچیدگی اضافی ندارد.

معادله‌های (۱۱.۷) و (۱۲.۷)، در واقع یک مدل ریاضی برای جریان جاری در یک مدار الکتریکی RLC است. [تعریف مدار RLC: مدار الکتریکی شامل یک مقاومت در

سمت چپ، یک سلف در وسط و یک خازن در سمت راست است. یک مدار نوسان‌ساز است و دامنه نوسانات این مدار در طول زمان کم کم کاهش می‌یابد. [همان‌طور که در شکل ۲.۷ نشان داده می‌شود، این مدار شامل یک مقاومت که توسط  $R$  سنجیده می‌شود، یک خودالقای  $L$  و یک خازن  $C$  که به صورت سری به هم متصل‌اند و توسط یک ولتاژ ورودی  $v(t)$  تأمین می‌شوند که به زمان وابسته است. اگر  $y(t)$  نشان‌دهنده جریان در مدار باشد، آن‌گاه افت پتانسیل در هر سه عنصر مدار به ترتیب به صورت زیر است:

$$v_R(t) = Ry(t), \quad v_L(t) = Ly'(t), \quad v_C = \frac{1}{C} \int_t^t y(\tau) d\tau.$$

با توجه به قانون کیرشهف، مجموع افت پتانسیل برابر با ولتاژ ورودی است:



شکل ۲.۷: مدار  $RLC$

$$Ry + Ly' + \frac{1}{C} \int_t^t y(\tau) d\tau = v(t).$$

با مشتق‌گیری نسبت به  $t$  و تقسیم‌کردن بر  $L$ ، در انتها به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$y'' + \frac{R}{L}y' + \frac{1}{LC}y = f(t),$$

که ضرایب ثابت هستند و  $f = v'/L$  داده شده است. اگر  $y$  و  $y'$  در  $t = 0$  وقتی کلید مدار بسته است مشخص شوند، آنگاه ما یک دستگاه از معادله‌های مشابه معادله‌های (۱۱.۷) و (۱۲.۷) داریم. جریان، با حل دستگاه در طول خطوط توضیح داده شده در بالا تعیین می‌شود.

مثال ۳.۲.۷. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 6y = e^{-t}, \quad t > 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

حل: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل بالا به صورت

$$s^2 Y + 4sY + 6Y = \frac{1}{s+1},$$

و تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+6)} = \frac{1}{(s+1)[(s+2)^2+2]}.$$

برای معکوس کردن این تابع گویا از کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم، داریم:

$$Y(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{s+2}{(s+2)^2+2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(s+2)^2+2}.$$

با خطی بودن تبدیل معکوس، داریم:

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} L^{-1} \left[ \frac{s+2}{(s+2)^2+2} \right] (t) - \frac{1}{3} L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+2)^2+2} \right] (t). \quad (13.7)$$

برای محاسبه دو عبارت پایانی، لازم است که اثر انتقال در  $s$  روی تبدیل لاپلاس معکوس

$L^{-1}$  را تعیین کنیم. این توسط قضیه انتقال زیر فراهم می‌شود.

قضیه ۴.۲.۷. اگر  $f \in \mathcal{E}$  و  $L(f)(s) = F(s)$  روی  $Res > \alpha$  باشد، آنگاه داریم:

$$L(e^{ax}f)(s) = F(s-a), \quad s-a > \alpha, \quad (14.7)$$

$$L[H(x-a)f(x-a)](s) = e^{-as}F(s), \quad a \geq 0, s > \alpha. \quad (15.7)$$

برهان. معادله (۱۴.۷) یک نتیجه مستقیم از تعریف تبدیل لاپلاس است

$$\begin{aligned} L(e^{ax}f)(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-(s-a)x} dx, \\ &= F(s-a), \quad s-a > \alpha. \end{aligned}$$

برای اثبات (۱۵.۷) توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned} e^{-as}F(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)} dx \\ &= \int_a^{\infty} f(x-a)e^{-sx} dx \\ &= \int_0^{\infty} H(x-a)f(x-a)e^{-sx} dx \\ &= L[H(x-a)f(x-a)](s). \end{aligned}$$

□

به معادله (۱۳.۷) در مثال ۳.۲.۷ برمی‌گردیم، چون

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2}\right)(t) = \cos \sqrt{2}t$$



$$L^{-1} \left( \frac{1}{s^2 + 2} \right) (t) = \frac{1}{\sqrt{2}} L^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t,$$

با به کاربردن فرمول (۱۴.۷) به دست می‌آوریم:

$$L^{-1} \left[ \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 2} \right] (t) = e^{-2t} \cos \sqrt{2}t$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{(s + 2)^2 + 2} \right] (t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2t} \sin \sqrt{2}t.$$

بنابراین، جواب (۱۳.۷) به صورت زیر معین می‌شود:

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \left( \frac{1}{3} \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{3\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \right) e^{-2t}.$$

**تبصره ۵.۲.۷.** ممکن است شگفت زده شوید که چرا معادله مرتبه دوم مثال بالا باید دو شرط اولیه در  $x = 0$  برای تعیین جوابش داشته باشد، درحالی که یک معادله مشابه،  $y - y'' = f$  با  $0 < x < \infty$ ، که در پایان فصل ششم مورد بحث قرار گرفته بود، تنها یک شرط، یعنی  $y(0) = y_0$  را لازم دارد. دلیل این امر آن است که معادله آخر با استفاده از تبدیل فوریه با این فرض حل شد که  $y$  یک تابع  $L^1$  است، که با پیوسته بودن، وقتی  $x \rightarrow \infty$  به  $0$  میل می‌کند، این شرط مرزی دوم را تشکیل می‌دهد.

در مثال ۴.۲.۷، ما تنها می‌توانیم از روش معمول برای حل معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت استفاده کنیم؛ ولی در مثال زیر که جمله ناهمگن پیوسته نیست، مزیت آشکار برای استفاده از تبدیل لاپلاس وجود دارد.

**مثال ۶.۲.۷.** مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

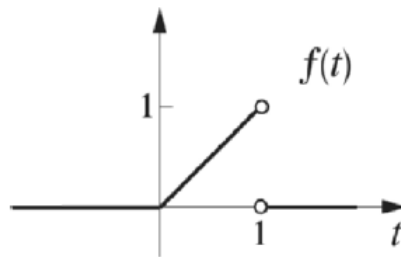
$$y' + 3y = f(t), \quad t > 0,$$

$$y(0) = 1,$$

که

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

در اینجا  $y(t)$ ، جریان را در یک مدار RL نشان می‌دهد که در آن ولتاژ ورودی  $f(t) = t$



شکل ۳.۷: تابع  $f(t)$

در  $t = 0$  روشن و سپس در  $t = 1$  خاموش می‌شود.

حل: با نشان دادن  $f$  به صورت  $f(t) = t[H(t) - H(t - 1)]$ ، می‌توانیم با استفاده از

فرمول (۹.۷) و قضیه ۴.۲.۷ بنویسیم:

$$\begin{aligned} L(f)(s) &= -\frac{d}{ds}L[H(t) - H(t - 1)](s) \\ &= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right] \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

معادله تبدیل شده به صورت زیر است:

$$(s + 3)Y(s) - 1 = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+3} - e^{-s} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+3} - e^{-s} \frac{1}{s} \frac{1}{s+3}.$$

با

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}H(t),$$

با استفاده از (۷.۷) می‌نویسیم:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} \frac{1}{s+3}\right)(t) = \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})H(t)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \frac{1}{s+3}\right)(t) = \int_0^t \frac{1}{3}(1 - e^{-3\tau})d\tau = \frac{1}{3}\left(t + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}\right)H(t).$$

اکنون رابطه (۱۵.۷) ایجاب می‌کند که

$$L^{-1}\left(e^{-s} \frac{1}{s} \frac{1}{s+3}\right)(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})H(t-1)$$

$$L^{-1}\left(e^{-s} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s+3}\right)(t) = \frac{1}{3}\left[(t-1) + \frac{1}{3}e^{-3(t-1)} - \frac{1}{3}\right]H(t-1),$$

ازاین‌رو، داریم:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}\right)H(t) - \frac{1}{3}\left(t - \frac{2}{3}e^{-3(t-1)} - \frac{1}{3}\right)H(t-1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}e^{-3t}, & 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{9}e^{-3t}, & t > 1, \end{cases}$$

اگرچه  $f$  در  $x = 1$  ناپیوسته است، جواب  $y$  روی  $(0, \infty)$  پیوسته است. این انتظار می‌رود،زیرا خودالقایی  $L$  اجازه تغییر ناگهانی جریان در مدار RL را نمی‌دهد.

روش مورد به کاررفته برای به‌دست آوردن جواب‌ها در مثال‌های ۲.۲.۷، ۳.۲.۷ و

۶.۲.۷، بخشی از مجموعه تکنیک‌ها را براساس ویژگی‌های تبدیل لاپلاس، معروف به

محاسبات عملی که توسط فیزیک‌دان انگلیسی الیور هویزید<sup>۱</sup> (۱۸۵۰-۱۹۲۵) برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مدارهای الکتریکی توسعه داده شده بود، تشکیل می‌دهد. همان‌طور که مثال بعدی نشان می‌دهد، این روش به معادلات با ضرایب ثابت محدود نمی‌شود.

مثال ۲.۷.۷. با تبدیل لاپلاس، معادله لاگر

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$-\frac{d}{ds}[s^{\nu}Y - sy(0) - y'(0)] + sY - y(0) + \frac{d}{ds}[sY - y(0)] + nY = 0$$

$$(s - s^{\nu})Y' + (n + 1 - s)Y = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{n + 1 - s}{s(s - 1)} = \frac{n}{s - 1} - \frac{n + 1}{s}$$

با انتگرال‌گیری از معادله پایانی، به دست می‌آوریم:

$$Y(s) = c \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}},$$

که  $c$  ثابت انتگرال‌گیری است. با در نظر گرفتن تبدیل معکوس، داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= cL^{-1} \left[ \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}} \right] (x) \\ &= ce^x L^{-1} \left[ \frac{s^n}{(s + 1)^{n+1}} \right] (x) \\ &= \frac{c}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \end{aligned}$$

چندجمله‌ای لاگر  $L_n$  با در نظر گرفتن  $c = 1$  به دست می‌آید.

<sup>1</sup>Oliver Heaviside

## ۲.۲.۷ معادله تلگراف

همچنین تبدیل لاپلاس می‌تواند برای حل مسائل مقدار مرزی برای معادلات دیفرانسیل جزئی به کار رود، به‌ویژه وقتی شامل متغیر زمان  $t$  باشد، در این صورت، تبدیل می‌تواند نسبت به  $t$  روی بازه نیمه نامتناهی  $[0, \infty)$  اعمال شود. معادله

$$u_{xx} = Au_{tt} + Bu_t + Cu, \quad 0 < t < \infty, \quad (16.7)$$

را در نظر بگیرید که  $A$ ،  $B$  و  $C$  ثابت‌های نامنفی هستند. این معادله که به معادله تلگراف معروف است، یک سیگنال الکترومغناطیسی  $u(x, t)$  مانند جریان الکتریکی یا ولتاژ را توصیف می‌کند که در امتداد خط انتقال حرکت می‌کند. ثابت‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  با خودالقایی توزیع شده، مقاومت و ظرفیت الکتریکی (در واحد طول) در امتداد خط تعیین می‌شوند (به [۷] مراجعه کنید، جلد ۲). اگر خط انتقال را روی  $-\infty < x < \infty$  توسعه دهیم، آن‌گاه دو شرط اولیه (در  $t = 0$ ) در  $u$  و  $u_t$  برای مشخص کردن  $u$  کافی است. ولی اگر آن روی  $0 \leq x < \infty$  گسترش یابد، آن‌گاه باید  $u$  را در  $x = 0$  هم مشخص کنیم؛ در این صورت، شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \geq 0,$$

$$u_t(x, 0) = h(x), \quad x \geq 0.$$

اینجا  $f(t)$  سیگنال ورودی است که منتقل می‌شود و دو شرط اولیه مورد نیاز است، زیرا معادله (۱۶.۷) از مرتبه دوم برحسب  $t$  است (اگر  $A = 0$  باشد نیاز به شرط روی  $u_t$

نیست). ما می‌توانیم معادله (۱۶.۷) توسط جداسازی متغیرها، با استفاده از انتگرال فوریه همان‌طور که پیش از این انجام دادیم حل کنیم، ولی این واقعیت که همه شرایط مرزی غیرهمگن هستند، روند کار را دشوارتر می‌کند. همچنین، محدودیت‌های غیرضروری روی رفتار  $u$  و  $f$  وقتی  $t \rightarrow \infty$  میل می‌کند، قرار می‌دهد.

می‌توانیم با حل (۱۶.۷) تحت دو مجموعه شرایط مرزی، ابتدا با شرط  $f = 0$  و سپس با  $g = h = 0$  کارها را ساده‌تر کنیم؛ چون (۱۶.۷)، خطی و همگن است. مجموع این دو جواب هم، یک جواب معادله است و آن در سه شرط مرزی ناهمگن صدق می‌کند. در هر دو حالت می‌توان از تبدیل لاپلاس برای ساختن جواب استفاده قرار کرد. حالت دوم را در نظر می‌گیریم که شرایط مرزی به صورت زیر هستند:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

فرض می‌کنیم که  $u, f, u_x, u_{xx}, u_t$  و  $u_{tt}$  همگی به عنوان تابعی از  $t$  در  $\varepsilon$  قرار می‌گیرند و  $u$  و مشتقات جزئی اول آن، توابعی قطعه‌به‌قطعه هموار از  $t$  هستند. می‌توانیم تبدیل لاپلاس نسبت به  $t$  برای معادله (۱۶.۷) به کار ببریم. داریم:

$$U_{xx} = (As^2 + Bs + C)U, \quad (17.7)$$

که

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t)e^{-st} dt \quad (18.7)$$

و  $Res$  بزرگتر از مقدار حقیقی  $\alpha$  است. برای مثال، اگر سینگال  $u$  کران دار شود، می‌توانیم  $\alpha = 0$  در نظر بگیریم. توجه داشته باشید که مشتق نسبت به  $x$  می‌تواند در داخل انتگرال (۱۸.۷) انجام گیرد، زیرا آخری روی  $Res > \alpha + \epsilon$  به‌ازای هر  $\epsilon > 0$  به‌طور یکنواخت همگرا می‌شود. به‌ازای هر مقدار ثابت پارامتر  $s$ ، معادله (۱۷.۷) جواب عمومی زیر را دارد:

$$U(x, s) = c_1(s)e^{\lambda(s)x} + c_2(s)e^{-\lambda(s)x},$$

که  $\lambda(s) = \sqrt{As^2 + Bs + C}$  و  $c_1 + c_2 = U(0, s) = L(f)(s) = F(s)$  است. اگر ما شاخه اصلی ریشه دوم را در نظر بگیریم، که در آن  $Re\lambda(s) > 0$ ، جواب  $e^{\lambda(s)x}$  در نیمه راست صفحه  $s$  بی‌کران می‌شود بنابراین، باید کنار گذاشته شود. با جایگزین کردن  $c_1 = 0$ ، تابع تبدیل حاصل

$$U(x, s) = F(s)e^{-\lambda(s)x}$$

با تبدیل معکوس‌گیری از آن جواب مطلوب به‌صورت  $u(x, t) = L^{-1}(u)(x, t)$  است، اگرچه ممکن است محاسبات انجام‌شده بسیار خسته‌کننده باشد. با وجود این، تعدادی از حالت‌های خاص از معادله (۱۶.۷) وجود دارد که جواب را می‌توان به‌طور صریح به‌دست آورد.

۱. اگر  $A = 1/c^2$  و  $B = C = 0$ ، (۱۶.۷) می‌تواند به معادله موج زیر تبدیل شود

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

اینجا تابع تبدیل

$$U(x, s) = e^{-sx/c} F(s)$$

با استفاده از فرمول (۱۵.۷) به راحتی معکوس می‌شود. داریم:

$$u(x, t) = H(t - x/s)f(t - x/s).$$

این عبارت نشان می‌دهد که هیچ سیگنالی در نقطه  $x$  تا  $t = x/c$  وجود ندارد. بنابراین، سیگنال  $f(t)$  بدون تغییر شکل یا میرایی و با سرعت  $c$  به پایین خط حرکت می‌کند. این انتظار می‌رفت، زیرا در حال حاضر عامل میرایی  $Bu_t$  وجود ندارد و در نتیجه، در انتقال، هیچ انرژی از بین نمی‌رود.

۲. اگر  $As^2 + Bs + C = (s + b)^2/c^2$  یک مربع کامل باشد، آنگاه داریم:

$$U(x, s) = e^{-(s+b)x/c}F(s)$$

و جواب به صورت زیر است:

$$u(x, t) = e^{-bx/c}H(t - x/c)f(t - x/c).$$

اینجا سیگنال  $f(t)$  مجدد با سرعت  $c$  بدون تغییر شکل به پایین خط حرکت می‌کند، ولی عامل میرایی  $e^{-bx/c}$  ضعیف می‌شود. خط انتقال اگر به گونه‌ای طراحی شود که مقاومت توزیع شده، ضریب خودالقایی و ظرفیت الکتریکی در رابطه  $B^2 = 4AC$  صدق کنند، بدون تغییر شکل باقی می‌ماند. علاقه‌مندان به مطالعه مطالب دیگر در مورد معادله تلگراف می‌توانند به [۱۰] مراجعه کنند.

۳. اگر  $A = C = 0$  و  $B = 1/k$  باشد، که  $k$  ثابت مثبت است، معادله گرمای زیر را به دست می‌آوریم:

$$u_t = ku_{xx}.$$



در این حالت، تبدیل لاپلاس  $u$ ،

$$U(x, s) = e^{-x\sqrt{s/k}} F(s), \quad (19.7)$$

است که به راحتی معکوس پذیر نیست. برای به دست آوردن  $L^{-1}(U)$ ، قاعده دیگری نیاز داریم که به ما امکان می دهد تا حاصل ضرب دو تبدیل را معکوس کنیم. مشابه تبدیل فوریه، باید انتظار داشته باشیم که این، تلفیق تبدیل های معکوس را هم شامل می شود.

اگر توابع  $f$  و  $g$  روی  $[0, \infty)$  موضعاً انتگرال پذیر باشد، آنگاه تلفیق شان

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = g * f(x)$$

خوش تعریف و روی  $[0, \infty)$  موضعاً انتگرال پذیر است؛ زیرا اگر  $[a, b]$  یک بازه متناهی در  $[0, \infty)$  باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f * g(x)|dx &\leq \int_a^b \int_0^x |f(x-t)||g(t)|dtdx \\ &= \int_a^b \int_0^b H(x-t)|f(x-t)||g(t)|dtdx \\ &= \int_0^b \left[ \int_a^b H(x-t)|f(x-t)|dx \right] |g(t)|dt \\ &\leq \int_0^b \left[ \int_{a-t}^{b-t} H(y)|f(y)|dy \right] |g(t)|dt. \end{aligned}$$

چون  $f$  موضعاً انتگرال پذیر است و  $0 \leq t \leq b$ ، انتگرال  $H|f|$  روی  $[a-t, b-t]$  توسط یک ثابت به طور یکنواخت کران دار است و چون  $g$  نیز موضعاً انتگرال پذیر است،  $|f * g|$  روی  $[a, b]$  انتگرال پذیر است. تلفیق  $f * g$  نیز اگر هر کدام از  $f$  یا  $g$  (قطعه به قطعه) پیوسته باشد، (قطعه به قطعه) پیوسته است و (قطعه به قطعه) هموار است اگر  $f$  یا  $g$  (قطعه به قطعه)

هموار باشند (تمرین ۱۶.۷).

اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  میل می‌کند توسط  $e^{\alpha x}$  کران‌دار شود، آن‌گاه می‌توان به راحتی بررسی کرد که  $f * g(x)$  توسط  $e^{\beta x}$  برای هر  $\beta > \alpha$  کران‌دار خواهد شد؛ در نتیجه، اگر  $f$  و  $g$  متعلق به  $\varepsilon$  باشند، آن‌گاه تلفیق‌شان  $f * g$  متعلق به  $\varepsilon$  است و تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} L(f * g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t) dt dx \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(x-t) f(t)g(x-t) e^{-sx} dt dx \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} g(y) e^{-s(t+y)} dy dt \\ &= L(f)L(g)(s). \end{aligned}$$

در برابری سوم، ترتیب انتگرال‌گیری عوض می‌شود و این امر با همگرایی یکنواخت انتگرال دوگانه روی  $Res \geq \beta + \varepsilon$  به ازای هر  $\varepsilon$  مثبت قابل توجیه است. بنابراین، قضیه تلفیق زیر را که مطابق با قضیه ۷.۳.۶ برای تبدیل فوریه است، اثبات کرده‌ایم.

قضیه ۸.۲.۷. فرض کنید  $f, g \in \varepsilon$ . اگر  $L(f)(s) = F(s)$  و  $L(g)(s) = G(s)$  آن‌گاه داریم:

$$L(f * g)(s) = F(s)G(s).$$

با توجه به معادله (۱۹.۷)، نتیجه می‌گیریم که

$$u(x, t) = L^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}} F(s))(t)$$

$$= f * L^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}})(t).$$

تابع  $L^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}})(t)$  را می‌توان با استفاده از فرمول معکوس (۴.۷) تعیین کرد، که به برخی دستکاری‌های انتگرال روی منحنی بسته ساده نیاز دارد (تمرین ۲۱.۷ را ببینید)، یا می‌توان در جدول تبدیلات لاپلاس پیدا کرد. در هریک از دو حالت، داریم:

$$L^{-1}(e^{-x\sqrt{s/k}})(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi kt^3}} e^{-x^2/4kt}.$$

از این رو، خواهیم داشت:

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^t f(t-\tau) \tau^{-3/2} e^{-x^2/4k\tau} d\tau. \quad (20.7)$$

در اینجا جواب  $u$  تفاوت چشمگیری با دو حالت اول دارد. در هر زمان  $t$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  و همچنین در هر نقطه  $x$  وقتی که  $t \rightarrow \infty$ ، به صفر میل می‌کند و سیگنال  $f$  چون در امتداد خط بدون سرعت ثابت منتشر می‌شود. تغییر شکل می‌دهد. جای شگفتی نیست، چون معادله اصلی (۱۶.۷) با حذف عبارت اول به‌طور اساسی تغییر می‌کند و از یک معادله هذلولوی، با جواب‌های موجی، به یک معادله سهموی که جواب‌هایش به روش پراکنده حرکت می‌کند، به همان روشی که گرما یا گاز پخش می‌شود، تغییر می‌کند.

### تمرین‌ها

۴.۷. هریک از توابع زیر را رسم کنید و تبدیل لاپلاس آن را تعیین کنید.

الف)  $(x-1)H(x-1)$ .

ب)  $(x-1)^2 H(x-1)$ .

$$\text{پ) } x^2 [H(x-1) - H(x-3)]$$

$$\text{ت) } H(x - \pi/2) \cos x$$

$$\text{ث) } (1 - e^{-x})[H(x) - H(x-1)]$$

۵.۷. از تابع هوی‌ساید برای نشان دادن تابع

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ e^{1-x}, & x > 1 \end{cases},$$

با یک عبارت واحد استفاده کنید. تابع را رسم کنید و تبدیل لاپلاس آن را تعیین کنید.

۶.۷. تبدیل لاپلاس معکوس را برای هریک از توابع زیر تعیین کنید.

$$\text{الف) } \frac{e^{-fs}}{s^2}$$

$$\text{ب) } \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{پ) } \frac{1}{s}(e^{-3s} + e^{-s})$$

$$\text{ت) } \frac{1}{s-1}(e^{-3s} + e^{-s})$$

$$\text{ث) } \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+9}$$

۷.۷. اگر فرض نشود که  $f$  در قضیه ۱.۲.۷ قسمت (الف) پیوسته است، معادله (۶.۷)

چگونه به نظر می‌رسد؟

۸.۷. مسئله‌های مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$$

$$\text{ب) } 9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1$$

$$\text{پ) } y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 3$$

$$\text{ت) } y'' + 2y' - 8y = -256x^3, y(0) = 15, y'(0) = 36$$

$$.y'' - 3y' + 2y = H(t - 1), y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (\text{ث})$$

$$.y' + 2y = H[H(x) - H(x - 1)] \quad (\text{ج})$$

$$.y' + y = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ -2 \sin x & x > \pi \end{cases}, y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (\text{چ})$$

۹.۷. معکوس هریک از تبدیلات زیر را بنویسید.

$$\cdot \frac{s}{(s^2+4)^2} \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \log\left(\frac{s}{s-1}\right) \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \log\left(\frac{s+a}{s+b}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\cdot \cot^{-1}(s+1) \quad (\text{د})$$

۱۰.۷. تابع  $Si: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تعریف شده توسط انتگرال ناسره

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

انتگرال سینوسی نامیده می شود. ثابت کنید که

$$L\left(\frac{\sin x}{x}\right)(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$L[Si(x)](s) = \frac{1}{s} \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right).$$

۱۱.۷. (الف) فرض کنید  $f \in \varepsilon$  تابع متناوب روی  $[0, \infty)$  با دوره  $0 < p$  است نشان

دهید که

$$L(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p f(x) e^{-sx} dx, \quad s > 0.$$

(ب) با استفاده از اینکه  $f(x) = x$  روی  $(0, 1)$  و  $f(x+1) = f(x)$  به ازای هر  $x > 0$

و  $f(x) = 0$  است، به ازای هر  $x < 0$ ،  $L(f)$  را محاسبه کنید.

۱۲.۷. ثابت کنید  $L(f)(s) \rightarrow 0$  چون به ازای هر  $f \in \varepsilon$ ،  $Res \rightarrow \infty$ .

۱۳.۷. با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله انتگرال  $\int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = f(x)$  را حل کنید و شرایطی را روی  $f$  تعریف کنید که اطمینان حاصل شود این روش کارآمد است.

۱۴.۷. اگر  $f(x) = e^x$  و  $g(x) = 1/\sqrt{\pi x}$  باشد، ثابت کنید که

$$f * g(x) = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x}).$$

با استفاده از این،  $L[e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})]$  و  $L[\operatorname{erf}(\sqrt{x})]$  را محاسبه کنید.

۱۵.۷.  $L[x]$  را در جایی که  $[x]$  قسمت صحیح از عدد حقیقی نامنفی  $x$  است، یعنی به ازای

$$x \in [n, n+1),$$

$$[x] = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

تعیین کنید.

۱۶.۷. دو تابع موضعاً انتگرال پذیر  $f, g \in [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  را در نظر بگیرید. نشان دهید

که

الف)  $f * g$  پیوسته (هموار) است، اگر  $f$  یا  $g$  پیوسته (هموار) باشد.

ب)  $f * g$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته (هموار) است اگر  $f$  یا  $g$  قطعه‌به‌قطعه پیوسته (هموار)

باشد.

۱۷.۷. با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب معادله موج

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x > 0, t > 0,$$

را با شرط مرزی

$$u(x, 0) = \cos x, \quad t > 0,$$

و شرایط اولیه

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

به دست آورید.

۱۸.۷. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$u_t - au = ku_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

۱۹.۷. مسئله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$u_{tt} + \gamma u_t + u = c^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

۲۰.۷. در معادله (۲۰.۷) ثابت کنید زمانی که  $u(x, t) \rightarrow f(t)$  میل کند، در نتیجه  $x \rightarrow 0$

میل می کند.

۲۱.۷. با استفاده از انتگرال روی منحنی بسته ساده در  $s$ -صفحه ثابت کنید که

$$L^{-1}(e^{a\sqrt{s}/\sqrt{s}})(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-a^2/x},$$

که در آن اگر  $a > 0$  باشد، فرمول زیر را نتیجه می‌دهد:

$$L^{-1}(e^{a\sqrt{s}})(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi x^3}} e^{-a^2/4x}.$$





# فصل ۸

## تمرین‌ها

### فصل ۱

۲.۱. (الف) فضای برداری مختلط، (ب) فضای برداری حقیقی، (ج) فضای برداری نیست،

(د) فضای برداری حقیقی.

۴.۱. فرض کنید که اعداد متفاوت هستند و نشان دهید که این امر باعث تناقض می‌شود.

با فرض  $x_1, \dots, x_n$  و  $y_1, \dots, y_{n+1}$  پایه‌های یک فضای برداری یکسان هستند، برای

هر  $y_i, 0 \leq i \leq n$  را به صورت ترکیب خطی از  $x_1, \dots, x_n$  بیان کنید. دستگاه حاصل از

$n$  معادله خطی را می‌توان به طور منحصر به فرد برای هر  $x_i, 0 \leq i \leq n$  ترکیب خطی از  $y_i$

(چرا؟) حل کرد. چون  $y_{n+1}$  نیز ترکیب خطی از  $x_1, \dots, x_n$  (و از این رو،  $y_1, \dots, y_n$ )

است بنابراین، این با استقلال خطی  $y_1, \dots, y_{n+1}$  مغایرت دارد.

۷.۱. می‌دانید که دترمینان صفر است، اگر و تنها اگر یکی از سطرها (یا ستون‌های آن)

ترکیبی خطی از سطرهای دیگر (یا ستون‌ها) باشد.

۸.۱. از برابری  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$  استفاده کنید.  $x = (1, 1)$

و  $y = (i, i)$  را در نظر بگیرید.

۱۰۱. (الف) ۰، (ب)  $3/2$ ، (ج)  $3/8$ ، (د)  $\sqrt{14}$ .

۱۲.۱  $\langle f, f_2 \rangle / \|f_2\| = \sqrt{\pi}/2$ ،  $\langle f, f_1 \rangle / \|f_1\| = 0$ ،  $\langle f, f_1 \rangle / \|f_1\| = \sqrt{\pi}/2$ .

۱۴.۱. خیر، زیرا  $|x| = x$  روی  $[0, 1]$ .

۱۷.۱  $b = 1/6$ ،  $a = 1$ .

۲۱.۱. از تعریف انتگرال ریمان استفاده کنید تا نشان دهید که  $f$  انتگرال پذیر نیست.

۲۲.۱. (الف)  $1/\sqrt{2}$ ، (ب) روی  $L^2$  نیست، (ج) ۱، (د) روی  $L^2$  نیست.

۲۳.۱. اثبات را در ابتدای بخش ۳.۱ بررسی کنید.

۲۴.۱. از تمرین ۲۳.۱ استفاده کنید تا نشان دهید که  $f$ ،  $g$  باید وایسته خطی باشند. با

فرض  $g = af$  نشان دهید که  $a \geq 0$  است.

۲۵.۱  $\alpha > -1/2$ .

۲۶.۱  $\alpha < -1/2$ .

۲۸.۱. از نامساوی کوشی-شوارتز استفاده کنید.  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  روی  $(0, 1]$  باشد.

۳۰.۱  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ .

۳۲.۱. از اصل برای هر چند جمله‌ای  $p$ ،  $p(x)e^{-x} \rightarrow 0$  آن‌گاه  $x \rightarrow \infty$  استفاده کنید.

۳۴.۱. (الف) حد تابع ناپیوسته است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ 1/2, & x = 1 \\ \text{تعریف نشده}, & x = -1 \end{cases}$$

۳۵.۱. (الف) نقطه به نقطه، (ب) یکنواخت، (ج) نقطه به نقطه.

۳۷.۱. همگرایی نقطه به نقطه به

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

۴۰.۱. دامنه تعریف  $f_n$  کران دار نیست.

۴۲.۱. (الف)  $\mathbb{R}$ ، (ب)  $x \neq -1$ .

۵۰.۱. (الف) ۱، (ب) ۱، (ج) ۰.

۵۱.۱. (الف) همگرا، (ب) همگرا، (ج) واگرا.

۵۷.۱.  $c_1 = 1, c_2 = -2/\pi, c_3 = -1/\pi$ .

۵۸.۱.  $a_1 = \pi/2, a_2 = -4/\pi, a_3 = 0, a_4 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0$ .

۶۱.۱.  $a_k = 1/n$ . همگرایی  $L^1$ .

## فصل ۲

۱.۲. (الف)  $y = e^{\sqrt{x}}(c_1 \cos \sqrt{x} + c_2 \sin \sqrt{x}) + e^{x/4}$

(ب)  $y = c_1 x^2 + c_2 + x^3$

(ج)  $y = x^{-1}(c_1 + c_2 \log x) + \frac{1}{x}x - 1$

۳.۲.  $y = c_1(1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \dots) + c_2(x - x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots), c_{n+2} = -\frac{2}{n+1}c_n$

$|x| < 1$ .

۵.۲. معادله درجه دوم حداکثر دو جواب مستقل خطی دارد.

۷.۲. (الف)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ ، (ب)  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ ، (ج)  $xy'' + y' = 0$ .

۸.۲. با استفاده از لم ۷.۲ و اصل اینکه یک مجموعه نامتناهی کران دار روی اعداد حقیقی

حداقل یک انباشتگی (یا حدی) دارد. این ویژگی اعداد حقیقی (و مختلط) به‌عنوان قضیه بولتزانو-وایرستراس شناخته می‌شود (به [؟] مراجعه کنید).

۱۰.۲. از قضیه ۱۰.۲ استفاده کنید.

۱۲.۲. جواب‌های (الف) و (ب) نوسانی هستند.

۱۳.۲.  $y = x^{-1/\alpha}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ . صفرهای  $x^{-1/\alpha} \cos x$  برابر  $\{\frac{\pi}{\alpha} + n\pi\}$

است و  $x^{-1/\alpha} \sin x$  برابر  $n\pi$ ، برای هر  $n \in \mathbb{Z}$  است.

۱۵.۲. از قضیه ۱۰.۲ استفاده کنید.

۱۷.۲. (الف)  $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ، (ب)  $e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ,  $\Re\sqrt{\lambda} > 0$ .

۱۹.۲. (الف)  $\rho = 1/x^\alpha$ ، (ب)  $\rho = e^{-x^\alpha}$ .

۲۱.۲.  $u_n(x) = e^{-x} \sin \lambda_n x$ ,  $\lambda_n = n^\alpha \pi^\alpha + 1$ .  $\rho = e^{x^\alpha}$ .

۲۳.۲.  $u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$ ,  $\lambda_n = n^\alpha \pi^\alpha (b-a)^{-\alpha}$ .

۲۷.۲. (الف)، (ب)، (ج) و (د).

۲۹.۲. متغیر مستقل را به  $x + 3$  تغییر دهید و حل کنید.  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\log 4}\right)^\alpha + \frac{1}{4}$ .

$y_n(x) = (x+3)^{-1/\alpha} \left(\frac{n\pi}{\log 4} \log(x+3)\right)$

۳۱.۲. به مثال ۱۷.۲ مراجعه کنید.

۳۲.۲. در  $\bar{u}$  ضرب کنید و روی  $[a, b]$  انتگرال بگیرید.

### فصل ۳

۲.۳. خیر، زیرا مجموع آن در  $x = 0$  ناپیوسته است (مثال ۴.۳).

۴.۳.  $\pi - |x| \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$  توسط آزمون  $m$ -وایراشتراس به صورت یکنواخت همگراست.

۶.۳. از آزمون  $m$  استفاده کنید.

۹.۳. (الف) و (ج) پیوسته نقطه به نقطه است، (ب)، (د) و (ه) نقطه به نقطه هموار است.

۱۱.۳. با استفاده از تعریف مشتق در  $x = 0$  نشان دهید که  $f(0)$  وجود دارد، سپس نشان دهید که  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  وجود ندارد.

$$15.3. \text{ (الف) } S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$\text{(د) } \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

۱۶.۳. همگرایی در جایی که  $f$  پیوسته است، یکنواخت است؛ از این رو، در (ب)، (ج) و (د).

۱۷.۳. در تمرین ۱۵.۳ قسمت (ه)،  $S(\pm 2) = \frac{1}{2}(e^2 + e^{-2})$  و قسمت (ی)  $S(\pm l) = 0$ .

$$19.3. \pi^2 = 8 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^{-2}$$

۲۱.۳.  $x^2 = \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$  در  $x = 0$  و  $x = \pi$  ارزیابی کنید.

۲۳.۳.  $f$  یک تابع فرد است که به صورت متناوب در  $\pi$  با  $f'(x) = \cos x$  روی  $[0, \pi]$

قرار دارد. از این رو،  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$  در جایی که  $b_k = \frac{2k}{\pi} \left[ \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1} \right]$

$$b_1 = 0, k > 1$$

$$S\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = f'\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0, S(n\pi) = 0$$

$$27.3. \text{ (الف) } u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin x - \frac{1}{2} e^{-9t} \sin 3x$$

$$\text{(ب) } u(x, t) = e^{-k\pi^2 t/4} \sin \frac{\pi x}{4} - e^{-25k\pi^2 t/4} \sin \frac{5\pi x}{4}$$

$$.a_n = \frac{1}{l} \int_0^l x(1-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} t. \quad ۲۹.۳$$

۳۱.۳. فرض کنید  $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$  که در معادله موج همگن با شرایط

مرزی همگن در  $x = l$  و  $x = 0$  صادق است. این به  $\psi(x) = \frac{g}{c^2}(x^2 - lx)$  و

$$منجر  $a_n = -\frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$  با  $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{cn\pi}{l} t$$$

می‌شود.

۳۳.۳. فرض کنید  $u(x, y, t) = v(x, y)w(t)$  و نتیجه بگیرید که  $w''/w = c^2 \Delta$

فرض  $w(t) = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t$ ؛ از این رو،  $v/v = -\lambda^2$

کنید  $v(x, y) = X(x)Y(y)$ ، و از شرایط مرزی داده شده برای نتیجه‌گیری استفاده کنید.

$$\lambda = \lambda_{mn} = \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

$$X(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad Y(y) = \sin \frac{m\pi}{b} y,$$

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos \lambda_{mn} ct + B_{mn} \sin \lambda_{mn} ct) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y.$$

شرایط اولیه را روی جواب اعمال می‌کنیم:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t)$$

ضرایب را ارزیابی می‌کنیم، حاصل برابر زیر است:

$$A_{mn} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn} ab} g(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y dx dy.$$

$$.u(x, y) = (\sinh \frac{r\pi}{r})^{-1} \sin \frac{r\pi}{r} x \sinh \frac{r\pi}{r} y . ۳۵.۳$$

۳۷.۳. (ب) برای از بین بردن ضرایب  $d_n$  از این اصل استفاده کنید که  $u$  باید در  $r = ۰$  کران دار باشد.

$$.u(r, \theta) = A. + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{R}{r})^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \text{ (ج)}$$

## فصل ۴

۳.۴. از فرمول بازگشتی ۷.۴ با  $k = ۲j + ۱$  نتیجه می شود که:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|c_{2(j+1)} x^{2(j+1)}|}{|c_{2j} x^{2j}|} = x^2 < 1 \quad x \in (-1, 1).$$

این نتیجه گیری صادق است اگر  $k = ۲j + ۱$  باشد؛ زیرا  $Q'(x) = (1 - x^2)^{-1}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} p(x) Q'(x) = 1,$$

در حالی که

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} p(x) Q(x) = ۰.$$

۵.۴. دو فرمول نخست از این اصل نتیجه می شود که  $P_n$  یک تابع زوج است وقتی  $n$  زوج است و فرد، وقتی  $n$  فرد است.

$$P_{2n}(0) = a. = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n! n!} = (-1)^n \frac{(2n-1) \cdots (3)(1)}{(2n) \cdots (4)(2)}$$

۷.۴. از فرمول رودریگز نسبت به  $P$  مشتق بگیرید و  $n+1$  را جایگزین  $n$  کنید تا به دست



آورید:

$$P'_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{d^n}{dx^n} [((\sqrt[n]{n} + 1)x^\sqrt[n]{n} - 1)(x^\sqrt[n]{n} - 1 \cdot 0)^{n-1}],$$

سپس از  $P_{n-1}$  مشتق بگیرید و از هم کم کنید. نخستین فرمول انتگرال به طور مستقیم از (۱۴.۴) و برابری  $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$  حاصل و فرمول دوم از تنظیم  $x = 1$  حاصل می‌شود.

$$.۱۱.۴ \text{ (الف)} \quad 1 - x^\sqrt[n]{n} = P_0(x) - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_1(x) - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_2(x)$$

$$. |x| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} P_0(x) + \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_1(x) - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_2(x) + \dots \text{ (ب)}$$

.۱۳.۴  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ ، که  $c_n = (\sqrt[n]{n} + 1)/\sqrt[n]{n} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$  زیرا

$f$  فرد است و برای هر مقدار  $f$ ،  $c_n = 0$  است. برای  $n = \sqrt[n]{k} + 1$ ،

$$\begin{aligned} c_{\sqrt[n]{k}+1} &= (\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n}) \int_{-1}^1 P_{\sqrt[n]{k}+1}(x) dx \\ &= (\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n}) \frac{1}{\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n}} [P_{\sqrt[n]{k}}(\cdot) - P_{\sqrt[n]{k}+\sqrt[n]{n}}(\cdot)] \\ &= (-1)^k \left[ \frac{(\sqrt[n]{k})!}{\sqrt[n]{k} k! k!} + \frac{(\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n})!}{\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n} (k+1)! (k+1)!} \right] \\ &= (-1)^k \frac{(\sqrt[n]{k})!}{\sqrt[n]{k} k! k!} \frac{(\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n})}{(\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{n})}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ازاین‌رو، در  $x = 0$   $f(x) = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_1(x) - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} P_2(x) + \frac{11}{\sqrt[n]{n}} P_3(x) + \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cdot) = 0 = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} [f(\cdot^+) + f(\cdot^-)].$$

$$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^\sqrt[n]{n}} dx)^\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^\sqrt[n]{n} + y^\sqrt[n]{n})} dx dy = \sqrt[n]{n} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/\sqrt[n]{n}} e^{r^\sqrt[n]{n}} r dr d\theta = .۱۵.۴$$

.π

۱۶.۴.  $by - t$  را جایگزین  $t$  در معادله (۲۵.۴) کنید تا به دست آورید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x)(-t)^n = e^{-xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(-x)t^n,$$

که نشان می‌دهد  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ .

۱۷.۴. تنظیم  $x = 0$  در رابطه (۲۵.۴) نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k(\cdot)t^k = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n}$$

یا با برابرکردن ضرایب مربوطه، فرمول‌های موردنظر را به دست می‌آوریم.

۱۹.۴. اگر  $m = 2m$ ,

$$x^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!(n-k)!}$$

اگر  $m = 2n + 1$  خواهیم داشت:

$$x^{2n+1} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!(n-k)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

۲۳.۴. از قانون لایب نیتز برای مشتق یک حاصل استفاده کنید:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} g^{(k)}$$

و  $f(x) = x_n$  و  $g(x) = e^{-x}$  را در نظر می‌گیریم.

$$x^m = c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx = (-1)^n \frac{m!m!}{n!(m-n)!} \quad \text{از آنجا که} \quad ۲۵.۴$$

است.  $\sum_{n=0}^m c_n L_n(x)$

$$.۲۸.۴ \quad u(x) = c_1 + c_2 \int \frac{e^x}{x} dx = c_1 + c_2 (\log x + x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \dots)$$

.۲۹.۴ سطح  $\phi = \pi/2$ ، متناظر صفحه  $xy$  است.

.۳۱.۴ جواب معادله لاپلاس در مختصات کروی  $(r, \phi)$  توسط رابطه (۴۲.۴) داده شده

است. با استفاده از شرط مرزی داده شده در معادله (۴۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \phi) \sin \phi d\phi \\ &= \frac{5(2n+1)}{R^n} \int_0^1 P_n(x) dx \\ &= \frac{5}{R^n} [P_{n-1}(1) - P_{n+1}(1)], \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

چون نتیجه تمرین ۷.۴ در آخرین برابری استفاده می شود. بنابراین، به جواب زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= 5 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} [[P_{n-1}(1) - P_{n+1}(1)] \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \phi)] \\ &= 5 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \phi) - \frac{5}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2(\cos \phi) + \dots \right]. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که  $u(R, \phi) = 5$  یک تابع فرد از  $\phi$  است، بنابراین، جمع بندی (با  $n = 1$ )

شروع می شود) بیش از مقادیر فرد  $n$  است.

.۳۳.۴ با توجه به شرایط مرزی  $f u_\phi(r, \pi/2) = 0$ ، ممکن است  $\phi$  به عنوان یک تابع

زوج از  $[0, \pi/2]$  تا  $[0, \pi]$  گسترش یابد. با تقارن، جواب زوج  $\phi = \pi/2$  است، بنابراین،

مجموع بیش از دستورهای چندجمله ای لژاندر است.

## فصل ۵

۱.۵. برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، انتگرال  $I_n(x) = \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  یک تابع پیوسته روی  $x \in [a, b]$

درجایی که  $0 < a < b < \infty$  است: زیرا

$$0 \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{b-1} dt \xrightarrow{u} 0,$$

نتیجه می‌دهد که به‌طور یکنواخت به  $\Gamma(x)$  همگرا می‌شود. بنابراین،  $\Gamma(x)$  روی  $[a, b]$

برای هر  $0 < a < b < \infty$  از این رو، روی  $(0, \infty)$  پیوسته است. با یک روش

مشابه می‌توان نشان داد که مشتقات آن  $\Gamma''(x) = \Gamma'(x) = \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} \log t dt$

همه روی  $(0, \infty)$  پیوسته است.  $\int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^2 dt$

۳.۵.  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2}) \cdots (\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n! 2^n} \Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

۵.۵. از تعریف انتگرال تابع گاما برای به‌دست آوردن جواب استفاده کنید:

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}) = 2 \int_n^\infty \int_n^\infty e^{-(\alpha+\beta)} (2\alpha\beta)^{2x-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta,$$

سپس متغیرهای انتگرال را به  $\eta = 2\alpha\beta$ ،  $\xi = \alpha + \beta$  تغییر دهید تا به فرمول موردنظر

برسید.

۷.۵. از آزمون نسبت استفاده کنید.

۸.۵. از معادله (۱۲.۵) مشتق بگیرید و در  $x$  ضرب کنید.

۱۱.۵.  $\nu = -1/2$  را در همانی جایگزین کنید و از تمرین ۸.۵ استفاده کنید.

۱۷.۵. مستقیماً در معادله بسل جایگزین کنید. توجه داشته باشید که  $J_n(x)$  در  $x = 0$

کران‌دار است، ولی  $y_n(x)$  این‌طور نیست. بنابراین، این دو تابع نمی‌توانند وابسته خطی باشند.

۲۵.۵. تعریف  $I_\nu$ ، همان‌طور که در تمرین ۲۲.۵ آمده است، به مقادیر منفی  $n$  گسترش می‌یابد. معادله (۱۸.۵) تحت تغییر علامت  $\nu$  ثابت است، بنابراین، هم توسط  $I_\nu$  و هم  $I_{-\nu}$  برآورده می‌شود.

۲۷.۵. از کران‌های توابع سینوس و کسینوس نتیجه می‌شود.

۲۹.۵. با اعمال رابطه پارسوال روی معادله‌های (۲۲.۵) و (۲۳.۵)، به دست می‌آوریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^\nu(x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\pi} J_\nu^\nu(x) + \sqrt{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu+m}^\nu(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^\nu(x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu+m-1}^\nu(x).$$

با افزودن این دو معادله، به همانی موردنظر می‌رسیم.

۳۱.۵. لم ۷.۳ را روی معادله‌های (۲۴.۵) و (۲۵.۵) اعمال کنید.

$$\|J_\nu(\mu_k b)\|_x^\nu = \langle 1, J_\nu(\mu_k x) \rangle_x = \int_0^b J_\nu(\mu_k x) x dx = \frac{b}{\mu_k} J_\nu(\mu_k b) \quad (\text{الف})$$

$$\cdot \frac{b^\nu}{\sqrt{\pi}} J_\nu^\nu(\mu_k b)$$

از این‌رو،

$$1 = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_\nu(\mu_k b)} J_\nu(\mu_k x).$$

$$\langle x^\nu, J_\nu(\mu_k x) \rangle_x = \left( \frac{b^\nu}{\mu_k} - \frac{\sqrt{\pi} b}{\mu_k} \right) J_\nu(\mu_k b) \quad (\text{ج})$$

$$x^\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^\nu b^\nu - \sqrt{\pi} b}{\mu_k^\nu J_\nu(\mu_k b)} J_\nu(\mu_k x).$$

داریم:  $\langle f, J_1(\mu_k x) \rangle_x = \int_0^{b/2} J_1(\mu_k x) x dx = \frac{b}{2\mu_k} J_2(\mu_k b/2)$  (۵)

$$f(x) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_k b/2)}{\mu_k J_1(\mu_k b)} J_1(\mu_k x).$$

۳۵.۵. از تمرین‌های ۱۳.۵ و ۱۴.۵ قسمت (الف) داریم:

$$\langle x, J_1(\mu_k x) \rangle_x = \int_0^1 J_1(\mu_k x) x^2 dx = -J_2(\mu_k)/\mu_k = J_3(\mu_k)/\mu_k$$

و از معادله (۳۴.۵) داریم:  $\|J_1(\mu_k x)\|_x^2 = \frac{1}{2} J_3^2(\mu_k)$  از این رو، داریم:

$$1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_3(\mu_k)} J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1.$$

۳۷.۵. با استفاده از نتایج تمرین‌های ۱۳.۵ و ۱۴.۵ قسمت (الف) داریم:

$$\begin{aligned} \langle f, J_1(\mu_k x) \rangle_x &= \int_0^1 x^2 J_1(\mu_k x) dx = \frac{1}{\mu_k^3} [2\mu_k J_2(\mu_k) - \mu_k^2 J_3(\mu_k)] \\ &= \frac{1}{\mu_k} J_3(\mu_k). \end{aligned}$$

معادله بسط نیز نتیجه می‌دهد:

$$\|J_1(\mu_k x)\|_x^2 = 2[J_2'(\mu_k)]^2 + \frac{1}{2\mu_k^2} (4\mu_k^2 - 1) J_2^2(\mu_k) = \frac{4\mu_k^2 - 1}{2\mu_k^2} J_2^2(\mu_k).$$

در نتیجه،

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k J_3(\mu_k)}{(4\mu_k^2 - 1) J_2^2(\mu_k)} J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 2.$$

این نمایش به صورت نقطه‌به‌نقطه است. در  $x = 1$ ،  $f(1) = 1$  در صورتی که سمت راست

برابر

$$\frac{1}{4}[f(1^+) + f(1^-)] = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

۳۹.۵. فرض کنید  $u(r, t) = \nu(r)w(t)$ ؛ آنگاه

$$\frac{w'}{kw} = \frac{1}{\nu} \left( \nu'' + \frac{1}{r} \nu' \right) = -\mu^2.$$

این معادله را حل کرده و شرط مرزی را برای به دست آوردن نمایش موردنظر برای  $u$  اعمال کنید.

۴۱.۵. برای نتیجه‌گیری، از جداسازی متغیرها استفاده کنید.

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r) [a_k \cos \mu_k ct + b_k \sin \mu_k ct],$$

$$a_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R f(r) J_0(\mu_k r) r dr,$$

$$b_k = \frac{2}{c \mu_k R^2 J_1^2(\mu_k R)} \int_0^R g(r) J_0(\mu_k r) r dr.$$

## فصل ۶

$$۱.۶. \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi^2} (1 - \cos \xi) \text{ (الف)} \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi} (1 - e^{-i\xi}) \text{ (ج)}$$

۳.۶. برای هر نقطه ثابت  $J$ ،  $\xi \in J$  فرض کنید  $\xi_n$  دنباله‌ای در  $J$  است که به  $\xi$  همگراست؛

زیرا

$$|F(\xi_n) - F(\xi)| \leq \int_I |\phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)| dx,$$

و  $\phi(x, \xi) \in L^1(I)$ ، ما می‌توانیم قضیه ۴.۶ را در دنباله توابع

$\phi_n(x) = \phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)$  اعمال کنیم تا نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |F(\xi_n) - F(\xi)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |\phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)| dx \\ &= \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)| dx = 0. \end{aligned}$$

۵.۶. فرض کنید  $\xi \in J$  و  $\xi_n \rightarrow \xi$ . تعریف کنید:

$$\psi_n(x, \xi) = \frac{\phi(x, \xi_n) - \phi(x, \xi)}{\xi_n - \xi},$$

سپس  $\psi_n(x, \xi) \rightarrow \phi_\xi(x, \xi)$  نقطه به نقطه است.  $\psi_n$  روی  $I$  انتگرال پذیر است و با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای مقادیر  $\eta_n$  بین  $\xi$  و  $\xi_n$  داریم  $\psi_n(x, \xi) = \phi_n(x, \eta_n)$ . بنابراین، روی  $I \times J$ ،  $|\psi_n(x, \xi)| \leq h(x)$  است. اکنون از قضیه همگرایی مغلوب استفاده کنید تا نتیجه بگیرید که  $\int_I \psi_n(x, \xi) dx \rightarrow \int_I \phi_\xi(x, \xi) dx$  است. این ثابت می‌کند:

$$\frac{F(\xi_n) - F(\xi)}{\xi_n - \xi} \rightarrow \int_I \phi_\xi(x, \xi) dx.$$

پیوستگی  $F'$  از تمرین ۳.۶ حاصل می‌شود.

۸.۶. (الف) ۱، (ب) ۲/۱، (ج) ۰.

۹.۶. انتگرال روی  $(a, b)$  را به صورت مجموع انتگرال‌های زیربازه‌های  $(a, x_1), \dots, (x_n, b)$  بیان کنید. از آنجایی که هر دو تابع  $f$  و  $g$  در هر زیربازه‌ای هموار هستند، فرمول انتگرال بر اساس هر بخش برای هر انتگرال در مجموع اعمال می‌شود.

۱۰.۶. (الف)  $f$  زوج است؛ از این رو،  $B(\xi) = 0$ ،  $A(\xi) = 2 \int_0^\pi \sin x \cos \xi x dx$ .

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + \cos x\xi}{1 - \xi^2} \cos x\xi d\xi \text{ و } \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos \pi\xi}{1 - \xi^2} \text{ است.}$$



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi + \sin \xi}{\xi^2} \sin x \xi d\xi \quad (\text{ج})$$

۱۳.۶ تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \cos x, & x > 0 \\ -e^x \cos x, & x < 0 \end{cases},$$

چون  $f$  فرد است، کسینوس به صفر می‌رود و

$$B(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \sin \xi x dx = \frac{2\xi^2}{\xi^2 + 4}.$$

اینک  $f(x)$  را می‌توان روی  $(-\infty, \infty)$  با فرمول معکوس (۲۸.۶) نشان داد:

$$e^{-x} \cos x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{\xi^2 + 4} \sin x \xi d\xi.$$

چون  $f$  در  $x = 0$  پیوسته نیست، این انتگرال به‌طور یکنواخت همگرا نیست.

۱۵.۶. تعمیم دهید:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases},$$

به‌عنوان یک تابع فرد روی  $\mathbb{R}$  و نشان دهید که تبدیل سینوسی آن  $B(\xi) = 2(1 - \cos \pi\xi)/\xi$  است.

۱۷.۶. نشان دهید که تبدیل کسینوس روی  $f$  برابر است با:

$$(\xi) = 2 \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}.$$

$f(x)$  را به‌عنوان انتگرال کسینوس بیان کنید و نتیجه را در  $x = 0$  که نقطه پیوستگی  $f$  است، ارزیابی کنید.

۱۹.۶. معادله (۳۱.۶) دلالت بر این دارد  $\|f\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 2\pi\|f\|^2$ .  
 ۲۱.۶.  $\psi_n(x)$  نزول نمایی روی  $|x| \rightarrow \infty$  دارد؛ بنابراین، متعلق به  $L^1(\mathbb{R})$  است و  $\widehat{\psi}_n(\xi)$  وجود دارد. از مثال ۱۷.۶ داریم  $\widehat{\psi}_n(\xi) = \sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$  با فرض اینکه  $\widehat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n \sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$  داریم:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{n+1}(\xi) &= F(e^{-x^2/2} H_{n+1}(x))(\xi) \\ &= F[e^{-x^2/2} (2xH_n(x) - H'_n(x))](\xi) \\ &= F[x\psi_n(x) - \psi'_n(x)](\xi) \\ &= i\widehat{\psi}'_n(\xi) - i\xi\widehat{\psi}_n(\xi) \\ &= (-i)^{n+1} \sqrt{2\pi}[\widehat{\psi}'_n + \xi\widehat{\psi}_n(\xi)] \\ &= (-i)^{n+1} \sqrt{2\pi}\psi_{n+1}(x),\end{aligned}$$

از همانی  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$  و قضیه ۱۵.۶ استفاده کنیم. بنابراین، با استقرا داریم  $\widehat{\psi}_n(\xi) = (-i)^n \sqrt{2\pi}\psi_n(\xi)$  که برای همه  $n \in \mathbb{N}$  صادق است.  
 ۲۳.۶. انتگرال  $I(z) = \int_0^\infty e^{-b\xi^2} \cos z\xi d\xi$  را تعریف کنید و نشان دهید که در معادله دیفرانسیل  $I'(z) = -zI(z)/2b$  صادق است، که جواب آن در  $I(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/b}$  برابر  $I(z) = I(0)e^{-z^2/4b}$  است.

۲۵.۶. شرط مرزی در  $x = 0$  دلالت بر  $A(\lambda) = 0$  در نمایش  $u(x, t)$  داده شده توسط (۳۹.۶) دارد، به طوری که  $u$  در حال حاضر یک تابع فرد  $x$  است. با گسترش  $f(x)$  به عنوان یک تابع فرد از  $(0, \infty)$  به  $(-\infty, \infty)$ ، می‌توانیم ببینیم که  $B(\lambda)$  تبدیل سینوسی  $f$  و همان

روشی است که در مثال ۱۸.۶ دنبال شد و به نتیجه انجامید.

۲۷.۶. معادله تبدیل موج  $\widehat{u}_{tt}(\xi, t) = -c^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t)$  در شرایط داده شده توسط  $\widehat{u}(\xi, t) =$

$\widehat{f}(\xi) \cos c\xi t$  حل می‌شود. با استفاده از تبدیل معکوس فوریه، نمایش مورد نیاز  $u$  به دست

می‌آید.

## فصل ۷

۱.۷ (الف)  $\frac{2a^2}{s^2} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$

(ت)  $\frac{1}{s^2+4}$

(ج)  $\frac{2s}{(s^2-1)^2}$

(خ)  $\sqrt{\pi/s}$

۲.۷ (ب)  $2 \cosh 3x - \frac{5}{4} \sinh 3x$

(ت)  $\frac{1}{4}(1 - e^{-2x})$

(ج)  $2\sqrt{x/\pi}$

۵.۷  $f(x) = x[H(x) - H(x-1)] + e^{-x}H(x-1)$

$L(f)(\xi) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}) - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s+1}e^{-s}$

۶.۷ (پ)  $H(x-3) + H(x-1)$

۷.۷ اگر  $f$  دارای ناپیوستگی پرش در نقاط  $x_1, \dots, x_n$  باشد. سپس جمع  $f(x_1^-) -$

$f(x_n^+) + \dots + f(x_n^-) - f(x_n^+)$  را باید به سمت راست (۶.۷) اضافه کرد.

۸.۷ (ث)  $y(x) = H(x-1) \left[ \frac{1}{4}e^{2(x-1)} - e^{x-1} + \frac{1}{4} \right] - e^x + e^{2x}$

$$.۹.۷ \text{ (ج) } \frac{1}{x}(e^{-bx} - e^{-ax})$$

.۱۱.۷ (الف) بنویسید:

$$\begin{aligned} L(f)(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} f(x)e^{-sx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p f(x+np)e^{-s(x+np)} dx, \end{aligned}$$

سپس از معادله  $f(x+np) = f(x)$  برای رسیدن به جواب استفاده کنید.

$$.L(f) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left[ \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) - \frac{e^{-s}}{s} \right] \text{ (ب)}$$

.۱۳.۷ در سمت چپ،  $x^3$  و  $y(x)$  را تلفیق کنید. کاربرد قضیه ۱۴.۷ را روی  $Y(s)/s^4 = 3Y(s)/s^4$

$F(s)$  در نظر می‌گیریم که  $Y(s) = s^4 F(s)/6$  را نتیجه می‌دهد. از نتیجه ۷.۷ نتیجه

می‌گیریم که

$$y(x) = \frac{1}{6} f^{(4)}(x) + \frac{1}{6} L^{-1} [f(\cdot^+)s^3 + f'(\cdot^+)s^2 + f''(\cdot^+)s + f'''(\cdot^+)].$$

عبارت انتگرالی  $f(x)$  برای  $n = 0, 1, 2, 3$  دلالت بر  $f^{(n)}(\cdot^+) = 0$  دارد (ما همچنین، از

تمرین ۱۲.۷ می‌دانیم که  $s^n$  نمی‌تواند تبدیل لاپلاس یک تابع در  $\varepsilon$  برای هر  $n \in \mathbb{N}$  باشد).

با فرض اینکه  $f$  به مرتبه چهارم متغیر (یا پیوسته) باشد، جواب  $y(x) = f^{(4)}(x)/6$  است.

$$.L([x])(s) = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})} .۱۵.۷$$

$$.u(x, t) = H(t - x/c) \cos(t - x/c) .۱۷.۷$$

$$.u(x, t) = e^{-x} H(t - x/c) \sin(t - x/c) .۱۹.۷$$

.۲۱.۷ در  $F(s) = e^{-a\sqrt{s}}/\sqrt{s}$  در صفحه مختلط با برش در محور منفی  $[-\infty, 0]$  بررسی

می‌شود. با استفاده از قضیه کوشی، انتگرال را در امتداد خط عمودی  $\beta - i\infty, B + i\infty$  می‌توان به دو انتگرال، یک در مرز پایین، برش از سمت چپ به راست و دیگری در مرز بالا از راست به چپ کاهش داد.

$$\begin{aligned} L^{-1}(F)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{sx} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos a\sqrt{s}}{\sqrt{s}} e^{-sx} ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \cos at dt. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه انتگرال پایانی، تبدیل فوریۀ  $e^{-xt^2}$  است و با استفاده از نتیجه مثال ۱۷.۶، عبارت موردنظر را برای  $L^{-1}(F)(x)$  به دست می‌آوریم.

## کتابنامه

- [1] Al-Gwaiz, M.A. and S.A. Elsanousi, Elements of Real Analysis, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2006.
- [2] Birkhoff, G. and G.-C. Rota, Ordinary Differential Equations, 2nd edn., John Wiley, New York, 1969.
- [3] Buck, R.C., Advanced Calculus, McGraw-Hill, 3rd edn., McGraw-Hill International, New York, 1978.
- [4] Carslaw, H.S., Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, 3rd edn., Dover, New York, 1930.
- [5] Churchill, R.V. and J.W. Brown, Fourier Series and Boundary Value Problems, 6th edn., McGraw-Hill International, New York, 2001.
- [6] Coddington, E.A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955. 3
- [7] Courant, R. and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vols I and II, Interscience Publishers, New York, 1953 and 1963.
- [8] Courant, R. and F. John, Introduction to Calculus and Analysis, vol. II, John Wiley, New York, 1974.
- [9] Folland, G.B., Fourier Analysis and Its Applications, Wadsworth, Belmont, California, 1992.

- [10] Gonzalez-Velasco, E.A., Fourier Analysis and Boundary Value Problems, Academic Press, San Diego, California, 1995.
- [11] Halmos, P.R., Finite-Dimensional Vector Spaces, 2nd edn., Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1958.
- [12] Ince, E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.
- [13] John, F., Partial Differential Equations, 4th edn., Springer, New York, 1982.
- [14] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [15] Titchmarsh, E.C., Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, 1962.
- [16] Tolstov, G.P., Fourier Series, Dover, New York, 1962.
- [17] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 1944.
- [18] Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.

---

University of Guilan Press

---

**Sturm-Liouville Theory  
and its Applications**

Edited by:

**M.A. Al-Gwaiz**

Translated by:

**Mozhgan Akbari Khoshkebijari, Ph.D**

**Mohaddese Keshavarz, M.Sc**

**Elham Yousefi, M.Sc**