دانشگاه گیلان
۱۳۵۳ - 1974

چاپ اول

آنالیـــز حقیـقی

نظریه اندازه، انتگرال گیری و فضاهای هیلبرت

تالیف: الیاس ام. استین ، رامی شکرچی

ترجمه: دکتر مرضیه شمس یوسفی ، طاهره خزاعی
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان ، کارشناس ارشد ریاضی محض دانشگاه الزهرا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

آنالیز حقیقی
نظریه اندازه، انتگرال گیری و فضاهای هیلبرت

تالیف: الیاس ام. استین ، رامی شکرچی
ترجمه: مرضیه شمس یوسفی ، طاهره خزاعی

Real Analysis

Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces

By:
Elias M. Stein & Rami Shakarchi

Translated By:
Marzieh Shams Yousefi , Ph.D & Tahereh Khazaei , M.Sc

University of Guilan Press

ISBN:978-600-153-268-9

آنالیز حقیقی
نظریه اندازه، انتگرال‌گیری و فضاهای هیلبرت

تألیف:

الیاس ام.استین

رامی شکرچی

ترجمه:

دکتر مرضیه شمسی یوسفی

استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

سیده طاهره خزاعی

کارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه الزهراء

مرکز نشر دانشگاه گیلان

۱۴۰۱

دانشگاه گیلان
۱۳۵۳-1974

شابک: ۹ـ۲۶۸ـ ۱۵۳ ـ ۶۰۰ ـ ۹۷۸

سرشناسه	: استاین، الیاس ام.، ۱۹۳۱-۲۰۱۸م. Stein, Elias M., 1931-2018
عنوان و نام پدیدآور	: آنالیز حقیقی: نظریه اندازه، انتگرال‌گیری و فضاهای هیلبرت/تالیف الیاس‌ام. استین، رامی شکرچی ؛ ترجمه مرضیه شمسی‌یوسفی، سیده‌طاهره خزاعی ؛ ویراستار علمی اسماعیل انصاری‌پیری ؛ ویراستار ادبی فرشته گلچین.
مشخصات نشر	: رشت: دانشگاه گیلان، ۱۴۰۰.
مشخصات ظاهری	: ۸۳۳ص.
شابک	: 978-600-153-268-9
وضعیت فهرست نویسی	: فیپا
یادداشت	: عنوان اصلی: Real analysis : measure theory, integration, and Hilbert spaces,2005.
یادداشت	: کتابنامه: ص.[۸۲۹] - ۸۳۳.
عنوان دیگر	: نظریه اندازه، انتگرال‌گیری و فضاهای هیلبرت.
موضوع	: آنالیز تابعی Functional analysis اندازه گیری -- نظریه Measure theory انتگرال‌های تعمیم‌یافته Integrals, Generalized
شناسه افزوده	: شاکارچی، رامی
شناسه افزوده	: Shakarchi, Rami
شناسه افزوده	: شمسی یوسفی، مرضیه، ۱۳۵۹-، مترجم
شناسه افزوده	: خزاعی، سیده طاهره، ۱۳۷۰-، مترجم
شناسه افزوده	: انصاری، اسماعیل ، ۱۳۳۰ -، ویراستار
شناسه افزوده	: دانشگاه گیلان
رده بندی کنگره	: QA۳۲۰
رده بندی دیویی	: ۵۱۵/۷
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۸۱۲۳۰۸
اطلاعات رکورد کتابشناسی	: فیپا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

نام کتاب	: آنالیز حقیقی؛ نظریه اندازه، انتگرال گیری و فضاهای هیلبرت
مؤلفان	: الیاس ام.استین ، رامی شکرچی
مترجمان	: دکتر مرضیه شمسی یوسفی، سیده طاهره خزاعی
ویراستار علمی	: دکتر اسماعیل انصاری پیری
ویراستار ادبی	: فرشته گلچین راد
نوبت چــاپ	: اول، ۱٤۰۰
ناشــر	: مرکز نشردانشـگاه گیـلان

پیش‌گفتار مترجم

کتاب حاضر ترجمه یکی از چهارگانه ارزشمند الیاس استین و رامی شکرچی است که توسط انتشارات پرینستون چاپ و نشر شده است. این کتاب با دیدگاهی متفاوت و جذاب به طرح مباحث مربوط به نظریه اندازه و انتگرالگیری می‌پردازد. فضاهای هیلبرت و کاربرد وسیع آن‌ها را در تبدیلات فوریه، آنالیز مختلط و نظریه ارگودیک مطرح می‌کند و در پایان خواننده را به دنیای جذاب فرکتالی می‌برد. از آن جا که حجم وسیعی از مطالب کتاب روی فضاهای متناهی بعد تأکید می‌کند، تکنیک‌ها و شهود جذاب موجود در برهان‌ها و مثال‌ها برای طیف زیادی از خوانندگان اعم از دانشجویان رشته

ریاضی و مهندسی لذت‌بخش است. هر فصل با حجم زیادی از تمرین‌ها و مسائل تکمیل شده است که چنین گنجینه‌ای در سطح خود کمیاب است. یکی از اشکالاتی که ممکن است خواننده را با مشکل مواجه کند، در برخی موارد عدم پرداختن به جزییات اثبات‌هاست. در برخی قسمت‌ها حتی اثبات در قالب برهان هم داده نشده است. اما برای دانشجویان کوشا و علاقمند این امر خود چالشی برای درک بهتر مباحث است. در این نسخه برگردان مترجمین سعی کرده‌اند برخی از اشکالات گریزناپذیر کتاب اصلی را تصحیح نمایند و در بخش‌بندی از کتاب اصلی تبعیت نموده‌اند. هر چند به دلیل ضعف تکنیکی حروف چین فارسی امکان شماره‌گذاری زیر بخش ها و قضایا عینا مانند نسخه اصلی مهیا نبود. با توجه به گستردگی مباحث این کتاب مترجمین با احترام این کتاب را به دانشجویان دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد تقدیم می‌کنند.

مرضیه شمس یوسفی و سیده طاهره خزاعی
پاییز ۱۴۰۰، رشت

تقدیم مؤلف

تقدیم به نوه هایم
کارولین، الیسون، جیسون

ا. ام. اس.

تقدیم به پدر و مادرم
محمد و میرل
و **برادرم**
کریم

ر. ش

پیش‌گفتار مؤلف

با شروع بهار سال ۲۰۰۰، مجموعه‌ای از چهار دوره یک ترمی در دانشگاه پرینستون تدریس می‌شد که هدف از ارائه آن‌ها، بیان زمینه‌های اصلی آنالیز، در یک روش یکپارچه بود. هدف ساده‌سازی وحدت ارگانیکی بود که بین قسمت‌های مختلف آن وجود دارد، و کاربرد گسترده ایده‌های آنالیز در سایر زمینه‌های ریاضیات و علوم را نشان می‌دهد. مجموعه کتاب‌های حاضر شرح سخنرانی‌های ارائه شده است.

در حالی که تعداد زیادی کتاب در سطح عالی وجود دارد که به‌صورت مجزا به بخش‌هایی ار آن چه ما پوشش می‌دهیم می‌پردازد، بیان ما در یک هدف متفاوت است:
زیرموضوع‌های مختلف آنالیز نه به عنوان رشته‌های جداگانه، بلکه به‌صورت کاملا مرتبط ارائه می‌شوند. نظر ما این است که دیدن این روابط و هم‌افزایی‌های حاصل از آن‌ها، انگیزه خواننده را به سمت درک بهتر از کل موضوع بیشتر می‌کند. با این نوع تفکر، روی ایده‌های اصلی و قضیه‌هایی که زمینه را شکل داده‌اند تمرکز کرده‌ایم (که گاهی اوقات قربانی یک رویکرد سازماندهی شده می‌شود) و نسبت به نظم تاریخی که منطق موضوع براساس آن توسعه یافته است، حساس بوده‌ایم.
ما بیان خود را در چهار جلد سازماندهی کرده‌ایم که هر یک از آن‌ها با مطالب مربوط به یک ترم متناسب است. مطالب آن‌ها به شرح زیر خلاصه می‌شود:

۱- سری‌های فوریه و انتگرال

۲- آنالیز مختلط

۳- نظریه اندازه، انتگرال لبگ و فضاهای هیلبرت

۴- منتخبی از عناوین دیگر، شامل آنالیز تابعی، نظریه توزیع، و مبانی نظریه احتمال

با این حال، این لیست به خودی خود تصویر کاملی از بسیاری از ارتباطات موجود و کاربردهای معرفی شده با شاخه‌های دیگر که در متن برجسته شده است، ارائه نمی‌دهد. به‌عنوان مثال، مبانی سری فوریه درجلد ۱ که به تابع مشخصه دیریکله منتهی می‌شود، مطالعه و از آنجا ارتباطش با نامتناهی بودن در توسعه حساب مطرح شده است. اشعه x و تبدیل رادون در مسائل زیادی در جلد ۱ دیده می‌شود و در جلد ۳ دوباره ظاهر می‌شود تا نقش مهمی در فهم مجموعه‌های شبه بسیکویچ در بعد دو و سه و قضیه فاتو، که تضمین‌کننده وجود مقادیر مرزی برای توابع تحلیلی روی دیسک است، و اثبات آن بر ایده‌های توسعه یافته در هر سه کتاب اول وابسته است و تابع تتا، که برای اولین بار در کتاب اول در حل معادله گرما دیده می‌شود و سپس در جلد ۲ استفاده می‌شود تا تعداد راه‌هایی که یک عدد صحیح می‌تواند به عنوان جمع دو یا چهار مربع نمایش داده شود، و همچنین در روند تحلیلی، تابع زتا داشته باشد.

چند کلمه دیگر درباره کتاب‌ها و دوره‌های مربوط به آن‌ها. این دوره با سرعت نسبتا فشرده و به‌صورت ۴۸ سخنرانی یک ساعتی برگزار می‌شدند. مجموعه تمرین‌های هفتگی نقش مهمی را ایفا کردند و

در نتیجه تمرین‌ها و مسائل نقش مهمی در کتاب‌های ما دارند. هر فصل دارای یک سری «تمرینات» است که به‌طور مستقیم به متن گره خورده است، و در حالی که برخی از آن‌ها آسان است، برخی دیگر ممکن است نیاز به تلاش بیشتری داشته باشند. هرچند که تعداد قابل‌توجهی از نکات ارائه شده است باید خواننده را قادر سازد که به بیشتر تمرین‌ها حمله کند. تعدادی «مسأله» نیز وجود دارد که درگیرکننده و چالش برانگیز است. مواردی که بسیار مشکل است، یا فراتر از محدوده متن است، با ستاره مشخص شده است.

با وجود ارتباطات اساسی که بین مجلدها وجود دارد، همپوشانی کافی برای مباحث فراهم شده است، به‌طوری‌که هر یک از سه کتاب اول فقط به حداقل مقدمات نیاز دارند: آشنایی با مباحث ابتدایی در آنالیز مانند حد و سری، مشتق‌پذیری، و انتگرال ریمان، همراه با اشاراتی از جبر خطی. این امر باعث می‌شود این کتاب‌ها برای دانشجویان علاقه‌مند در رشته‌های متنوعی مانند ریاضیات، فیزیک، مهندسی و امور مالی، هم در مقطع کارشناسی و هم کارشناسی ارشد قابل استفاده باشد.

باعث افتخار است تا از همه کسانی که در این کار کمک کرده‌اند، قدردانی کنیم. ما به‌ویژه از دانشجویانی که در این چهار دوره

شرکت کرده‌اند سپاسگزاریم. علاقه مستمر، اشتیاق و فداکاری آن‌ها، دلگرمی را فراهم آورد که پروژه امکان‌پذیر شد. همچنین از آدریان بانر [1] و خوزه لوئیس رودریگو [2] تشکر می‌کنیم. به‌دلیل کمک ویژه ایشان در برگزاری دوره‌ها، و تلاش‌های ویژه آن‌ها برای بررسی دانشجویان ممتاز کلاس‌ها. علاوه بر این، آدریان بانر همچنین پیشنهادات ارزشمندی را ارائه داد که در متن گنجانده شده است. همچنین علاقه‌مندیم تا یادداشت تشکر ویژه‌ای را برای افراد زیر ثبت کنیم: چارلز افرمان [3]، که هفته اول تدریس کرد (آغاز موفقیت آمیز کل پروژه!) پل هاگلستن [4]، که علاوه برخواندن بخشی از نسخه خطی، چندین هفته از یکی از دوره‌ها تدریس کرد، و از آن زمان تدریس سری دور دوم را به عهده گرفت، و دانیل لوین [5]، که در خواندن اثبات کمک‌های ارزنده‌ای کرد. آخرین اما نه کمترین، از گری پچت [6] برای مهارت جسورانه او در نوع

1. Adrian Banner
2. Jose Luis Rodrigo
3. Charles Fefferman
4. Paul Hagelstein
5. Daniel Levine
6. Gerree Pecht

تنظیم و زمان و انرژی‌ای که برای همه قسمت‌های سخنرانی‌ها مانند اسلایدها، یادداشت‌ها و نسخه‌های دست نویس صرف کرد. همچنین خوشبختیم که مدیون حمایتی هستیم که از صندوق ۲۵۰مین سالگرد دانشگاه پرینستون و برنامه VIGRE بنیاد ملی علوم، دریافت کردیم.

الیاس ام. استین
رامی شکرچی
پرینستون، نیوجرسی
اگوست ۲۰۰۲

در جلد سوم مباحث مقدماتی در مورد اندازه و انتگرال را مطرح می‌کنیم. این به ما امکان می‌دهد تا چندین موضوع مهم که در جلدهای قبلی مطرح شده است و همچنین تعدادی دیگر از موضوعات مورد علاقه در آنالیز را دوباره بررسی کنیم و بیشتر توسعه دهیم. برای کمک به خواننده علاقه‌مند، بخش‌های ستاره‌دار داریم که شامل مباحث پیشرفته‌تری هستند. این موارد را می‌توان در اولین بار خواندن حذف کرد. می‌خواهیم از این فرصت برای تشکر از دانیل لوین برای کمک‌های مستمر او در خواندن اثبات‌ها و بسیاری از پیشنهادات او که در متن نیز گنجانیده شده است، استفاده کنیم.

نوامبر ۲۰۰۴

فهرست مطالب

مقدمه

با ترس و وحشت از بلای مصیبت بار توابع مشتق‌ناپذیر می‌گریزم.

سی. هرمیت ۱۹۸۳

از حدود سال ۱۸۷۰، یک تغییر انقلابی در چارچوب مفهومی آنالیز شکل گرفت، که در نهایت منجر به دگرگونی و تعمیم گسترده از درک اشیاء اساسی نظریه مانند توابع و مفاهیمی مانند پیوستگی، مشتق‌پذیری و انتگرال‌گیری شد.
همه ایده‌ها در دیدگاه قدیمی مبنی بر این که توابع داده شده توسط

فرمول‌ها یا سایر توصیفات «تحلیلی» در آنالیز، ماهیتا پیوسته (یا تقریبا پیوسته) هستند، یا لزوما برای بیشتر نقاط مشتق‌پذیرند، و علاوه بر این بر اساس روش‌های قابل قبول انتگرال‌پذیر هستند، سرآغاز ارائه مسیری تحت تسلط مثال‌ها و مسائل متنوع است، که در این مبحث پدیدار می‌شوند و به‌دلیل نیاز فهم موضوعات جدید به آن‌ها قابل چشم‌پوشی نیست. به موازات این تحولات، بینش‌های جدیدی رخ داد که به‌طور هم زمان هم هندسی‌تر و هم انتزاعی‌تر بودند: درک واضح‌تری از ماهیت منحنی‌ها، با طول متناهی بودن و محتوای آن‌ها. همچنین این مسیر سرآغاز نظریه مجموعه‌ها، با شروع از زیر مجموعه‌های خط، صفحه و غیره، و «اندازه» که می‌تواند به هر یک اختصاص داده شود، است.
این بدان معنی نیست که مقاومت قابل توجهی در برابر تغییر دیدگاهی که این پیشرفت به آن نیاز داشته، وجود نداشته است. به شکل متناقض گونه‌ای، برخی از ریاضیدانان برجسته زمان، کسانی که باید بیشترین اهتمام را برای این عزیمت‌های جدید انجام می‌دادند، خود بسیار مردد بودند. این که ایده‌های جدید در نهایت برنده شدند را می‌توان با توجه به سؤالات بسیاری که اکنون می‌توان به آن‌ها پرداخت، فهمید. ما در اینجا، تا حدودی به شکل غیرصریح، چندین مورد از مهم‌ترین چنین مسائلی را شرح خواهیم داد.

۱. سری‌های فوریه

کامل سازی. هرگاه f یک تابع انتگرالپذیر (ریمان) روی بازه $[-\pi,\pi]$ باشد، سری فوریه آن را در جلد ۱ به صورت $f \sim \sum a_n e^{inx}$ تعریف کردیم، که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \tag{1}$$

و دیدیم که اتحاد پارسوال به صورت زیر برقرار است:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

البته ارتباط بین تابع و ضرایب فوریه آن اگر فقط به توابع انتگرالپذیر ریمان محدود شود، همیشه مانند بالا دوطرفه نیست.

بنابراین اگر فضای $\mathcal{R}$ از چنین توابعی با نرم مربعی‌شان و فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ را با این نرم [۱] در نظر بگیریم، به هر عضو f در $\mathcal{R}$، عضو متناظر $\{a_n\}$ در $\ell^2(\mathbb{Z})$ اختصاص می‌یابد و دو نرم برابر هستند. در این حالت، ساختن اعضا در $\ell^2(\mathbb{Z})$ که به هیچ عضوی در $\mathcal{R}$ متناظر نیستند، آسان

۱. از نماد فصل ۳ جلد ۱ استفاده می کنیم.

است. توجه کنید، که $\ell^2(\mathbb{Z})$ با نرمش کامل است، درحالی که $\mathcal{R}$ چنین نیست [1].

بنابراین با دو سؤال مواجه هستیم:

(۱) «توابعی» مانند f که در اثر کامل‌سازی $\mathcal{R}$ حاصل می‌شوند، کدامند؟ به عبارت دیگر: برای دنباله $\{a_n\}$ داده شده در $\ell^2(\mathbb{Z})$، ماهیت تابع (مفروض) f متناظر با این ضرایب چیست؟

(۲) چگونه می‌توانیم از این توابع انتگرال بگیریم (و به‌طور خاص (۱) را بررسی کنیم)؟

۲. حدود و پیوستگی توابع

فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته روی بازه $[0,1]$ باشد. فرض می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

برای هر x موجود است، و در مورد ماهیت تابع حدی f جویا می‌شویم.

اگر فرض کنیم که همگرایی یکنواخت است، مباحث سرراست

[1] مباحث پیرامون قضیه ۱٫۱ در بخش ۱، فصل ۳ از جلد ۱ را ببینید.

است. اما، به محض این‌که شرط همگرایی یکنواخت را کنار می‌گذاریم، همه چیز از بنیان تغییر می‌کند و شرایطی که حاصل می‌شود می‌تواند کاملا پیچیده باشد. یک مثال از این امر با این حقیقت داده می‌شود، که می‌توان دنباله‌ای از توابع پیوسته $\{f_n\}$ ساخت که همه جا به تابعی مانند f همگرا باشد، به‌طوری‌که

الف) برای هر x، $0 \leq f_n(x) \leq 1$،

ب) دنباله $f_n(x)$ وقتی‌که $n \to \infty$، نزولی اکید است،

ج) تابع حدی f انتگرالپذیر ریمان نیست [1].

در این حالت، نظر به (الف) و (ب)، دنباله $\int_0^1 f_n(x)dx$ به یک حد می‌گراید. بنابراین طبیعی است که بپرسیم: چه روشی برای انتگرالگیری f باید استفاده شود، تا برای آن داشته باشیم

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx?$$

با انتگرال لبگ می‌توانیم هر دو مسأله فوق و مسأله قبلی را حل می‌کنیم.

---

۱. تابع f می‌تواند بسیار ناپیوسته باشد. به‌عنوان مثال، تمرین ۱۰ فصل ۱ را ببینید.

۳. طول منحنی

مطالعه منحنی‌ها در صفحه و محاسبه طول آن‌ها از مباحث اولیه‌ای است که برای یادگیری حسابان با آن سروکار داریم. فرض کنید که خم پیوسته T به‌صورت پارامتری $T = \{(x(t), y(t))\}$، $a \leq t \leq b$ در صفحه داده شده است، در نظر گرفتیم، که در آن x و y توابعی پیوسته از t هستند. طول T را به شکل معمول تعریف می‌کنیم: سوپریمم طول همه خطوط شکسته که تعداد متناهی نقطه T را به‌طور متوالی، که با افزایش t در نظر گرفته می‌شوند، متصل می‌کنند. می‌گوییم T از طول متناهی است اگر طول L آن متناهی باشد. هرگاه $x(t)$ و $y(t)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، فرمول معروف زیر را داریم

$$L = \int_a^b \left((x'(t))^۲ + (y'(t))^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}} dt. \tag{۲}$$

مشکل اصلی زمانی پیش می‌آید که خم‌های دلخواه را در نظر می‌گیریم. به‌طور خاص، می‌توانیم بپرسیم:

(۱) شرایط توابع $x(t)$ و $y(t)$ چگونه باشد تا T از طول متناهی شود؟

(۲) با برقراری این شرایط آیا فرمول (۲) برقرار است؟

مسأله اول پاسخ کاملی برحسب توابع «با تغییر کراندار» دارد درحالی که برای دومی، چنین برمی‌آید که اگر x و y با تغییر کراندار باشند، همواره انتگرال (۲) معنی دار است، ولی در حالت کلی تساوی برقرار نیست، اما تحت پارامترسازی مناسبی از خم Γ قابل دستیابی است.
مباحث جدیدی پدیدار می‌شوند. خم‌های با طول متناهی، چون به طول مجهز هستند، ماهیتا یک بعدی هستند. آیا خم‌های (نه با طول متناهی) که از بعد دو باشند، موجودند؟ خواهیم دید که در واقع، خم‌هایی در صفحه وجود دارند که یک مربع را پر می‌کنند، و اگر مفهوم بعد به شکل مناسبی تعریف شود، به شکل کلی‌تر بعدی بین ۱ و ۲ دارند.

۴. مشتقگیری و انتگرالگیری

قضیه به اصطلاح «قضیه اساسی حسابان» اعلام می‌دارد که در حقیقت مشتقگیری و انتگرالگیری دو عملیات وارون هم هستند، و این مفهوم می‌تواند به دو شکل بیان شود، که به‌طور خلاصه در

ادامه می‌آوریم.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx, \tag{۳}$$

$$\frac{d}{dx}\int_\circ^x f(y)dy = f(x). \tag{۴}$$

برای ادعای اول، وجود یک تابع پیوسته F که هیچ‌جا، مشتقپذیر نباشد، یا این که برای هر x، $F'(x)$ موجود باشد اما F' انتگرالپذیر نباشد، منجر به یافتن رده عمومی توابعی می شود که برای آن ها (۳) برقرار است. آن گونه که در (۴) دیده می شود، مسأله فرمول بندی و اثبات کامل این رابطه برای رده عمومی توابع انتگرالپذیر است که در پاسخ به دو سؤال مطرح شده بالا پیدا می شوند. این پرسش‌ها به کمک گزاره های «پوششی» خاص و مفهوم پیوستگی مطلق پاسخ داده می شوند.

۵. مسأله اندازه

مفهوم مهمی که به منظور تلاش برای پاسخ به کلیه سؤال‌های مطرح شده در بالا باید لحاظ شود، مسأله اندازه است. به بیان دقیق در صورت دو بعدی، همان مسأله تخصیص اندازه $m_۲(E)$ به هر

مجموعه دلخواه $E \subseteq \mathbb{R}^2$ است، که مفهوم استاندارد «مساحت» برای مجموعه‌های مقدماتی را تعمیم می‌دهد. بیایید در عوض به‌صورت دقیق‌تر صورت یک بعدی مسأله را بیان کنیم، که ساختن اندازه یک بعدی $m = m_1$ است، که مفهوم طول را گسترش می‌دهد.
به دنبال یافتن تابع نامفنی m تعریف شده روی خانواده زیرمجموعه های $\mathbb{R}$ به اعداد گسترش‌یافته هستیم، به این معنا که مقدار $+\infty$ را نیز اخذ می‌کند. انتظار داریم:

الف) اگر E بازه $[a,b]$ با $a \leq b$ و طول $b-a$ باشد، آن‌گاه $m(E) = b - a$.

ب) اگر $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و مجموعه‌های E_n مجزا باشند، آن‌گاه $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

شرط (ب) «به‌طور شمارا جمعپذیری» اندازه m نامیده می‌شود و حالت خاص زیر را نتیجه می‌دهد:

ب′) اگر E_1 و E_2 مجزا باشند، آن‌گاه $m(E_1 \bigcup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

با این حال برای استفاده در بسیاری از مباحث حدی که در نظریه مطرح می‌شوند، حالت کلی (ب) ضروری است و (ب′) به خودی خود قطعا ناکافی است.
به اصول (الف) و (ب) تحت انتقال پایایی m نیز اضافه می‌شود، به معنای زیر:

(ج) برای هر $h \in \mathbb{R}$، $m(E+h) = m(E)$.

یک نتیجه اولیه نظریه وجود (و یکتایی) چنین اندازه‌ای، که اندازه لبگ است، زمانی‌که خود را به رده معقولی از مجموعه‌ها، که «اندازه‌پذیر» خوانده می‌شوند، محدود کنیم. این رده از مجموعه‌ها تحت اجتماع و اشتراک و متمم‌های شمارا بسته است و شامل مجموعه‌های باز و بسته و غیره است [۱].
با ساخت این اندازه، مطالعه خود را آغاز می‌کنیم. با این ابزار نظریه کلی انتگرالگیری و به‌طور خاص پاسخ سؤال‌های مورد بحث در بالا، جریان خواهد یافت.

روال تاریخی

این مقدمه را با ذکر لیستی از رویدادهای برجسته که نشان از گسترش سریع موضوع دارد، به پایان می‌بریم.
۱۸۷۲-ساختار وایراشتراس [۲] از یک تابع هیچ جا مشتقپذیر.

۱. چنین اندازه‌ای روی رده همه مجموعه‌ها موجود نیست، چرا که مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر وجود دارند. ساختن یک چنین مجموعه‌ای را در بخش سوم فصل ۱ ببینید.

2. Weierstrass

۱۸۸۱-معرفی توابع باتغییر کراندار توسط ژوردان [1] و پس از آن (۱۸۸۷) ارتباط با از طول متناهی بودن.
۱۸۸۳-مجموعه سه سه‌ای کانتور[2].
۱۸۹۰- ساختن خم فضاپرکن پئانو.[3]
۱۸۹۸- مجموعه‌های اندازه‌پذیر بورل.[4]
۱۹۰۲- نظریه اندازه و انتگرال لبگ[5].
۱۹۰۵-ساختن مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر توسط ویتالی.[6]
۱۹۰۶-کاربرد فاتو[7] از اندازه لبگ در آنالیز مختلط.

1. Jordan
2. Cantor
3. Peano
4. Borel
5. Lebesgue
6. Vitali
7. Fatou

فصل ۱

نظریهٔ اندازه

> مجموعه‌هایی که اندازه‌شان را با رهنمون ایده‌های گذشتگان می‌توانیم تعریف کنیم، اندازه‌پذیر می‌نامیم. این‌کار را بدون این‌که منجر به این حکم شود که سایر مجموعه‌ها امکان اخذ اندازه ندارند، انجام می‌دهیم.
>
> ای. بورل ۱۸۹۸

فصل حاضر به ساخت اندازه لبگ در $\mathbb{R}^d$ و مطالعه‌ی ردهٔ حاصل از آن، توابع اندازه‌پذیر، اختصاص دارد. بعد از پرداختن به مقدمات، اولین تعریف مهم این فصل، که اندازه خارجی برای هر زیرمجموعه

E از $\mathbb{R}^d$ است، ارائه می‌شود. این مفهوم از طریق تقریب‌های ممکن به‌وسیله‌ی اجتماع مکعب‌هایی که E را می‌پوشاند، داده می‌شود. به کمک این مفهوم می‌توانیم اندازه‌پذیری را تعریف کنیم و بنابراین توجه‌مان را به مجموعه‌هایی معطوف می‌کنیم که اندازه‌پذیرند. سپس به نتیجه‌ی اصلی می‌رسیم: این‌که گردایهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر تحت متمم‌ها و اجتماع‌های شمارا بسته هستند و این‌که اگر زیرمجموعه‌ها در اجتماع مجزا باشند، اندازه روی آن جمع‌پذیر است.

مفهوم توابع اندازه‌پذیر، نتیجه‌ی طبیعی ایده مجموعه‌های اندازه‌پذیر است و رابطهٔ توابع اندازه‌پذیر با مجموعه‌های اندازه‌پذیر مشابه با رابطه مفهوم توابع پیوسته با مجموعه‌های باز (بسته) است. اما برتری مهم آن، این است که ردهٔ توابع اندازه‌پذیر تحت حدگیری نقطه به نقطه بسته است.

۱.۱ پیش‌نیازها

بحث را با مفاهیم اولیه‌ای آغاز می کنیم که برای ورود به نظریه‌ای که در زیر می‌گسترانیم، پایه ای هستند.

ایدهٔ اصلی محاسبه‌ی حجم یا اندازه‌ی یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^d$، از راه تقریب این مجموعه به وسیله اجتماع مجموعه‌های دیگر است

که هندسه‌ای ساده دارند و حجم‌شان شناخته شده است. صحبت درباره حجم زمانی‌که به مجموعه‌ها در $\mathbb{R}^d$ اشاره دارد آسان است، اما در حقیقت معنی آن مساحت در حالت $d = ۲$ و طول در حالت $d = ۱$ است. در رویکرد داده شده در اینجا از مستطیل‌ها و مکعب‌ها به‌عنوان بلوک‌های ساختاری این نظریه استفاده می‌کنیم: در $\mathbb{R}$، بازه‌ها را به کار می‌گیریم، در حالی که در $\mathbb{R}^d$ از حاصلضرب‌های بازه‌ها بهره می‌بریم. در ابعاد بالاتر مستطیل‌ها به آسانی شناخته می‌شوند و نیز حجم مفهوم استانداردی دارد که با به کار بردن حاصلضرب طول اضلاع داده می‌شود.

سپس دو قضیه ساده را اثبات می‌کنیم که اهمیت این مستطیل‌ها را در هندسه مجموعه‌های باز برجسته می‌کند: در $\mathbb{R}$ هر مجموعه باز یک اجتماع شمارا از بازه‌های باز مجزا است، در حالی که در $\mathbb{R}^d$، با $d \geq ۲$ هر مجموعه‌ی باز تقریبا یک اجتماع از مکعب‌های بسته مجزا است به این معنا که فقط مرزهای مکعب‌ها می‌تواند هم پوشانی داشته باشد. این دو قضیه سبب تعریف اندازه خارجی که بعدا ارائه خواهد شد، می‌شوند.

ما مفاهیم استانداردی که در زیر می‌آید را به کار می‌گیریم. یک **نقطه** $x \in \mathbb{R}^d$ عبارت از یک d-تایی از اعداد حقیقی است، به‌طوری که

$$x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_d)\ , \quad x_i \in \mathbb{R}\ , \quad i = ۱, ۲, \ldots, d\,.$$

جمع نقاط و ضرب اسکالر در یک عدد حقیقی مؤلفه به مؤلفه است. نرم x که با $|x|$ مشخص می‌شود، همان نرم اقلیدسی استاندارد تعریف شده با

$$|x| = \left(x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_d^۲\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

است.

فاصله‌ی بین دو نقطه x و y به سادگی $|x-y|$ است. متمم مجموعه‌ی E در $\mathbb{R}^d$ با E^c مشخص شده است و با

$$E^c = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x \notin E\right\},$$

تعریف می‌شود.

اگر E و F دو زیرمجموعه از $\mathbb{R}^d$ باشند آنگاه متمم E در F را با

$$E \setminus F = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x \in E\,,\ x \notin F\right\}.$$

مشخص می‌کنیم.

فاصلهٔ بین دو مجموعه‌ی E و F با

$$d(E,F) = \inf|x-y|,$$

تعریف می‌شود که در آن اینفیمم‌گیری روی تمام نقاط $x \in E$ و $y \in F$ انجام می‌گیرد.

مجموعه‌های باز، بسته و فشرده

گوی باز در $\mathbb{R}^d$ به مرکز x و شعاع r با

$$B_r(x) = \Big\{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| < r\Big\},$$

تعریف می‌شود. اگر برای هر $x \in E$، $r > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $B_r(x) \subset E$، آنگاه $E \subset \mathbb{R}^d$ **باز** نامیده می‌شود. بنابر تعریف یک مجموعه **بسته** است، اگر متمم‌اش باز باشد.

این نکته را به یاد داریم که هر اجتماع (نه لزوما شمارا) از مجموعه‌های باز، باز است، درحالی که به‌طور کلی اشتراک تنها تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز است. اگر نقش‌های اجتماع‌ها و اشتراک‌ها تعویض شود، یک گزاره مشابه برای ردهٔ مجموعه‌های بسته برقرار می‌شود.

مجموعه E **کراندار** نامیده می‌شود، هرگاه مشمول در گویی با شعاع متناهی باشد. یک مجموعه کراندار، **فشرده** است، اگر بسته

نیز باشد. مجموعه‌های فشرده در خاصیت پوششی هاینه–بورل صدق می‌کنند:

فرض می‌کنیم E فشرده است و $E \subset \bigcup\limits_{\alpha} \mathcal{O}_\alpha$ که در آن هر $\mathcal{O}_\alpha$ باز است. در این‌صورت تعداد متناهی از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{O}_{\alpha_N}$ وجود دارند، به‌طوری که $E \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\alpha_j}$.

به عبارتی هر پوشش یک مجموعه فشرده با یک گردایه از مجموعه‌های باز، شامل یک زیرپوشش متناهی است.

نقطهٔ $x \in \mathbb{R}^d$ **نقطهٔ حدی** مجموعهٔ E خوانده می‌شود، هرگاه برای هر $r > 0$، گوی $B_r(x)$ شامل نقاطی از E باشد. این به این معنی است که نقاطی در E وجود دارند که به اندازهٔ دلخواه به x نزدیک هستند. **نقطهٔ تنهای** E نقطهٔ $x \in E$ است، به‌طوری که $r > 0$ای وجود داشته باشد، که $B_r(x) \cap E$ برابر با $\{x\}$ است.

نقطهٔ $x \in E$ یک **نقطهٔ درونی** E نامیده می‌شود، هرگاه $r > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $B_r(x) \subset E$. مجموعهٔ همهٔ نقاط درونی E، درون E نامیده می‌شود. همچنین **بستار** E، که با $\bar{E}$ نمایش داده می‌شود، برابر با اجتماع E و همهٔ نقاط حدی‌اش است. مرز مجموعهٔ E که با ∂E مشخص می‌شود، مجموعه نقاطی است که در بستار E هستند اما در درون E نیستند.

این نکته را نیز در نظر می‌گیریم که بستار یک مجموعه، مجموعه‌ای بسته است. هر نقطهٔ E، نقطهٔ حدی‌اش است و یک مجموعهٔ بسته

است اگر و تنها اگر شامل همهٔ نقاط حدی‌اش باشد. سرانجام مجموعه بسته E **تام** است، اگر E هیچ نقطهٔ تنهایی نداشته باشد.

مستطیل‌ها و مکعب‌ها

مستطیل(بسته) R در $\mathbb{R}^d$ با حاصلضرب d تا از بازه‌های بسته و کراندار یک بعدی ایجاد می‌شود.

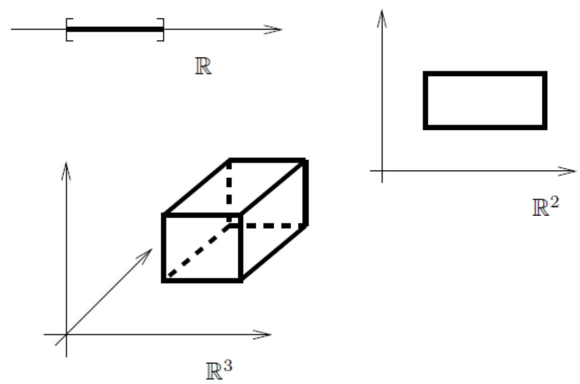
$$R = [a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

که در آن، به ازای $j = ۱, ۲, \ldots, d$ ، $a_j \leq b_j$ اعداد حقیقی هستند. به عبارت دیگر داریم:

$$R = \Big\{(x_۱, x_۲, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_j \leq x_j \leq b_j \ , \ j = ۱, ۲, \ldots, d\Big\}.$$

در نظر می‌گیریم که در این تعریف، یک مستطیل بسته است و اضلاعی موازی با محورهای مختصات دارد. در $\mathbb{R}$، مستطیل‌ها دقیقا بازه‌های بسته و کراندار هستند، در حالی که در $\mathbb{R}^۲$، مستطیل‌ها چهار ضلعی معمولی و در $\mathbb{R}^۳$ متوازی السطوح‌های بسته هستند. طول ضلع‌های مستطیل R، $b_۱ - a_۱, \ldots, b_d - a_d$ است. **حجم** مستطیل R با $|R|$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$|R| = (b_۱ - a_۱) \cdots (b_d - a_d).$$



شکل ۱.۱: مستطیل‌ها در $\mathbb{R}^d$ و $d = ۱, ۲, ۳$.

البته زمانی‌که $d = ۱$، «حجم» معادل طول است و زمانی‌که $d = ۲$ حجم، همان مساحت است. یک مستطیل باز حاصلضرب بازه‌های باز است و درون مستطیل R عبارت است از

$$(a_۱, b_۱) \times (a_۲, b_۲) \times \cdots \times (a_d, b_d).$$

اجتماع مستطیل‌ها **تقریبا مجزا** گفته می‌شود، اگر درون مستطیل‌ها مجزا باشند.

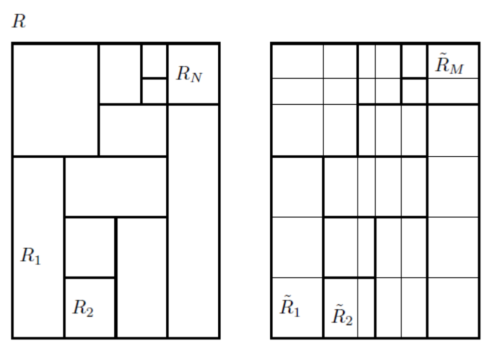
در این فصل پوشاندن به وسیلهٔ مستطیل‌ها و مکعب‌ها نقش مهمی را بازی می‌کند. بنابراین ما دو لم مهم را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۰.۱ اگر یک مستطیل اجتماع تقریبا مجزایی از تعداد متناهی از مستطیل‌های دیگر باشد، یعنی اگر $R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k$، آنگاه $|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|$.

برهان. شبکه‌ای را در نظر می گیریم که به وسیلهٔ گسترش تعداد معینی از اضلاع $R_1, \dots, R_N$ ساخته شده است. این ساختار تعداد متناهی از مستطیل‌های $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$ و یک افراز $J_1, \dots, J_N$ از اعداد صحیح بین ۱ و M به‌دست می‌دهد، به‌طوری که اجتماع‌های

$$R = \bigcup_{j=1}^{M} \tilde{R}_j\,, \quad R_k = \bigcup_{j \in J_k} \tilde{R}_j\,, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

تقریبا مجزا هستند. (تصویر ۲.۱ را ببینید.)



شکل ۲.۱: شبکهٔ ساخته شده به وسیلهٔ مستطیل‌های R_k

برای مثال، در مستطیل R می‌بینیم که $|R| = \sum_{j=1}^{M} \left|\tilde{R}_j\right|$، زیرا در حقیقت شبکه، اضلاع R را افراز می‌کند و هر $\tilde{R}_j$ شامل حاصلضرب بازه‌هایی که در این افرازها هستند می‌شود. بنابراین وقتی که حجم‌های $\tilde{R}_j$ را می‌افزاییم، حاصلضرب طول بازه‌هایی که به وجود آمده‌اند را نیز اضافه می‌کنیم. از آنجایی که این موضوع برای مستطیل‌های دیگر $R_1, \ldots, R_N$ نیز برقرار است نتیجه می‌گیریم که

$$|R| = \sum_{j=1}^{M} \left|\tilde{R}_j\right| = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j \in J_k} \left|\tilde{R}_j\right| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$

$\square$

یک اصلاح جزئی در این بحث نتایج زیر را به دست می‌دهد:

لم ۲.۱. اگر $R_1, \ldots, R_N$ و R مستطیل باشند و $R \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k$، آنگاه

$$|R| \leq \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$

ایده اصلی شامل این می‌شود که به‌کار بردن شبکه ساخته شده به وسیلهٔ توسیع همه اضلاع مستطیل‌های $R_1, \ldots, R_N$ و R صورت می‌گیرد و همچنین این نکته در نظر گرفته می‌شود که مجموعه‌های متناظر با J_k (در برهان بالا) لزوما مجزا نیستند.

اکنون جلوتر می‌رویم تا توصیفی از ساختار مجموعه‌های باز را برحسب مکعب‌ها ارائه دهیم. با $\mathbb{R}$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. هر زیرمجموعه باز $\mathcal{O}$ از $\mathbb{R}$ را می‌توان به‌طور منحصر به فرد به صورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز نوشت.

برهان. برای هر $x \in \mathcal{O}$، فرض کنید I_x بزرگ‌ترین بازه باز شامل x و مشمول در $\mathcal{O}$ را مشخص کند. به‌طور دقیق‌تر، چون $\mathcal{O}$ باز است، x مشمول در بازه (نابدیهی) کوچکی است. بنابراین اگر قرار دهیم

$$a_x = \inf\{a < x : (a, x) \subset \mathcal{O}\}, \quad b_x = \sup\{b > x : (x, b) \subset \mathcal{O}\},$$

آنگاه داریم $a_x < x < b_x$ (با مقدار نامتناهی احتمالی برای a_x و b_x). حال اگر فرض کنیم $I_x = (a_x, b_x)$ آنگاه با این ساختار داریم $x \in I_x$ و همچنین $I_x \subset \mathcal{O}$. بنابراین

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} I_x.$$

اکنون فرض می‌کنیم که بازه‌های I_x و I_y اشتراک دارند. بنابراین اجتماع‌شان (که یک بازه باز است) مشمول $\mathcal{O}$ و شامل x است. چون I_x ماکسیمال است داریم $(I_x \cup I_y) \subset I_x$ و به‌طور مشابه $(I_x \cup I_y) \subset I_y$ که تنها زمانی برقرار است که $I_x = I_y$، بنابراین هر دو بازه‌ی متمایز

در گردایه $I = \{I_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ باید مجزا باشند. برهان زمانی کامل می‌شود که نشان دهیم فقط تعداد شمارا بازه‌های مجزا در گردایه I وجود دارد. این موضوع به سهولت دیده می‌شود. زیرا هر بازه باز I_x شامل یک عدد گویا است. چون بازه‌های متفاوت، مجزا هستند، لذا باید شامل اعداد گویای متفاوتی باشند و بنابراین I شمارا است. $\square$

به‌طور طبیعی اگر $\mathcal{O}$ باز باشد و $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ که I_jها بازه‌های باز مجزا هستند، اندازه $\mathcal{O}$ باید $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$ باشد. چون این نمایش منحصر به فرد است می‌توانیم آن را به‌عنوان تعریفی از اندازه به کار ببریم. توجه می‌کنیم که هرگاه $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ باز و مجزا باشند، اندازه اجتماع آن‌ها مجموع اندازه‌هاست. اگرچه این کار مفهومی طبیعی از اندازه را برای مجموعه‌های باز تدارک می‌بیند، اما واضح نیست که چگونه به مجموعه‌های دیگر $\mathbb{R}$ تعمیم می‌یابد. نگرش مشابه در ابعاد بالاتر حتی زمانی‌که اندازه‌ی مجموعه‌های باز تعریف شود، با پیچیدگی‌هایی مواجه است، زیرا در این حالت قضیه ۳.۱ لزوما برقرار نیست(تمرین ۱۲ را ببینید). با وجود این یک نتیجه‌ی جایگزین وجود دارد.

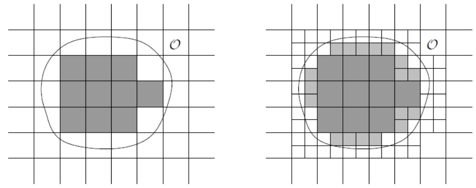
قضیه ۴.۱. هر زیرمجموعه باز $\mathcal{O}$ از $\mathbb{R}^d$، که $d \geq 1$، می‌تواند به صورت اجتماع شمارای مکعب‌های بسته و تقریبا مجزا نوشته شود.

برهان. باید یک گردایه شمارای $\mathcal{Q}$ از مکعب‌های بسته که درون‌شان مجزا هستند، بسازیم به‌طوری که $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{Q\in\mathcal{Q}} Q$.

در مرحله اول شبکه‌ای را در $\mathbb{R}^d$ در نظر می‌گیریم که با مکعب‌های بسته با طول ضلع ۱ ساخته شده است و رئوسش مختصات صحیح دارد. به عبارت دیگر شبکه طبیعی از خطوط موازی با محورهای مختصات در نظر می‌گیریم که با شبکه $\mathbb{Z}^d$ ساخته شده است. همچنین از شبکه‌هایی استفاده می‌کنیم که به وسیلهٔ مکعب‌هایی با طول 2^{-N} ساخته شده‌اند و با دو نیم کردن شبکه اصلی به دست آمده‌اند.

پذیرفتن یا رد کردن مکعب‌ها در شبکه اصلی طبق قانون زیر صورت می‌گیرد: اگر Q کاملا مشمول در $\mathcal{O}$ باشد، آنگاه Q را می‌پذیریم؛ اگر Q با $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}^c$ اشتراک داشته باشد آنگاه به‌طور موقتی می‌پذیریم و اگر Q کاملا مشمول در $\mathcal{O}^c$ باشد، آنگاه آن را رد می‌کنیم.

در مرحله دوم مکعب‌های موقتا پذیرفته شده را به 2^d مکعب با طول $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم. سپس این روش را تکرار می‌کنیم، مکعب‌های کوچک‌تر را می‌پذیریم، اگر کاملا مشمول در $\mathcal{O}$ باشند. اگر آن‌ها با $\mathcal{O}$ و $\mathcal{O}^c$ اشتراک داشته باشند، به‌طور موقتی می‌پذیریم و اگر مشمول در $\mathcal{O}^c$ باشند، آن‌ها را نمی‌پذیریم. تصویر۱.۳ این مراحل را برای یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱: تجزیه‌ی $\mathcal{O}$ به مکعب‌های تقریبا مجزا

این روش را بی‌نهایت بار تکرار می‌کنیم. با این ساختار گردایه حاصل $\mathcal{Q}$، از همه مکعب‌های پذیرفته شده شمارا است و شامل مکعب‌های تقریبا مجزا است. برای دیدن این‌که چرا اجتماع‌شان تمام $\mathcal{O}$ است، به این نکته توجه می‌کنیم که برای $x \in \mathcal{O}$ داده شده و یک مکعب با طول ضلع ۲^{-N} وجود دارد، (که از نصف کردن‌های متوالی شبکه اصلی به دست آمده است) که شامل x و کاملا مشمول در $\mathcal{O}$ است. این مکعب پذیرفته شده یا مشمول در یک مکعب است که قبلا پذیرفته شده. این نشان می‌دهد که اجتماع همه مکعب‌ها در $\mathcal{Q}$، $\mathcal{O}$ را می‌پوشاند. $\square$

یک بار دیگر اگر $\mathcal{O} = \bigcup_{j=۱}^{\infty} R_j$ که در آن مستطیل‌های R_j تقریبا مجزا هستند، معقول است که اندازه $\mathcal{O}$ را $\sum_{j=۱}^{\infty}|R_j|$ قرار دهیم و این طبیعی است چرا که حجم مرز هر مستطیل باید صفر باشد و هم‌پوشانی مستطیل‌ها نباید بر حجم $\mathcal{O}$ اثر داشته باشد. با این وجود

دقت می‌کنیم که تجزیه بالا به مکعب‌ها منحصر به فرد نیست و لذا این‌که مجموع از تجزیه مستقل است، بلافاصله به‌دست نمی‌آید. بنابراین در $\mathbb{R}^d$ با $d \geq ۲$ مفهوم حجم یا مساحت حتی برای مجموعه‌های باز پیچیده‌تر است.

در واقع نظریه کلی به‌دست آمده در بخش بعد به مفهوم حجم منجر می‌شود که با تجزیه مجموعه‌های باز در دو قضیه قبل سازگار است و برای همه ابعاد به کار می‌رود. قبل از این‌که به آن برگردیم، درباره یک مثال مهم در $\mathbb{R}$ بحث می‌کنیم.

مجموعه کانتور

مجموعه کانتور نقش اساسی در نظریه مجموعه‌ها و به‌طور کلی در آنالیز بازی می‌کند. این مجموعه و مجموعه‌های مشابه آن یک منبع ارزشمند، برای مثال‌های روشن‌گرانه فراهم می‌کنند.

با بازه بسته $C_۰ = [۰, ۱]$ شروع می‌کنیم و فرض می‌کنیم $C_۱$ مجموعه به دست آمده از حذف کردن بازه باز یک سوم میانی $[۰, ۱]$ را مشخص کند. به عبارتی

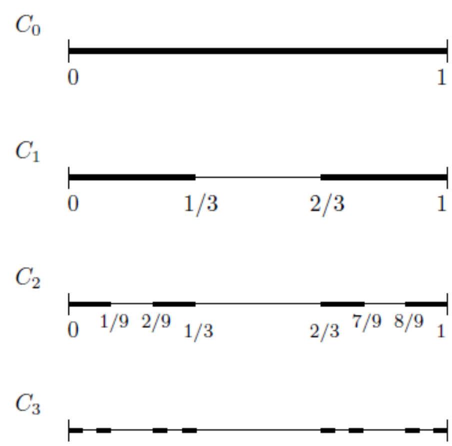
$$C_۱ = \left[۰, \frac{۱}{۳}\right] \cup \left[\frac{۲}{۳}, ۱\right].$$

این روش را برای هر زیربازه $C_۱$ تکرار می‌کنیم و بازه باز یک سوم

میانی را حذف می‌کنیم. در مرحله دوم به

$$C_۲ = \left[۰, \frac{۱}{۹}\right] \cup \left[\frac{۲}{۹}, \frac{۱}{۳}\right] \cup \left[\frac{۲}{۳}, \frac{۷}{۹}\right] \cup \left[\frac{۸}{۹}, ۱\right],$$

می‌رسیم. این مرحله را برای هر زیربازه $C_۲$ تکرار می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم (تصویر ۴.۱).



شکل ۴.۱: ساختار مجموعهٔ کانتور

این روش به دنباله C_k , $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ از مجموعه‌های فشرده و

$$C_۰ \supset C_۱ \supset C_۲ \supset \cdots \supset C_k \supset C_{k+۱} \supset \cdots,$$

منجر می‌شود. **مجموعه کانتور** $\mathcal{C}$ بنا به تعریف اشتراک همه C_kها است:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

مجموعه $\mathcal{C}$ ناتهی است. چون همه نقاط پایانی بازه‌ها در C_k (برای هر k) متعلق به $\mathcal{C}$ است. با وجود ساختار ساده‌اش، مجموعه کانتور خواص توپولوژیکی و آنالیزی جالب بسیاری دارد. برای نمونه $\mathcal{C}$ بسته و کراندار است، بنابراین فشرده است. همچنین $\mathcal{C}$، کلا ناهمبند است. به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{C}$، $z \notin \mathcal{C}$ موجود است که بین x و y قرار دارد. سرانجام $\mathcal{C}$ تام است: به این معنی که نقطه تنها ندارد (تمرین ۱).

در ادامه توجه مان را به مسأله تعیین اندازه $\mathcal{C}$ معطوف می‌کنیم. مسأله ظریفی است که هر کس بسته به مفهوم اندازه از زوایای مختلف به آن نگاه کرده است. به‌عنوان مثال از دید عدد اصلی مجموعه کانتور نسبتا بزرگ است: شمارا نیست، زیرا می‌تواند به بازه $[0,1]$ نگاشته شود. عدد اصلی مجموعه کانتور پیوستار است (تمرین۲).

با وجود این از نظرگاه «طول» اندازه $\mathcal{C}$ کوچک است. صرف نظر از جزئیات، مجموعه کانتور طول صفر دارد که از بحث شهودی زیر به دست می‌آید: مجموعه $\mathcal{C}$ به وسیله مجموعه‌های C_k پوشانده شده است که طولشان به صفر می‌رسد. در واقع C_k یک اجتماع مجزا

از 2^k بازه به طول 3^{-k} است. طول کلی C_k معادل با $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ است اما برای هر k، $\mathcal{C} \subset C_k$ و وقتی که k به بی‌نهایت میل می‌کند $\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$. ما مفهوم اندازه را تعریف و در این خصوص در قسمت بعد بحث خواهیم کرد.

۲.۱ اندازه خارجی

مبحث اندازه خارجی یکی از دو مفهوم مهمی است که برای گسترش مفهوم اندازه به آن نیاز داریم. با تعریف و خواص اصلی اندازه خارجی شروع می‌کنیم. به بیان نادقیق، اندازه خارجی m_* به هر زیرمجموعه $\mathbb{R}^d$ مفهومی اولیه از اندازه تخصیص می‌دهد؛ مثال‌های متفاوت نشان می‌دهند که این مفهوم بر شهود اولیه‌مان منطبق است. با وجود این زمانی که با اجتماع مجموعه‌های مجزا کار می‌کنیم، اندازه خارجی فاقد خاصیت جمعپذیری مورد انتظار است. این مشکل را در قسمت بعد برطرف می کنیم، آن زمانی که در مورد جزئیات مفهوم کلیدی دیگر نظریه اندازه، یعنی مجموعه‌های اندازه‌پذیر، بحث می‌کنیم.

اندازه خارجی، همانگونه که از نامش پیداست، تلاش می‌کند حجم مجموعه E را به وسیله تقریب زدن آن از بیرون توصیف کند. مجموعه E با مکعب‌ها پوشانده می‌شود و اگر این پوشش ظریف‌تر شود و مکعب‌های کمتری هم‌پوشانی داشته باشند، حجم E باید به مجموعه حجم‌های مکعب‌ها نزدیک باشد.

تعریف دقیق در زیر می‌آید: اگر E یک زیرمجموعه دلخواه از $\mathbb{R}^d$ باشد. **اندازه خارجی**[۱] E برابر است با:

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|, \tag{۱.۱}$$

که در آن اینفیمم‌گیری روی پوشش‌های شمارای $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ از مکعب‌های بسته انجام می‌شود. اندازه خارجی همیشه نامنفی است، اما می‌تواند نامتناهی باشد. بنابراین در حالت کلی داریم $0 \leq m_*(E) \leq \infty$ و با این حساب اندازه خارجی مقادیرش را در اعداد مثبت توسعه یافته می‌گیرد.

چند نکته مقدماتی درباره‌ی تعریف اندازه خارجی حاصل از (۱.۱) را ارائه می‌کنیم.

---

۱. بعضی از مؤلفان عنوان **اندازه بیرونی** را به جای اندازه خارجی به کار می‌برند.

(آ) توجه به این نکته ضروری است که مجموع‌های متناهی در تعریف $m_*(E)$ کافی نیستند. مقداری که با استفاده از پوشش‌های E با اجتماع‌های متناهی مکعب‌ها به‌دست می‌آید عموما بزرگ‌تر از $m_*(E)$ است. (تمرین ۱۴ را ببینید.)

(ب) می‌توان پوشاندن با مکعب‌ها را با پوشاندن با مستطیل‌ها یا گوی‌ها جایگزین کرد. بررسی این‌که در این روش همان اندازه خارجی حاصل می‌شود، نسبتا مستقیم است. (تمرین ۱۵ را ببینید.) بررسی معادل بودن در حالت کار کردن با گوی‌ها پیچیده‌تر است. (تمرین ۲۶ فصل ۳ را ببینید.)

با فراهم آوردن مثال از مجموعه‌هایی که اندازه‌های خارجی‌شان محاسبه شدنی است، شروع می‌کنیم و سپس تطابق آن با ایده شهودی‌مان از مفهوم حجم را بررسی می‌کنیم. (طول با بعد یک، مساحت با بعد دو و غیره).

مثال ۵.۱. اندازه خارجی یک نقطه صفر است. به وضوح یک نقطه مکعبی با حجم صفر است و خودش را می‌پوشاند. البته اندازه خارجی مجموعه تهی نیز صفر است.

مثال ۶.۱. اندازه خارجی مکعب بسته با حجمش معادل است. در واقع فرض می‌کنیم Q یک مکعب بسته در $\mathbb{R}^d$ است. چون Q

خودش را می‌پوشاند، پس $m_*(Q) \leq |Q|$. بنابراین کافی است عکس نامساوی بالا را ثابت کنیم. یک پوشش دلخواه از مکعب‌ها را مانند $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ در نظر می‌گیریم. کافی است ثابت کنیم

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|. \tag{۲.۱}$$

برای $\varepsilon > 0$ ثابت و به‌ازای هر j یک مکعب باز S_j که شامل Q_j است را در نظر می‌گیریم به‌طوری که $|S_j| \leq (1+\varepsilon)|Q_j|$. از پوشش باز $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ برای مجموعه فشرده Q، یک زیرپوشش متناهی انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که احتمالا پس از شماره‌گذاری مجدد،

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_j.$$

از مکعب‌های S_j بستار می گیریم. با به کار بستن لم ۲.۱ داریم

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{N} |S_j|.$$

در نتیجه

$$|Q| \leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \leq (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

چون ε دلخواه بود، نامساوی (۲.۱) برقرار می‌شود. بنابراین $|Q| \leq m_*(Q)$، همان‌طور که انتظار داشتیم.

مثال ۷.۱. اگر Q یک مکعب باز باشد، نتیجه‌ی $m_*(Q) = |Q|$ همچنان برقرار است. چون Q به وسیلهٔ بستارش $\bar{Q}$ پوشانده می‌شود و $|\bar{Q}| = |Q|$، بلافاصله می‌بینیم که $m_*(Q) \leq |Q|$. برای اثبات عکس نامساوی توجه می‌کنیم که اگر $Q_\circ$ مکعب بسته مشمول در Q باشد، آنگاه $m_*(Q_\circ) \leq m_*(Q)$. زیرا هر پوشش Q با تعداد شمارایی از مکعب‌های بسته نیز یک پوشش $Q_\circ$ است. (ملاحظه ۱۱.۱ را ببینید.) بنابراین $|Q_\circ| \leq m_*(Q)$ و چون می‌توانیم $Q_\circ$ را با حجمی به اندازه دلخواه نزدیک به $|Q|$ انتخاب کنیم، داریم $|Q| \leq m_*(Q)$.

مثال ۸.۱. اندازه خارجی مستطیل R با حجمش برابر است. در واقع با بحثی معادل با مثال ۶.۱ می‌بینیم که $|R| \leq m_*(R)$. برای به دست آوردن عکس نامساوی، شبکه‌ای را که با مکعب‌هایی با طول ضلع $\frac{1}{k}$ ساخته شده، در نظر بگیرید. سپس اگر $\mathcal{Q}$ شامل گردایه (متناهی) از همه مکعب‌هایی باشد که کاملا مشمول در R هستند و $\mathcal{Q}'$ گردایه (متناهی) از همه مکعب‌هایی باشد که با متمم R اشتراک دارند، آنگاه $R \subset \bigcup_{Q \in (\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}')} Q$. همچنین با یک بررسی ساده داریم

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q| \leq |\mathbb{R}|.$$

به علاوه $O(k^{d-1})$ مکعب[1] در $\mathcal{Q}'$ وجود دارند و این مکعب‌ها حجم k^{-d} دارند، به‌طوری که $\sum_{Q\in\mathcal{Q}'}|Q| = O\left(\frac{1}{k}\right)$. بنابراین

$$\sum_{Q\in(\mathcal{Q}\cup\mathcal{Q}')} |Q| \leq |R| + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

حال با فرض میل کردن k به بی‌نهایت داریم، $m_*(R) \leq |R|$.

مثال ۹.۱. اندازه خارجی $\mathbb{R}^d$ بی‌نهایت است. این حقیقت از این گزاره به دست می‌آید، که هر پوشش $\mathbb{R}^d$ در عین حال یک پوشش از یک مکعب دلخواه $Q \subset \mathbb{R}^d$ نیز هست. بنابراین $|Q| \leq m_*(\mathbb{R}^d)$. از آنجا که Q می‌تواند حجم به اندازه دلخواه بزرگ داشته باشد، داریم $m_*(\mathbb{R}^d) = \infty$.

مثال ۱۰.۱. مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ اندازه خارجی صفر دارد. از روش ساختن $\mathcal{C}$ می‌دانیم که $\mathcal{C} \subset C_k$ که هر C_k یک اجتماع مجزای 2^k بازه بسته با طول 3^{-k} است و در نتیجه برای هر k، $m_*(k) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$. بنابراین $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

---

۱. به خواننده یادآوری می‌کنیم که عبارت $f(x) = O(g(x))$ به این معنی است که به‌ازای ثابت C و همه مقادیری که برای x داده شده است: $|f(x)| \leq C|g(x)|$. در این مثال به خصوص، وقتی $k \to \infty$، تعداد کمتری از Ck^{d-1} مکعب وجود دارد.

خواص اندازه خارجی

مثال‌ها و توضیح‌های قبل، شهودی را که در تعریف اندازه خارجی وجود دارد، به دست می‌دهد. در این‌جا به مطالعه بیشتری از m_* می‌پردازیم و پنج خاصیت اندازه خارجی را که در آنچه در ادامه به آن نیازمندیم، ثابت می‌کنیم.

ابتدا نکته زیر را که بلافاصله از تعریف m_* به دست می‌آید، بیان می‌کنیم:

برای هر $\varepsilon > ۰$ پوشش $E \subset \bigcup_{j=۱}^{\infty} Q_j$ موجود است، به‌طوری که

$$\sum_{j=۱}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon$$

خواص مربوط به اندازه خارجی به صورت یک سری از ملاحظات زیر لیست شده است.

ملاحظه ۱.۱۱. (یکنوایی) اگر $E_۱ \subset E_۲$، آنگاه $m_*(E_۱) \leq m_*(E_۲)$.

این حکم به این دلیل است که هر پوشش $E_۲$ با گردایه شمارا از مکعب‌ها یک پوشش برای $E_۱$ نیز هست. به خصوص یکنوایی این نتیجه را می‌دهد که هر زیرمجموعه کراندار $\mathbb{R}^d$ اندازه خارجی متناهی دارد.

ملاحظه ۱.۱۲. (به‌طور شمارا زیرجمعپذیری) اگر $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$، آنگاه

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j).$$

ابتدا فرض می‌کنیم هر $m_*(E_j) < \infty$، در غیر این‌صورت نامساوی به وضوح برقرار است. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ از تعریف اندازه خارجی برای هر j یک پوشش $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ از مکعب‌های بسته با شرط

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

به دست می‌آید. بنابراین $E \subset \bigcup\limits_{j,k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ یک پوشش E از مکعب‌های بسته است، پس

$$\begin{aligned} m_*(E) &\leq \sum_{j,k} |Q_{k,j}| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

چون رابطه برای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار است، ملاحظه دوم ثابت می‌شود.

ملاحظه ۱۳.۱. اگر $E \subset \mathbb{R}^d$ آنگاه $m_*(E) = \inf m_*(\mathcal{O})$، که در آن اینفیمم روی همه مجموعه‌های باز $\mathcal{O}$ شامل E انجام می‌شود.

بنابر یکنوایی واضح است که نامساوی $m_*(E) \leq \inf m_*(\mathcal{O})$ برقرار است. برای اثبات عکس نامساوی فرض می‌کنیم، $\varepsilon > ۰$ و مکعب‌های Q_j را طوری انتخاب می‌کنیم، که

$$E \subset \bigcup_{j=۱}^{\infty} Q_j$$

و

$$\sum_{j=۱}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \frac{\varepsilon}{۲},$$

فرض می‌کنیم Q_j° یک مکعب باز شامل Q_j را مشخص کند، به‌طوری که

$$\left|Q_j^\circ\right| \leq |Q_j| + \varepsilon_\circ$$

آنگاه $Q = \bigcup_{j=۱}^{\infty} Q_j^\circ$ باز است. بنابر ملاحظه ۱۲.۱

$$\begin{aligned} m_*(\mathcal{O}) &\leq \sum_{j=۱}^{\infty} m_*(Q_j^\circ) = \sum_{j=۱}^{\infty} \left|Q_j^\circ\right| \\ &\leq \sum_{j=۱}^{\infty} \left(|Q_j| + \frac{\varepsilon}{۲^{j+۱}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le \sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|+\frac{\varepsilon}{2}\\&\le m_*(E)+\varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین $\inf m_*(\mathcal{O}) \le m_*(E)$، همانطور که نشان داده شد.

ملاحظه ۱۴.۱. اگر $E = E_1 \cup E_2$ و $d(E_1, E_2) > 0$، آنگاه

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

باتوجه به ملاحظه ۱۲.۱ می‌دانیم که $m_*(E) \le m_*(E_1)+m_*(E_2)$. بنابراین کافی است عکس نامعادله را ثابت کنیم. برای رسیدن به این هدف در ابتدا، δ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $d(E_1, E_2) > \delta > 0$. سپس یک پوشش $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ با مکعب‌های بسته انتخاب می‌کنیم که $\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| \le m_*(E)+\varepsilon$. آنگاه در تقسیم کردن Q_j به مکعب‌های کوچک‌تر، فرض می‌کنیم که هر Q_j قطری کمتر از δ دارد. در این حالت هر Q_j می‌تواند حداکثر با یکی از دو مجموعه E_1 یا E_2 اشتراک داشته باشد. اگر منظور از j_1 و j_2 مجموعه همه اندیس‌های j باشد که Q_j به ترتیب E_1 و E_2 را قطع می‌کند، در این‌صورت $J_1 \cap J_2$ تهی است و داریم

$$E_1 \subset \bigcup_{j\in J_1}^{\infty} Q_j,$$

و همچنین

$$E_۲ \subset \bigcup_{j\in J_۲}^{\infty} Q_j.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} m_*(E_۱) + m_*(E_۲) &\leq \sum_{j\in J_۱} |Q_j| + \sum_{j\in J_۲} |Q_j| \\ &\leq \sum_{j=۱}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon, \end{aligned}$$

از آنجایی که ε دلخواه بود، برهان ملاحظه ۱۴.۱ کامل است.

ملاحظه ۱۵.۱. اگر مجموعه E اجتماع شمارایی از مکعب‌های تقریبا مجزای Q_j باشد، $E = \bigcup_{j=۱}^{\infty} Q_j$ آنگاه

$$m_*(E) = \sum_{j=۱}^{\infty} |Q_j|.$$

فرض می‌کنیم $\tilde{Q}_j$ مکعبی اکیدا مشمول در Q_j باشد، به‌طوری که $|Q_j| \leq \left|\tilde{Q}_j\right| + \frac{\varepsilon}{۲^j}$ که در آن $\varepsilon > ۰$ دلخواه و ثابت است، آنگاه به‌ازای هر N مکعب‌های $\tilde{Q}_۱, \tilde{Q}_۲, \ldots, \tilde{Q}_N$ مجزا هستند. بنابراین در یک فاصله متناهی از یکدیگر قرار دارند و کاربردی از ملاحظه ۱۴.۱ نتیجه

می‌دهد

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \left|\tilde{Q}_j\right| \geq \sum_{j=1}^{N} \left(|Q_j| - \frac{\varepsilon}{2^j}\right).$$

چون $\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j \subset E$ نتیجه می‌گیریم برای هر عدد صحیح N

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \varepsilon,$$

در حدگیری وقتی که N به بی‌نهایت میل می‌کند، برای هر $\varepsilon > 0$ نتیجه می‌گیریم $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon$ بنابراین $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E)$. بنابراین با ترکیب با ملاحظه ۱۲.۱ تساوی ثابت می‌شود.

خاصیت آخر نشان می‌دهد که اگر یک مجموعه اجتماع تقریبا مجزای مکعب‌ها باشد، آنگاه اندازه خارجی‌اش با مجموع حجم‌های مکعب‌ها برابر است. به خصوص بنابر قضیه ۴.۱ می‌بینیم، اندازه خارجی یک مجموعه باز با مجموع حجم‌های مکعب‌هایی که به آن‌ها تجزیه شده، برابر است و این بر حدس اولیه منطبق است. به علاوه این حکم نیز بر این موضوع دلالت دارد که مجموع مستقل از تجزیه است.

می‌توان دید، حجم مجموعه‌های ساده که با حساب معمولی محاسبه شده‌اند با اندازه خارجی آن‌ها یکی است. این حکم هنگامی که ابزارهای لازم نظریه انتگرال را به‌دست آوردیم، می‌تواند آسان‌تر ثابت شود. (فصل ۲ را ببینید.) به خصوص می‌توانیم ثابت کنیم اندازه خارجی یک گوی (باز یا بسته) با حجمش برابر است.

با وجود ملاحظات ۱۴.۱ و ۱۵.۱ نمی‌توانیم به‌طور کلی نتیجه بگیریم، اگر $E_1 \cup E_2$ یک اجتماع مجزا از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ باشد آنگاه

$$m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2) \tag{۳.۱}$$

در حقیقت (۳.۱) زمانی برقرار است که مجموعه‌های مورد بحث خیلی «غیر معمول» نیستند، اما به معنی‌ای که در زیر توصیف می‌شود، اندازه‌پذیر هستند.

۳.۱ مجموعه‌های اندازه‌پذیر و اندازه لبگ

مفهوم «اندازه‌پذیری» یک گردایه از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ را مشخص می‌کند که برای آن‌ها اندازه خارجی همه خواص مورد انتظار که شامل جمع‌پذیری (و در حقیقت جمع‌پذیری شمارا) برای اجتماع مجموعه‌های مجزا نیز می‌شود، را داراست.

روش‌های مختلفی برای تعریف اندازه‌پذیری وجود دارد، که همه آنها با یکدیگر معادلند. احتمالا ساده‌ترین و شهودی‌ترین آنها در ادامه آمده است. یک زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^d$ **اندازه‌پذیر لبگ** یا برای سادگی **اندازه‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک مجموعه باز $\mathcal{O}$ موجود باشد، به‌طوری که $E \subset \mathcal{O}$ و $m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon$.

در اینجا لازم است این تعریف با ملاحظه ۱۳.۱، که برای همه مجموعه‌های E برقرار است، مقایسه شود.

اگر E اندازه‌پذیر باشد، **اندازه لبگ** (یا **اندازه**) $m(E)$ را با

$$m(E) = m_*(E),$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح اندازه لبگ همه خواص اندازه خارجی ذکر شده در ملاحظات ۱۱.۱ تا ۱۵.۱ را به ارث می‌برد. بلافاصله از تعریف در می‌یابیم:

خاصیت ۱۶.۱. هر مجموعه باز $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است.

اکنون هدف ما این است که خواص متنوع بیشتری از مجموعه‌های اندازه‌پذیر گردآوریم. به خصوص ثابت می‌کنیم، گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر تحت عملکردهای مختلف در نظریه مجموعه‌ها یعنی اجتماع‌های شمارا، اشتراک‌های شمارا و متمم‌ها به خوبی عمل می‌کند.

خاصیت ۱.۱۷. اگر $m_*(E) = 0$، آنگاه E اندازه‌پذیر است. به خصوص اگر F زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه با اندازه خارجی صفر باشد، آنگاه F اندازه‌پذیر است.
بنابر ملاحظه ۱.۱۳ اندازه خارجی، برای هر $\varepsilon > 0$ یک مجموعه باز $\mathcal{O}$ با شرط $E \subset \mathcal{O}$ و $m_*(O) \leq \varepsilon$ وجود دارد، چون $(\mathcal{O} \setminus E) \subset \mathcal{O}$، یکنوایی اندازه نتیجه می‌دهد

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

به‌عنوان یکی از نتایج این خاصیت به این حقیقت می‌رسیم که مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ در مثال ۱.۱۰ اندازه‌پذیر است و اندازه صفر دارد.

خاصیت ۱.۱۸. هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.
فرض می کنیم $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ که در آن هر E_j نیز اندازه‌پذیر است. $\varepsilon > 0$ داده شده است. برای هر j مجموعه باز $\mathcal{O}_j$ را با شرط $E_j \subset \mathcal{O}_j$ و $m_*(\mathcal{O}_j \setminus E_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$، انتخاب می‌کنیم. در این صورت اجتماع $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j$ باز است و $E \subset \mathcal{O}$ و $(\mathcal{O} \setminus E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathcal{O}_j \setminus E_j)$. لذا یکنوایی و زیرجمعپذیری اندازه خارجی نتیجه می‌دهد

$$m_*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(\mathcal{O}_j \setminus E_j) \leq \varepsilon.$$

خاصیت ۱۹.۱. مجموعه‌های بسته اندازه‌پذیرند.
در ابتدا کافی است ثابت کنیم مجموعه‌های فشرده اندازه‌پذیرند. در واقع هر مجموعه بسته F می‌تواند به صورت اجتماعی از مجموعه‌های فشرده نوشته شود. به عبارت دیگر می‌توان نوشت $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F \cap B_k$ که در آن B_k گوی بسته با شعاع k به مرکز مبدأ است و سپس خاصیت ۱۳.۱ را به کار می‌بریم.

بنابراین فرض کنید F فشرده است (به خصوص $m_*(F) < \infty$) و فرض کنید $\varepsilon > 0$. بنابر ملاحظه ۱۳.۱ می‌توانیم مجموعه باز $\mathcal{O}$ را با شرط $F \subset \mathcal{O}$ و

$$m_*(\mathcal{O}) \leq m_*(F) + \varepsilon$$

انتخاب کنیم. چون F بسته است، تفاضل $\mathcal{O} \setminus F$ باز است و بنابر قضیه ۴.۱ می‌توانیم این تفاضل را به‌عنوان یک اجتماع شمارایی از مکعب‌های تقریبا مجزای

$$\mathcal{O} \setminus F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

بنویسیم. برای N ثابت، اجتماع متناهی $K = \bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$ فشرده است. بنابراین $d(K, F) > 0$. (این حکم کوچک را در لم زیر جداگانه بررسی می‌کنیم.) چون $(K \cup F) \subset \mathcal{O}$، ملاحظات ۱۱.۱، ۱۴.۱ و ۱۵.۱ درباره

اندازه خارجی نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} m_*(\mathcal{O}) &\geq m_*(F) + m_*(K) \\ &= m_*(F) + \sum_{j=۱}^{N} m_*(Q_j). \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_{j=۱}^{N} m_*(Q_j) \leq m_*(\mathcal{O}) - m_*(F) \leq \varepsilon$. همچنین زمانی که N به بی‌نهایت میل می‌کند، این حکم برقرار است. با به کار بستن خاصیت زیرجمعپذیری اندازه خارجی، سرانجام نتیجه می‌گیریم

$$m_*(\mathcal{O} \setminus F) \leq \sum_{j=۱}^{\infty} m_*(Q_j) \leq \varepsilon.$$

برای تکمیل بحث بالا لم بعدی را در اینجا می‌آوریم:

لم ۲۰.۱. اگر F بسته و K فشرده باشد و مجموعه‌های مجزایی باشند، آنگاه

$$d(F, K) > ۰.$$

برهان. چون F بسته است، برای هر $x \in K$، $\delta_x > ۰$ موجود است، به‌طوری که

$$d(x, F) > ۳\delta_x$$

و چون $\bigcup_{x\in K} B_{2\delta_x}(x)$، مجموعه K را می‌پوشاند و K فشرده است، می‌توانیم زیرپوششی مانند $\bigcup_{j=1}^{N} B_{2\delta_j}(x_j)$ بیابیم. اگر قرار دهیم $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_N)$، آنگاه داریم

$$d(K,F) \geq \delta > 0$$

در واقع اگر $x \in K$ و $y \in F$ آنگاه برای j داریم

$$|x_j - x| \leq 2\delta_j$$

و با استفاده از نوع ساختار داریم $|y - x_j| \geq 3\delta_j$. بنابراین

$$|y - x| \geq |y - x_j| - |x_j - x| \geq 3\delta_j - 2\delta_j \geq \delta.$$

□

خاصیت ۲۱.۱. متمم یک مجموعه اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.

اگر E اندازه‌پذیر باشد آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n یک مجموعه باز $\mathcal{O}_n$ را با شرط $E \subset \mathcal{O}_n$ و $m_*(\mathcal{O}_n \backslash E) \leq \frac{1}{n}$ انتخاب می‌کنیم. مجموعه متمم، $\mathcal{O}_n^c$ بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است و این نتیجه می‌دهد که اجتماع $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^c$ نیز بنابر خاصیت ۱۸.۱ اندازه‌پذیر است. حال به سادگی توجه می‌کنیم که $S \subset E^c$ و برای هر n

$$(E^c \setminus S) \subset (\mathcal{O}n \setminus E),$$

به‌طوری که برای هر n، $m_*(E^c \setminus S) \leq \frac{1}{n}$. در این‌صورت $m_*(E^c \setminus S) = 0$ و $E^c \setminus S$ با توجه به خاصیت۱۷.۱ اندازه‌پذیر است. بنابراین E^c اندازه‌پذیر است، زیرا اجتماع دو مجموعه اندازه‌پذیر S و $(E^c \setminus S)$ است.

خاصیت ۲۲.۱. هر اشتراک شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.

از آنجا که

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c \right)^c$$

این حکم از خاصیت‌های ۱۸.۱ و ۲۱.۱ به دست می‌آید.

در نتیجه خانواده مجموعه‌های اندازه‌پذیر تحت اعمال معروف نظریه مجموعه‌ها، بسته است.

خاطر نشان می‌کنیم که چیزی بیش از بسته بودن گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر تحت اجتماع‌ها و اشتراک‌های متناهی را نشان داده‌ایم. در واقع ثابت کرده‌ایم که گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر تحت اجتماع‌ها و اشتراک‌های شمارا بسته است. این گذار از عملیات متناهی به انواع نامتناهی در مباحث آنالیزی بسیار حائز اهمیت است. با وجود این تأکید می‌کنیم زمانی که با مجموعه‌های اندازه‌پذیر سر و کار داریم عملیات اجتماع یا اشتراک‌های ناشمارا مجاز نیستند!

قضیه ۲۳.۱. اگر $E_1, E_2, \ldots$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا باشند و $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$، آنگاه

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که هر E_j کراندار است. سپس برای هر j با به کار بردن تعریف اندازه‌پذیری برای E_j، می‌توانیم زیرمجموعه بسته F_j از E_j را با شرط $m_*(E_j \setminus F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ انتخاب کنیم. برای هر N ثابت مجموعه‌های F_1، …، F_N فشرده و مجزا هستند، به‌طوری که $m\left(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j)$. چون $\bigcup_{j=1}^{N} F_j \subset E$، باید داشته باشیم

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{N} m(F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \varepsilon.$$

فرض می‌کنیم N به بی‌نهایت میل می‌کند چون ε دلخواه بود، داریم

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

از آنجایی که عکس نامساوی همیشه برقرار است (با توجه به زیرجمعپذیری در ملاحظه ۱۲.۱) حکم در حالتی که هر E_j کراندار باشد حاصل می‌شود.

در حالت کلی دنباله‌ای از مکعب‌های $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ را که به $\mathbb{R}^d$ صعود می‌کنند انتخاب می‌کنیم. به این معنی که برای هر $k \geq 1$، $Q_k \subseteq Q_{k+1}$ و $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \mathbb{R}^d$. سپس فرض می‌کنیم $S_1 = Q_1$ و برای $k \geq 2$، $S_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$. اگر مجموعه‌های اندازه‌پذیر را به صورت $E_{j,k} = E_j \cap S_k$ تعریف کنیم، آنگاه

$$E = \bigcup_{j,k} E_{j,k}.$$

اجتماع بالا مجزا و هر $E_{j,k}$ کراندار است. به علاوه $E_j = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$ و این اجتماع نیز مجزا است. با کنار هم قرار دادن این حقایق و با به کار بردن مطلبی که قبلا ثابت شده است، داریم

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_{j} \sum_{k} m(E_{j,k}) = \sum_{j} m(E_j).$$

□

با وجود این حکم‌ها، جمعپذیری شمارای اندازه لبگ، روی مجموعه‌های اندازه‌پذیر ثابت شده است. این نتیجه ارتباط لازم بین مفاهیم زیر را برقرار می‌کند:

- نگاه اولیه‌مان از حجم به وسیله اندازه خارجی،
- ایده دقیق‌تر مجموعه‌های اندازه‌پذیر،

- عملیات نامتناهی شمارای مجاز روی این مجموعه‌ها.

دو تعریف مختصر و مفید نیز برای نتایج بعدی ارائه می‌دهیم.

اگر $E_۱$،$E_۲$،... یک گردایه شمارا از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ باشند که به E صعود می کنند، به این معنی که برای هر k، $E_k \subset E_{k+۱}$ و $E = \bigcup_{k=۱}^{\infty} E_k$، آنگاه می‌نویسیم $E_k \nearrow E$.

به‌طور مشابه اگر $E_۱$،$E_۲$،... به E نزول کنند، به این معنی که برای هر k، $E_k \supset E_{k+۱}$ و $E = \bigcap\limits_{k=۱}^{\infty} E_k$، آنگاه می‌نویسیم $E_k \searrow E$.

نتیجه ۲۴.۱. فرض می‌کنیم $E_۱$،$E_۲$،... زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ هستند.

۱. اگر $E_k \nearrow E$، آنگاه $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$.

۲. اگر $E_k \searrow E$ و به ازای یک k، $m(E_k) < \infty$، آنگاه

$$m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

برهان. برای قسمت اول قرار می‌دهیم $G_۱ = E_۱$ و $G_۲ = E_۲ \setminus E_۱$ و به‌طور کلی به ازای $k \geq ۲$، $G_k = E_k \setminus E_{k-۱}$. با این ساختار مجموعه‌های G_k اندازه‌پذیر و مجزا هستند و $E = \bigcup_{k=۱}^{\infty} G_k$. بنابراین

$$m(E) = \sum_{k=۱}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=۱}^{N} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{k=۱}^{N} G_k\right).$$

و چون $\bigcup\limits_{k=1}^{N} G_k = E_N$ به رابطه حدی مورد نظر می‌رسیم.

برای قسمت دوم به وضوح می‌توانیم فرض کنیم که $m(E_1) < \infty$. برای هر k قرار می‌دهیم $G_k = E_k \setminus E_{k+1}$، بنابراین

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

اجتماع مجزایی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} (m(E_k) - m(E_{k+1})) \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$

بنابراین چون $m(E_1) < \infty$ داریم $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$. □

خواننده باید توجه کند که نتیجه دوم بدون در نظر گرفتن این پیش فرض به ازای یک k، $m(E_k) < \infty$ حاصل نمی‌شود. این مطلب با یک مثال ساده نشان داده می شود. کافی است به ازای هر n، قرار دهیم $E_n = (n, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

آنچه که در ادامه می‌آید، دید هندسی و آنالیزی مهمی را از ماهیت مجموعه‌های اندازه‌پذیر برحسب مجموعه‌های باز و بسته فراهم می‌کند. نکته اصلی این است که مجموعه اندازه‌پذیر دلخواه

می‌تواند با مجموعه‌های باز شامل آن و یا اینکه با مجموعه‌های بسته مشمول در آن تقریب زده شود.

قضیه ۲۵.۱. فرض می کنیم E زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ است، آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$:

(آ) مجموعه باز $\mathcal{O}$ با شرط $E \subset \mathcal{O}$ و $m(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon$ وجود دارد.
(ب) مجموعه بسته F با شرط $F \subset E$ و $m(E \setminus F) \leq \varepsilon$ وجود دارد.
(ج) اگر $m(E)$ متناهی باشد، آنگاه مجموعه فشرده K با شرط $K \subset E$ و

$$m(E \setminus K) \leq \varepsilon$$

وجود دارد.
(د) اگر $m(E)$ متناهی باشد، آنگاه اجتماع متناهی $F = \bigcup_{j=۱}^{N} \mathcal{O}_j$ از مکعب‌های بسته موجود است به‌طوری که

$$m(E \Delta F) \leq \varepsilon.$$

نماد $E\Delta F$ معرف **تفاضل متقارن** بین دو مجموعه E و F است و با

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

تعریف می‌شود، که شامل نقاطی است که تنها به یکی از دو مجموعه E یا F تعلق دارد.

برهان. قسمت (آ) فقط تعریف اندازه‌پذیری است. برای قسمت دوم می‌دانیم که E^c اندازه‌پذیر است. بنابراین مجموعه باز $\mathcal{O}$ با $E \subset \mathcal{O}$ و $m(\mathcal{O} \setminus E^c) \leq \varepsilon$ وجود دارد. اگر $F = \mathcal{O}^c$ آنگاه F بسته، $F \subset E$ و $E \setminus F = \mathcal{O} \setminus F^c$ است. بنابراین

$$m(E \setminus F) \leq \varepsilon.$$

برای اثبات (ج)، ابتدا مجموعه بسته F را چنان انتخاب می‌کنیم که $F \subset E$ و

$$m(F \setminus E) \leq \frac{\varepsilon}{۲}.$$

برای هر n، B_n گویی به مرکز مبدأ و با شعاع n را نمایش می‌دهد. مجموعه‌های فشرده $K_n = F \cap B_n$ را تعریف می‌کنیم، در این‌صورت $E \setminus K_n$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است که به $E \setminus F$ نزول می‌کند و چون $m(E) < \infty$، نتیجه می‌گیریم برای هر n به قدر کافی بزرگ، داریم $m(E \setminus K_n) \leq \varepsilon$.

برای قسمت پایانی خانواده‌ای از مکعب‌های بسته $\{Q\}_{j=۱}^{\infty}$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که

$$E \subset \bigcup_{j=۱}^{\infty} Q_j\,, \quad \sum_{j=۱}^{\infty} |Q_j| \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{۲}.$$

سری همگراست و $N > 0$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \frac{\varepsilon}{2}$. اگر $F = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j,$ آنگاه

$$\begin{aligned} m(E\Delta F) &= m(E \setminus F) + m(F \setminus E) \\ &\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \setminus E\right) \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - m(E) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

پایایی خواص برای اندازه لبگ

یک خاصیت مهم اندازه لبگ در $\mathbb{R}^d$، تحت انتقال پایا بودن آن است که در ادامه بیان می‌شود. اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر و $h \in \mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $E_h = E+h = \{x+h : x \in E\}$ نیز اندازه‌پذیر است و $m(E+h) = m(E)$. با در نظر گرفتن این نکته که برای حالت خاصی که E یک مکعب است، خاصیت بالا برقرار است؛ با استفاده از تعریف اندازه خارجی برای مجموعه‌های دلخواه از بخش ۲.۱ مشاهده می‌شود $m_*(E_h) = m_*(E)$. برای اثبات اندازه‌پذیری E_h تحت این پیش فرض که E اندازه‌پذیر است، توجه می‌کنیم اگر $\mathcal{O}$ باز باشد و

$E \subset \mathcal{O}$ و $m_*(\mathcal{O}\backslash E) < \varepsilon$ ، آنگاه $\mathcal{O}_h$ باز است و $E_h \subset \mathcal{O}_h$ و $m_*(\mathcal{O}_h\backslash E_h) < \varepsilon$.

به‌طور مشابه می‌توان تحت انبساط پایایی نسبی اندازه لبگ را ثابت کرد. فرض می‌کنیم $\delta > 0$ و نماد δE را برای مجموعه $\{\delta x : x \in E\}$ به کار می‌بریم. می‌توانیم نشان دهیم زمانی که E اندازه‌پذیر است، δE نیز اندازه‌پذیر است و $m(\delta E) = \delta^d m(E)$. به آسانی می‌توان دید اندازه لبگ تحت بازتاب پایا است. به این معنا که اگر E اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $-E = \{-x : x \in E\}$ نیز اندازه‌پذیر است و $m(-E) = m(E)$.

سایر خواص پایایی برای اندازه لبگ در تمرین ۷ و ۸ و مسأله ۴ فصل ۲ موجود است.

σ- جبرها و مجموعه‌های بورل

یک σ-**جبر** از مجموعه‌ها گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ است، که تحت اجتماع‌های شمارا، اشتراک‌های شمارا و متمم‌ها بسته باشد.

به یقین گردایه همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ یک σ-جبر است. یک مثال جالب‌تر و مناسب‌تر، همان گردایهٔ همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ است، که به تازگی نشان داده‌ایم که یک σ-جبر را تشکیل می‌دهند.

یک σ-جبر دیگر که نقش مهمی را در آنالیز بازی می‌کند، σ-**جبر بورل** در $\mathbb{R}^d$ است، که با $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ نمایش داده می‌شود و با این تعریف که

کوچک‌ترین σ−جبری است که شامل همه مجموعه‌های باز می‌شود.
عناصر این σ−جبر مجموعه‌های بورل نامیده می‌شوند.
معرفی σ−جبر بورل زمانی معنی‌دار خواهد بود که اصطلاح «کوچک‌ترین» را تعریف کنیم و نشان دهیم که چنین σ−جبری وجود دارد و منحصر به فرد است. اصطلاح «کوچک‌ترین» به این معنا است که اگر S، σ−جبری باشد که شامل همه مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^d$ است آنگاه لزوما $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset S$. چون لزوما هر اشتراک (لزوما شمارای) σ− جبر نیز، یک σ−جبر است، $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ را به‌عنوان اشتراک همه σ−جبرهایی که شامل مجموعه‌های باز هستند، تعریف می‌کنیم. به این ترتیب، وجود و یکتایی σ−جبر نشان داده می‌شود.

چون مجموعه‌های باز اندازه‌پذیرند، نتیجه می گیریم که σ−جبر بورل مشمول در σ−جبر، مجموعه‌های اندازه‌پذیر است. به‌طور طبیعی، می‌پرسیم که آیا این شمول سره است: آیا مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ که مجموعه‌های بورل نیستند وجود دارند؟ پاسخ مثبت است. (تمرین ۳۵ را ببینید.)

از نظرگاه مجموعه‌های بورل، مجموعه‌های لبگ از طریق **تکمیل** σ-جبر مجموعه‌های بورل با اضافه کردن همه زیرمجموعه‌های بورل با اندازه صفر به وجود می‌آید. این حکم یک نتیجه بلافصل نتیجه ۲۶.۱ است.

با مجموعه‌های باز و بسته شروع می‌کنیم که ساده‌ترین مجموعه‌های بورل هستند و می‌توان تلاش کرد تا لیستی از مجموعه‌های بورل با اولویت پیچیدگی‌های آن تهیه کرد. در این ترتیب بندی مورد بعدی می‌تواند اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز باشد. چنین مجموعه‌هایی $\mathbf{G}_\delta$ نامیده می‌شوند. متناوبا می‌توان متمم‌هایشان را در نظر گرفت، اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بسته، که مجموعه‌های $\mathbf{F}_\sigma$[1] نامیده می‌شوند.

نتیجه ۲۶.۱. زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است.

(آ) اگر و فقط اگر اختلاف E با یک مجموعه G_δ، یک مجموعه با اندازه صفر باشد.

(ب) اگر و فقط اگر اختلاف E با یک مجموعه F_σ، یک مجموعه با اندازه صفر باشد.

۱. اصطلاح G_δ از دو کلمه آلمانی "Gebiete" و "Durschnitt" و F_σ از دو کلمه فرانسوی "fereme" و "Somme" می‌آید.

برهان. به وضوح E هنگامی اندازه‌پذیر است که (آ) یا (ب) برقرار باشد چون F_σ و G_δ و مجموعه‌های با اندازه صفر، اندازه‌پذیرند.

برعکس، اگر E اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$، مجموعه باز $\mathcal{O}_n$ را که شامل E است، انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $m(\mathcal{O}_n \setminus E) \leq \frac{۱}{n}$ آنگاه $S = \bigcap_{n=۱}^{\infty} O_n$ یک G_δ است که شامل E می‌شود و برای هر n، $(S \setminus E) \subset (\mathcal{O}_n \setminus E)$. بنابراین برای هر n، $m(S \setminus E) \leq \frac{۱}{n}$. پس $S \setminus E$ اندازه خارجی صفر دارد و لذا اندازه‌پذیر است.

برای اثبات گزاره دوم، قسمت (ب) قضیه ۲۵.۱ را برای $\varepsilon = \frac{۱}{n}$ به کار می‌بریم و اجتماع مجموعه‌های بسته حاصل را در نظر می‌گیریم. □

ساختن یک مجموعه اندازه‌ناپذیر

آیا همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیرند؟ در این قسمت به این سؤال برای $d = ۱$ با ساخت یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ که اندازه‌پذیر [1] نیست،

---

۱. وجود یک مجموعه این چنینی در $\mathbb{R}$ به معنی وجود زیرمجموعه‌های متناظر اندازه‌ناپذیر در $\mathbb{R}^d$، به‌ازای هر d است، که نتیجهٔ قضیه ۲,۲۲ در فصل بعد است.

پاسخ می‌دهیم. این نتیجه بر این امر دلالت می‌کند که نظریه اندازه از این جهت که شامل همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ نیست، قانع‌کننده است.

ساختن یک مجموعه اندازه‌ناپذیر $\mathcal{N}$ به اصل موضوع انتخاب نیازمند است و مابقی بر یک رابطه هم ارزی ساده روی اعداد حقیقی در $[۰,۱)$ استوار است.

می‌نویسیم $x \sim y$ هرگاه $x - y$ گویا است و توجه می‌کنیم که این رابطه، هم‌ارزی است. زیرا خواص زیر برقرار است:

۱. برای هر $x \in [۰,۱)$، $x \sim x$.

۲. اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$.

۳. اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$.

دو رده هم‌ارزی مجزا یا منطبق هستند و $[۰,۱)$ اجتماع مجزایی از همه رده‌های هم‌ارزی است که به صورت

$$[۰,۱) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{E}_\alpha$$

می‌نویسیم.

اکنون مجموعه $\mathcal{N}$ را با انتخاب دقیقا یک عضو x_α از هر $\mathcal{E}_\alpha$ و قرار دادن $\mathcal{N} = \{x_\alpha\}$ می‌سازیم. این مرحله (به ظاهر بدیهی) به

توضیح بیشتری نیاز دارد که آن را تا بعد از برهان قضیه زیر به تعویق می‌اندازیم.

قضیه ۲۷.۱. مجموعه $\mathcal{N}$ اندازه‌پذیر نیست.

برهان. اثبات به روش خلف است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\mathcal{N}$ اندازه‌پذیر است و فرض می‌کنیم $\{r_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک شماره‌گذاری از همه اعداد گویای $[-۱,۱]$ باشد و انتقال‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k.$$

ادعا می‌کنیم که مجموعه‌های $\mathcal{N}_k$ مجزا هستند و

$$[۰,۱] \subset \bigcup_{k=۱}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-۱,۲]. \qquad (۴.۱)$$

برای دیدن این‌که چرا این مجموعه‌ها مجزا هستند، فرض می‌کنیم که اشتراک $\mathcal{N}_k \cap \mathcal{N}_{k'}$ ناتهی است. بنابراین اعداد گویای $r_k \neq r_{k'}$ و α و β با شرط

$$x_\alpha + x_r = x_\beta + x_{k'}$$

موجودند. بنابراین

$$x_\alpha - x_\beta = r_{k'} - r_k.$$

در نتیجه $\alpha \neq \beta$ و $x_\alpha - x_\beta$ گویا است. بنابراین $x_\alpha \sim x_\beta$ که با فرض این‌که $\mathcal{N}$ تنها شامل یک نماینده از هر کلاس هم‌ارزی است، متناقض است.

شمول دوم سر راست است. چون بر اساس نوع ساختن، هر $\mathcal{N}_k$ مشمول در $[-۱,۲]$ است. سرانجام اگر $x \in [۰,۱]$ آنگاه برای یک α، $x \sim x_\alpha$ و بنابراین برای یک k، $x - x_\alpha = r_k$. پس $x \in \mathcal{N}_k$، و شمول اول نیز برقرار است.

اکنون برهان قضیه را پی می‌گیریم. اگر $\mathcal{N}$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\mathcal{N}_k$ به ازای هر k، نیز چنین می‌شد. چون اجتماع $\bigcup\limits_{k=۱}^{\infty} \mathcal{N}_k$ مجزا است، روابط شمول در (۴.۱) نتیجه می‌دهد که:

$$۱ \leq \sum_{k=۱}^{\infty} m(\mathcal{N}_k) \leq ۳.$$

چون $\mathcal{N}_k$ یک انتقال از $\mathcal{N}$ است برای هر k داریم $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{N})$. در نتیجه

$$۱ \leq \sum_{k=۱}^{\infty} m(\mathcal{N}) \leq ۳.$$

این همان تناقض مورد نظراست. زیرا نه $m(\mathcal{N}) = ۰$ ممکن است و نه $m(\mathcal{N}) > ۰$. □

اصول موضوع انتخاب

این موضوع که ساختن مجموعه $\mathcal{N}$ امکان‌پذیر است بر گزارهٔ کلی زیر استوار است.

گزاره ۲۸.۱. فرض می‌کنیم E یک مجموعه و $\{E_\alpha\}$ گردایه زیرمجموعه‌های ناتهی E باشد (مجموعه اندیس‌گذار αها، شمارا در نظر گرفته نشده است.) در این‌صورت تابع $x \mapsto x_\alpha$ (یک تابع انتخاب) موجود است، به‌طوری که برای هر α، $x_\alpha \in E_\alpha$.

این حکم در این شکل کلی، به‌عنوان **اصل موضوع انتخاب** شناخته می شود. این اصل (حداقل به‌طور ضمنی) در بسیاری از برهان‌ها در ریاضیات ظاهر می‌شود. اما به دلیل شهودی بودن، مفهومش در ابتدا قابل فهم نبود. ظهور اولیه این اصل مهم، کاربردش برای اثبات گزاره معرف کانتور، **اصل خوش ترتیبی** بود. این قضیه (که گاهی اوقات به آن «استقرای ترامتناهی» نیز می‌گویند.) به شکل زیر بیان می‌شود.

تعریف ۲۹.۱. مجموعه E **مرتب خطی** نامیده می‌شود، هرگاه رابطه دوتایی $\leq$ روی آن وجود داشته باشد، به‌طوری که:

(آ) برای هر $x \in E$، $x \leq x$.

(ب) اگر $x, y \in E$ متمایز باشند، آنگاه $x \leq y$ یا $y \leq x$ (اما نه هر دو).

(ج) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.

می‌گوییم مجموعه E **خوش ترتیب** است، هرگاه مرتب خطی باشد، به‌طوری که هر زیر مجموعه ناتهی $A \subset E$، نسبت به ترتیب دارای کوچک‌ترین عضو باشد. (عضو $x_\circ \in A$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $x \in A$، $x_\circ \leq x$).

یک مثال ساده از مجموعهٔ خوش‌ترتیب $\mathbb{Z}^+$، اعداد صحیح مثبت، با ترتیب معمولی‌اش است. این حقیقت که $\mathbb{Z}^+$ خوش ترتیب است یک قسمت مهم اصل استقرای متناهی معمولی است. به علاوه به‌طور کلی اصل خوش ترتیبی بیان می‌کند که

«هر مجموعه E می تواند خوش ترتیب باشد.»

در حقیقت واضح است که اصل خوش ترتیبی، اصل موضوع انتخاب را نتیجه می‌دهد: اگر E خوش ترتیب باشد، می‌توانیم x_α را به‌عنوان کوچک‌ترین عضو E_α انتخاب کنیم و به این ترتیب تابع انتخاب مورد نیاز را می‌سازیم. برعکس آن نیز صحیح است که اصل موضوع انتخاب، اصل خوش ترتیبی را نتیجه می‌دهد. اما برهان آن ساده نیست (مسأله ۶ را برای شکل معادل دیگری از اصل موضوع انتخاب ببینید.)

ما به‌طور متداول درستی اصل موضوع انتخاب را (و در پی آن درستی اصل خوش ترتیبی را)[۱] به‌عنوان پیش‌فرض خواهیم گرفت. با وجود این خاطر نشان می‌کنیم که هر چقدر اصل موضوع انتخاب بدیهی به نظر می‌رسد، اصل خوش ترتیبی به سرعت به نتایج پیچیده‌ای منجر می‌شود: تنها به صرف زمان کمی نیاز است تا تلاش کنیم که خوش ترتیبی اعداد حقیقی را تصور نماییم!

توابع اندازه‌پذیر

با مفهومی که از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در دست است، اکنون توجه خود را به اشیایی معطوف می‌کنیم که در قلب نظریه انتگرال قرار دارد: توابع اندازه‌پذیر.

نقطه شروع این مفهوم **تابع مشخصه** مجموعه E است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} ۱, & x \in E \\ ۰, & x \notin E \end{cases}$$

۱. با یک فرمول مناسب از اصول نظریه مجموعه ثابت می شود، اصل انتخاب از اصول دیگر مستقل است. بنابراین ما در پذیرش درستی آن مختاریم.

مرحله دوم معرفی توابعی است که بلوک‌های ساختاری نظریه انتگرال هستند. انتگرال ریمان، تحت تأثیر رده **توابع پله‌ای** است، که به صورت مجموع متناهی

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}, \qquad (5.1)$$

داده می‌شود که در آن هر R_k یک مستطیل است، و a_k ها اعداد ثابت هستند.

برای انتگرال لبگ به مفهوم کلی‌تری نیاز داریم که در فصل بعد خواهیم دید. یک **تابع ساده**، مجموع متناهی

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, \qquad (6.1)$$

است، که در آن هر E_k، مجموعه‌ای اندازه‌پذیر با اندازه متناهی است و a_k ها ثابت هستند.

تعریف و خواص پایه‌ای

با در نظر گرفتن تنها توابع حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^d$، که امکان اخذ $+\infty$ و $-\infty$ را به آن‌ها داده‌ایم، شروع می‌کنیم. بنابراین $f(x)$ به مجموعه

اعداد حقیقی توسعه یافته اختصاص دارد

$$-\infty \leq f(x) \leq \infty.$$

می‌توانیم بگوییم که f **متناهی مقدار** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x

$$-\infty < f(x) < \infty.$$

در نظریه‌ای که در ادامه می‌آید و بسیاری از کاربردهایی که در پی خود دارد، عمدتا خودمان را در موقعیت‌هایی می‌یابیم که یک تابع مقادیر نامتناهی را حداکثر روی یک مجموعه با اندازه صفر می‌گیرد.

تابع f روی یک زیرمجموعه اندازه پذیر E از $\mathbb{R}^d$ **اندازه پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $a \in \mathbb{R}$ مجموعهٔ

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\},$$

اندازه‌پذیر باشد.

برای ساده‌سازی مفهوم، هرگاه ابهامی در میان نباشد، اغلب مجموعهٔ $\{x \in E : f(x) < a\}$ را با $\{f < a\}$ مشخص می‌کنیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که معادل‌های زیادی برای توابع اندازه‌پذیر وجود دارند. برای مثال می‌توان به جای شرط بالا، متوقع باشیم که تصویر معکوس بازه‌های بسته اندازه‌پذیر باشند. در واقع برای ثابت

کردن این‌که f اندازه پذیر است، اگر و فقط اگر برای هر a،

$$\{x : f(x) \leq a\} = \{f \leq a\},$$

اندازه‌پذیر باشند، توجه می‌کنیم که از یک سو داریم:

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{f < a + \frac{1}{k}\right\},$$

و اشتراک شمارایی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است و از طرف دیگر داریم

$$\{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{f \leq a - \frac{1}{k}\right\},$$

به‌طور مشابه f اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر $\{f \geq a\}$ (یا $\{f > a\}$) برای هر a اندازه‌پذیر باشد. در حالت اول بلافاصله از تعریف به دست می‌آید و این‌که $\{f \geq a\}$ متمم، $\{f < a\}$ است و در حالت دوم از حکمی که اخیرا ثابت کردیم و همچنین این حقیقت که

$$\{f \leq a\} = \{f > a\}^c$$

. یک نتیجه ساده حکم این است که $-f$ اندازه‌پذیر است، هرگاه f اندازه‌پذیر باشد.

به همان روش می‌توانیم نشان دهیم که اگر f متناهی مقدار باشد، آنگاه اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌های $\{a < f < b\}$ برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشند. نتایج مشابهی با ترکیب نامساوی اکید و غیراکید برقرارند. برای مثال اگر f متناهی مقدار باشد، آنگاه اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $\{a \leq f < b\}$ چنین باشد. با بحث‌های مشابه، گزاره‌های بعد را می‌بینیم:

خاصیت ۳۰.۱. تابع متناهی مقدار f اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f^{-1}(\mathcal{O})$ برای هر مجموعه باز $\mathcal{O}$ اندازه‌پذیر باشد و اگر و فقط اگر $f^{-1}(F)$ برای هر مجموعه بسته F اندازه‌پذیر باشد.

توجه می‌کنیم که این خاصیت را می‌توان برای توابع با مقادیر در اعداد حقیقی توسعه یافته نیز به کار برد، هرگاه فرض اندازه پذیر بودن هر دوی $f^{-1}(\infty)$ و $f^{-1}(-\infty)$ را اضافه کنیم.

خاصیت ۳۱.۱. اگر f روی $\mathbb{R}^d$ پیوسته باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است. اگر f اندازه‌پذیر و متناهی مقدار باشد و Φ پیوسته باشد، آنگاه $\Phi \circ f$ اندازه‌پذیر است.

در حقیقت Φ پیوسته است بنابراین $\Phi^{-1}((-\infty, a))$ یک مجموعه باز $\mathcal{O}$ است و بنابراین $(\Phi \circ f)^{-1}((-\infty, a)) = f^{-1}(\mathcal{O})$ اندازه‌پذیر است.

باید توجه شود که در حالت کلی زمانی که f اندازه‌پذیر و Φ پیوسته است. لزوما $f \circ \Phi$ اندازه‌پذیر نیست. تمرین ۳۵ را ببینید.

خاصیت ۳۲.۱. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر باشد. در این‌صورت

$$\sup_n f_n(x)\,,\quad \inf_n f_n(x)\,,\quad \lim_{n\to\infty}\sup f_n(x)\,,\quad \lim_{n\to\infty}\inf f_n(x),$$

اندازه‌پذیر هستند.

برای اثبات این‌که $\sup\limits_n f_n$ اندازه‌پذیر است. لازم است توجه کنیم

$$\left\{\sup_n f_n > a\right\} = \bigcup_n \{f_n > a\}.$$

این گزاره حکم مشابهی برای $\inf\limits_n f_n(x)$ را نیز نتیجه می‌دهد. زیرا این مقدار برابر با $-\sup\limits_n(-f_n(x))$ است.

حکم برای $\limsup$ و $\liminf$ نیز از دو ملاحظه

$$\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) = \inf_k\left\{\sup_{n\geq k} f_n\right\} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\inf f_n(x) = \sup_k\left\{\inf_{n\geq k} f_n\right\}،$$

به‌دست می‌آید.

خاصیت ۳۳.۱. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک گردایه از توابع اندازه‌پذیر باشد، و

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

آنگاه f اندازه‌پذیر است.

چون $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$، این خاصیت نتیجهٔ خاصیت ۳۲,۱ است.

خاصیت ۳۴.۱. اگر f و g توابع اندازه‌پذیر باشند، آنگاه

(آ) توان‌های صحیح f^k برای $k \geq 1$ اندازه‌پذیرند.
(ب) اگر f و g متناهی مقدار باشند، آنگاه $f+g$ و fg اندازه‌پذیرند.

برای (آ) توجه می‌کنیم که اگر k فرد باشد، آنگاه

$$\left\{f^k > a\right\} = \left\{f > a^{\frac{1}{k}}\right\}$$

و اگر k زوج باشد و $a \geq 0$، آنگاه .

$$\left\{f^k > a\right\} = \left\{f > a^{\frac{1}{k}}\right\} \cup \left\{f < -a^{\frac{1}{k}}\right\}$$

برای (ب) در ابتدا می‌بینیم که $f+g$ اندازه‌پذیر است، زیرا

$$\{f+g > a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{f > a-r\} \cap \{g > r\},$$

که در آن $\mathbb{Q}$ نمایشگر اعداد گویا است.

در پایان با توجه به نتایج قبل و این حقیقت که

$$fg = \frac{۱}{۴}\Big[(f+g)^۲ - (f-g)^۲\Big]$$

fg اندازه‌پذیر است.

می‌گوییم دو تابع f و g که روی E تعریف شده‌اند، **تقریبا همه‌جا** برابرند و می‌نویسیم

$$f(x) = g(x) \quad a.e \quad x \in E,$$

هرگاه مجموعهٔ $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ اندازه صفر داشته باشد. این مفهوم را با بیان $f = g$ تقریبا همه جا، مختصر می‌کنیم. به‌طور کلی می‌گوییم یک خاصیت یا گزاره تقریبا همه جا برقرار است، هرگاه به جز روی مجموعه با اندازه صفر برقرار باشد.

به آسانی قابل مشاهده است که اگر f اندازه‌پذیر و تقریبا همه‌جا $f = g$ باشد، آنگاه g اندازه‌پذیر است. این حکم از این حقیقت به‌دست می‌آید که اختلاف مجموعه‌های $\{f < a\}$ و $\{g > a\}$، یک مجموعه با اندازه صفر است. به علاوه همه خواص بالا می‌تواند به حالت تقریبا همه جا تقلیل یابد. به‌عنوان مثال اگر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک گردایه از توابع اندازه‌پذیر باشد و

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e$$

آنگاه f اندازه‌پذیر است.

توجه می‌کنیم که اگر f و g تقریبا همه جا روی زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset \mathbb{R}^d$ تعریف شده باشند، آنگاه توابع $f+g$ و fg تنها می‌تواند روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شود. چون اجتماع دو مجموعهٔ با اندازه صفر، اندازهٔ صفر دارد، $f+g$ تقریبا همه جا روی E تعریف شده است. در ادامه این بحث را خلاصه می‌کنیم.

خاصیت ۳۵.۱. فرض می‌کنیم f اندازه‌پذیر است و برای هر x تقریبا همه جا $g(x) = f(x)$ آنگاه g اندازه‌پذیر است.

در این راستا، خاصیت ۳۴.۱ (ب) زمانی که f و g تقریبا همه جا متناهی مقدارند، برقرار است.

تقریب به وسیلهٔ توابع ساده یا توابع پله‌ای

در این قسمت قضایا ماهیت مشابهی دارند و ساختار درونی توابع اندازه‌پذیر را روشن می‌کنند. با تقریب زدن نقطه به نقطه توابع اندازه‌پذیر نامنفی با توابع ساده، شروع می‌کنیم.

قضیه ۳۶.۱. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $\mathbb{R}^d$ باشد. در این‌صورت یک دنباله صعودی از توابع ساده نامنفی $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود

دارد، که نقطه به نقطه به f همگراست، به عبارتی به‌ازای هر x داریم

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)\,, \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

برهان. با یک برش شروع می‌کنیم. برای $N \geq 1$ فرض کنید Q_N مکعبی به مرکز مبدأ و با طول ضلع N باشد. در این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$F_N(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \leq N,\ x \in Q_N \quad \text{اگر} \\ N & f(x) > N,\ x \in Q_N \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

آنگاه به‌ازای هر x، $F_N(x) \to f(x)$ هنگامی‌که N به بی‌نهایت میل می‌کند. اکنون مجموعه مقادیر F_N، $[0, N]$ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم. برای $N, M \geq 1$ ثابت، تعریف می‌کنیم

$$E_{l,M} = \left\{x \in Q_N : \frac{l}{M} < F_N(x) \leq \frac{l+1}{M}\right\}, \quad 0 \leq l < NM.$$

حال توابع

$$F_{N,M}(x) = \sum_l \frac{l}{M} \chi E_{l,M}(x),$$

را تشکیل می‌دهیم.

هر $F_{N,M}$ یک تابع ساده است و برای هر x

$$\circ \leq F_N(x) - F_{N,M}(x) \leq \frac{۱}{M}$$

. حال اگر به‌ازای عدد صحیح $k \geq ۱$، $N = M = ۲^k$ را انتخاب کنیم و فرض کنیم $\varphi_k = F_{۲^k,۲^k}$، آنگاه برای هر k می‌بینیم که $\circ \leq F_M(x) - \varphi_k(x) \leq \frac{۱}{۲^k}$، $\{\varphi_k\}$ صعودی است و این دنباله همه خواص موردنظر را دارد. □

توجه می‌کنیم که اگر اخذ $+\infty$ برای حد را مجاز بدانیم، آنگاه نتیجه برای توابع نامنفی که در اعداد حقیقی توسعه یافته تعریف شده، نیز برقرار است. حال فرض نامنفی بودن f را حذف می‌کنیم و اخذ $-\infty$ را برای حد مجاز می‌دانیم.

قضیه ۳۷.۱. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر باشد، در این‌صورت دنباله‌ای از توابع ساده مانند $\{\varphi_k\}_{k=۱}^{\infty}$ وجود دارد، که برای هر x در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+۱}(x)|, \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

به خصوص به‌ازای هر x و k داریم $|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$.

برهان. از تجزیه توابع f به صورت $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$ بهره می‌بریم که در آن

$$f^{+}(x) = \max(f(x), ۰)\,, \quad f^{-}(x) = \max(-f(x), ۰)$$

چون f^{+} و f^{-} نامنفی هستند، قضیه قبل نتیجه می‌دهد که دو دنباله صعودی از توابع ساده نامنفی موجوداند، قضیه قبل به دو دنباله صعودی از توابع نامنفی $\left\{\varphi_k^{(۱)}(x)\right\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\left\{\varphi_k^{(۲)}(x)\right\}_{k=۱}^{\infty}$ منجر می‌شود که به ترتیب نقطه به نقطه به f^{+} و f^{-} همگراست. آنگاه اگر قرار دهیم

$$\varphi_k(x) = \varphi_k^{(۱)}(x) - \varphi_k^{(۲)}(x),$$

می‌بینیم که $\varphi_k(x)$ به‌ازای هر x به $f(x)$ همگراست. سرانجام دنباله $\{|\varphi_k|\}$ صعودی است. زیرا از تعریف f^{+} و f^{-} و خواص $\varphi_k^{(۱)}$ و $\varphi_k^{(۲)}$ داریم

$$|\varphi_k(x)| = \varphi_k^{(۱)}(x) + \varphi_k^{(۲)}(x).$$

□

اکنون یک قدم به جلو می‌رویم و توابع اندازه‌پذیر را با توابع پله‌ای تقریب می‌زنیم. در این مرحله در حالت کلی، فقط همگرایی تقریبا همه جا برقرار است.

قضیه ۳۸.۱. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر باشد، در این‌صورت یک دنباله از توابع پله‌ای $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که تقریبا برای هر x به‌طور نقطه ای به f همگراست.

برهان. بنابر قضیه قبل کافی است نشان دهیم که اگر E یک مجموعه اندازه‌پذیر با اندازه متناهی باشد، آنگاه $f = \chi_E$ می‌تواند با توابع پله‌ای تقریب زده شود. به این منظور قسمت (د) قضیه ۲۵.۱ را یادآوری می‌کنیم، به این شرح که برای هر ε مکعب‌های $Q_1, \dots, Q_N$ وجود دارند، به‌طوری که

$$m\left(E\Delta \bigcup_{j=1}^{N} Q_j\right) \leq \varepsilon.$$

با در نظر گرفتن شبکه ساخته شده به وسیله امتداد اضلاع این مکعب‌ها می‌بینیم، مستطیل‌های مجزای $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$ وجود دارند، به‌طوری که

$$\bigcup_{j=1}^{N} Q_j = \bigcup_{j=1}^{M} \tilde{R}_j,$$

با به کار بردن مستطیل‌های R_j مشمول در $\tilde{R}_j$ و با اندازه کوچک‌تر درمی‌یابیم ، یک گردایه از مستطیل‌های مجزا موجودند که شرط

$$m\left(E\Delta \bigcup_{j=1}^{M} R_j\right) \leq 2\varepsilon,$$

را برقرار می‌کنند. بنابراین

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} \chi_{R_j}(x),$$

به جز احتمالا روی مجموعه‌ای با اندازه $0 \leq 2\varepsilon$. در نتیجه برای هر $k \geq 1$، تابع پله‌ای ψ_k وجود دارد، به‌طوری که اگر

$$E_k = \{x : f(x) \neq \psi_k(x)\},$$

آنگاه $m(E_k) \leq 2^{-k}$. اگر فرض کنیم $F_K = \bigcup_{j=K+1}^{\infty} E_j$ و $F = \bigcap_{K=1}^{\infty} F_K$، آنگاه $m(F) = 0$ زیرا $m(F_K) \leq 2^{-K}$ و برای هر $x \in F^c$،

$$\psi_k(x) \to f(x)$$

. $\square$

اصول سه‌گانه لیتل‌وود

اگرچه مفاهیم مجموعه‌های اندازه‌پذیر و توابع اندازه‌پذیر ابزارهای جدیدی را معرفی می‌کنند، اما نباید از روابطشان با مفاهیم قدیمی‌تری که جایگزین آن شده‌اند، چشم‌پوشی کنیم. لیتل وود این روابط را در سه اصل خلاصه می‌کند که راهنمای شهودی مفیدی برای مطالعه ابتدایی این نظریه است.

(آ) هر مجموعه به اجتماع متناهی‌ای از بازه‌ها نزدیک است.
(ب) هر تابع به پیوسته بودن نزدیک است.
(ج) هر دنباله همگرا ، به همگرایی یکنواخت نزدیک است.

البته مجموعه‌ها و توابعی که در بالا به آن اشاره شده است، اندازه‌پذیر فرض شده‌اند. واژه «نزدیکی» باید به درستی در هر مقوله فهمیده شود. فرم دقیقی از اصول اولیه در قسمت (د) قضیه ۲۵.۱ ظاهر می شود. فرمول‌بندی دقیق اصل سوم در نتیجه مهم بعدی ارائه می‌شود.

قضیه ۳۹.۱. (ایگوروف) فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر باشد که روی یک مجموعه اندازه‌پذیر E با $m(E) < \infty$ تعریف می‌شود و فرض کنید روی E، تقریبا همه جا $f_k \to f$. در این‌صورت برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توانیم مجموعه بسته $A_\varepsilon \subset E$ را بیابیم، به‌طوری که $m(E \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ و به‌طور یکنواخت روی A_ε، $f_k \to f$.

برهان. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم به ازای هر $x \in E$، $f_k(x) \to f(x)$. برای هر جفت از اعداد صحیح نامنفی n و k قرار می‌دهیم

$$E_k^n = \left\{x \in E : \left|f_j(x) - f(x)\right| < \frac{1}{n}, \, j > k\right\}.$$

اکنون n را ثابت می گیریم و توجه می‌کنیم که $E^n_k \subset E^n_{k+1}$ و هنگامی‌که k به بی‌نهایت میل می‌کند$E^n_k \nearrow E$. بنابر نتیجه ۲۴۰۱ در می‌یابیم که k_n وجود دارد، به‌طوری که

$$m(E \setminus E^n_{k_n}) < \frac{۱}{۲n} \ .$$

با توجه به نوع ساختار داریم

$$\big|f_j(x) - f(x)\big| < \frac{۱}{n}, \qquad x \in E^n_{k_n}, \quad j > k_n \quad \text{هرگاه}$$

N را انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $\sum\limits_{n=N}^{\infty} ۲^{-n} < \frac{\varepsilon}{۲}$ و قرار می‌دهیم

$$\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \geq N} E^n_{k_n}.$$

ابتدا ملاحظه می کنیم

$$m(E \setminus \tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E \setminus E^n_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

در ادامه برای $\delta > ۰$، $n \geq N$ را انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $\frac{۱}{n} < \delta$ و به این نکته نیز توجه می‌کنیم که از $x \in \tilde{A}_\varepsilon$، نتیجه می شود $x \in E^n_{k_n}$. آنگاه می‌بینیم ، هرگاه $j > k_n$، $|f_j(x) - f(x)| < \delta$. بنابراین f_k به‌طور یکنواخت روی $\tilde{A}_\varepsilon$ به f همگراست.

سرانجام با به‌کار بردن قضیه ۲۵.۱ زیرمجموعه بسته، $A_\varepsilon \subset \tilde{A}_\varepsilon$ و $m(\tilde{A}_\varepsilon \backslash A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه داریم $m(E \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$. $\square$

قضیه بعد اصل دوم لیتل‌وود را تأیید می‌کند.

قضیه ۴۰.۱. (لوزین) فرض می‌کنیم f روی E تابعی اندازه‌پذیر و متناهی مقدار باشد که در آن E با اندازه متناهی است. در این‌صورت برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه بسته F_ε با شرط

$$F_\varepsilon \subset E\,, \quad m(E \setminus F_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

وجود دارد که در آن $f_{|F_\varepsilon}$ پیوسته است.

منظور از $f_{|F_\varepsilon}$ تحدید f به مجموعه F_ε است. از قضیه می‌توان این را نتیجه گرفت، که اگر به f فقط به‌عنوان یک تابع روی F_ε نگاه کنیم، آنگاه f پیوسته است. اگرچه قضیه حکم قوی‌تری مبنی بر این‌که تابع تعریف شده ی f روی F، در نقاط F_ε پیوسته است، ارائه نمی‌کند.

برهان. فرض می کنیم f_n یک دنباله از توابع پله‌ای باشد که $f_n \to f$ (تقریبا همه جا)، در این‌صورت مجموعه‌های E_n را به نحوی می‌یابیم که به طور یکنواخت $f_n \to f$ و

$$m(E_n) \leq \frac{1}{2n}$$

و f_n خارج E_n پیوسته است. بنابر قضیه ایگوروف مجموعه $A_{\frac{\varepsilon}{3}}$ را می‌یابیم که $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت و $m\big(E \setminus A_{\frac{\varepsilon}{3}}\big) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. بنابراین برای N به قدر کافی بزرگ $\sum\limits_{n\geq N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}$ ، مجموعه

$$F' = A_{\frac{\varepsilon}{3}} \setminus \bigcup_{n\geq N} E_n$$

را در نظر می‌گیریم. اکنون برای هر $n \geq N$، تابع f_n روی F' پیوسته است. بنابراین f (حد یکنواخت $\{f_n\}$) نیز روی F' پیوسته است. برای اتمام برهان، تنها نیاز داریم تا مجموعه F' را به وسیله مجموعه بسته $F_\varepsilon \subset F'$ تقریب بزنیم به‌طوری که $m(F' \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}$. □

۴.۱ نامعادله برون-مینکوفسکی*

چون جمع و ضرب اسکالر عملگرهای اصلی فضاهای برداری هستند، طبیعتا ویژگی‌های این عملگرها در نظریه اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^d$ به شکل پایه‌ای مطالعه می‌شود. ما قبلا در رابطه با انتقال-پایایی و تجانس-پایایی نسبی مربوط به اندازه لبگ بحث کرده‌ایم. در اینجا به مطالعه مجموع دو مجموعه اندازه‌پذیر A و B می‌پردازیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^d : x = x' + x'' ;\ x' \in A ,\, x'' \in B\}.$$

در بسیاری از مقولات به خصوص در نظریه مجموعه‌های محدب این مفهوم دارای اهمیت است. در مسأله ایزوپریمتری، این مفهوم را در فصل ۳ به کار خواهیم برد.

در این راستا اولین سؤال که می‌توانیم مطرح کنیم (که مسلما مبهم است) این است که آیا می‌توانیم تقریبی کلی از اندازه $A+B$ برحسب اندازه‌های A و B بیابیم. (با این پیش فرض که این سه مجموعه اندازه‌پذیرند) به راحتی می‌توانیم ببینیم که یافتن یک کران بالا برای $m(A+B)$ برحسب $m(A)$ و $m(B)$ ممکن نیست. در واقع مثال‌های خیلی ساده نشان می‌دهند که $m(A)=m(B)=۰$ در حالی که $m(A+B)>۰$ (تمرین ۲۰ را ببینید).

در جهت معکوس سؤال درباره تقریب کلی به شکل

$$m(A+B)^{\alpha} \geq c_{\alpha}(m(A)^{\alpha}+m(B)^{\alpha})$$

که در آن α یک عدد مثبت، و ثابت c_{α} مستقل از A و B است وجود دارد. به وضوح امیدوارکننده‌ترین حالت، حالت $c_{\alpha}=۱$ است. نقش توان α را می‌توان به وسیله در نظر گرفتن **مجموعه‌های محدب** فهمید. مجموعه محدب A به این‌صورت تعریف می شود که اگر x و y در A باشند، آنگاه قطعه خط شامل آن‌ها،

$$\{xt+y(۱-t) : ۰ \leq t \leq ۱\}$$

، نیز به A متعلق است. برای $\lambda > \circ$ تعریف $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ را یادآوری می‌کنیم. توجه می‌کنیم که هرگاه A محدب باشد آنگاه $A + \lambda A = (\text{۱} + \lambda)A$. با وجود این $m((\text{۱}+\lambda)A) = (\text{۱}+\lambda)^d m(A)$ و بنابراین نامساوی مفروض تنها زمانی می‌تواند برقرار باشد که به‌ازای هر $\lambda > \circ$، $(\text{۱}+\lambda)^{d\alpha} \geq \text{۱} + \lambda^{d\alpha}$. اکنون اگر $\gamma \geq \text{۱}$ و $a, b \geq \circ$

$$(a+b)^\gamma \geq a^\gamma + b^\gamma \qquad (\text{۷.۱})$$

در حالی که عکس نامساوی برای $\circ \leq \gamma \leq \text{۱}$ برقرار است. (تمرین ۳۸ را ببینید.) لذا $\alpha \geq \frac{\text{۱}}{d}$. به علاوه (۷.۱) نشان می‌دهد که نامعادله با توان $\frac{\text{۱}}{d}$ نامعادله متناظر با $\alpha \geq \frac{\text{۱}}{d}$ را نتیجه می‌دهد و بنابراین به‌طور طبیعی به نامعادله

$$m(A+B)^{\text{۱}/d} \geq m(A)^{\text{۱}/d} + m(B)^{\text{۱}/d} \qquad (\text{۸.۱})$$

می‌رسیم. قبل از این‌که برهان (۸.۱) را ادامه دهیم، لازم است به یک اشکال تکنیکی اشاره کنیم. با وجود فرض اندازه‌پذیری A و B، لزوما اندازه‌پذیری $A+B$ به دست نمی‌آید. (تمرین ۱۳ فصل بعد را ببینید) با وجود این به راحتی می‌توان دید که این مشکل برای مثالی که A و B در آن مجموعه‌های بسته هستند، یا زمانی که یکی از آن‌ها باز است، پیش نمی‌آید (تمرین ۱۹ را ببینید).

با در نظر گرفتن نکات بالا می‌توانیم نتیجه مهم زیر را بیان کنیم.

قضیه ۴۱.۱. فرض می‌کنیم A و B مجموعه‌های اندازپذیر در $\mathbb{R}^d$ هستند و مجموع $A+B$ نیز اندازه‌پذیر است. در این‌صورت نامساوی (۸.۱) برقرار است.

برهان. ابتدا در حالتی که A و B مستطیل‌هایی با طول ضلع‌های $\{a_j\}_{j=1}^d$ و $\{b_j\}_{j=1}^d$ هستند، (۸.۱) را بررسی می‌کنیم، آنگاه رابطه (۸.۱) به رابطه

$$\left(\prod_{j=1}^{d}(a_j+b_j)\right)^{1/d} \geq \left(\prod_{j=1}^{d}a_j\right)^{1/d} + \left(\prod_{j=1}^{d}b_j\right)^{1/d}, \qquad (9.1)$$

تبدیل می‌شود. بنابر همگن بودن می‌توانیم خود را به حالت خاصی که برای هر j، $a_j+b_j=1$ محدود کنیم. در حقیقت توجه می‌کنیم که اگر a_j و b_j را با $\lambda_j a_j$ و $\lambda_j b_j$ با $\lambda_j>0$ جایگزین کنیم، آنگاه هر دو طرف (۹.۱) در $(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_d)^{1/d}$ ضرب می‌شوند. حال کافی است تا $\lambda_j=(a_j+b_j)^{-1}$ را انتخاب کنیم. با این کاهش، نامعادله (۹.۱) نتیجه بلافصل نامساوی حسابی-هندسی است. (تمرین ۳۹)

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}x_j \geq \left(\prod_{j=1}^{d}x_j\right)^{1/d}, \quad x_j\geq 0.$$

دو نامساوی حاصل از جاگذاری $x_j=a_j$ و $x_j=b_j$ را جمع می‌کنیم.

مرحله بعد حالتی را در نظر می گیریم که A و B اجتماع متناهی از مستطیل‌هایی است که درونشان مجزایند. در این حالت (۸.۱) را به استقرا روی تعداد کل مستطیل‌های A و B ثابت می‌کنیم. این تعداد را با n مشخص می‌کنیم. در اینجا توجه به این نکته ضروری است که نامساوی مورد نظر با جا به جایی A و B به‌طور مستقل تغییر نمی‌کند. در حقیقت با جایگزینی A با $A+h$ و B با $B+h'$، $A+B$ با $A+B+h+h'$ جایگزین می‌شود و بنابراین اندازه‌های متناظر به همان شکل باقی می‌مانند. اکنون یک جفت از مستطیل‌های مجزای R_1 و R_2 را در گردایه مستطیل‌های ساختاری A انتخاب می‌کنیم و به این نکته توجه می‌کنیم که آن‌ها می‌توانند با یک ابرصفحه مختصاتی جدا شوند. بنابراین فرض می‌کنیم به‌ازای هر j، بعد از انتقال با یک h مناسب، R_1 در $A_- = A \cap \{x_j \leq 0\}$ و R_2 در $A_+ = A \cap \{0 \leq x_j\}$ قرار می‌گیرد. ملاحظه می‌کنیم که A_+ و A_- شامل حداقل یک مستطیل کمتر از A می‌شود و $A = A_- \cup A_+$.

سپس B را انتقال می‌دهیم به‌طوری که $B_+ = B \cap \{x_j \geq 0\}$ و $B_- = B \cap \{x_j \leq 0\}$ و شرط زیر برقرار باشد

$$\frac{m(B_\pm)}{m(B)} = \frac{m(A_\pm)}{m(A)}.$$

از آنجایی که هر دو قسمت در نیم‌فضاهای متفاوت قرار دارند لذا

$$A + B \supset (A_+ + B_+) \cup (A_- + B_-),$$

و اجتماع طرف راست اساسا مجزا است. به علاوه تعدادمستطیل‌ها در A_+ و B_+ یا A_- و B_- نیز کمتر از n است. با توجه به فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} m(A+B) &\geq m(A_+ + B_+) + m(A_- + B_-) \\ &\geq \left(m(A_+)^{1/d} + m(B_+)^{1/d}\right)^d + \left(m(A_-)^{1/d} + m(B_-)^{1/d}\right)^d \\ &= m(A_+)\left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)}\right)^{1/d}\right]^d + m(A_-)\left[1 + \left(\frac{m(B)}{m(A)}\right)^{1/d}\right]^d \\ &= \left(m(A)^{1/d} + m(B)^{1/d}\right)^d, \end{aligned}$$

که برای حالتی که A و B هر دو اجتماع‌های متناهی مستطیل‌ها با درون‌های مجزا هستند، نامساوی مطلوب (۸.۱) را می‌دهد.

در ادامه، این مطلب بلافاصله حالتی را نتیجه می‌دهد که در آن A و B هر دو مجموعه‌های باز با اندازه متناهی هستند. در واقع با توجه به قضیه ۴.۱ برای هر $\varepsilon > 0$ می‌توانیم اجتماعی تقریبا مجزا از مستطیل‌های A_ε و B_ε را بیابیم، به‌طوری که $A_\varepsilon \subset A$ و $B_\varepsilon \subset B$ و

$$m(A) \leq m(A_\varepsilon) + \varepsilon$$

و

$$m(B) \leq m(B_\varepsilon) + \varepsilon.$$

چون $A+B \supset A_\varepsilon + B_\varepsilon$ نامعادله (۸.۱) برای A_ε و B_ε و گذار به یک حد، نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد. بعد از این به حالتی می‌رسیم که A و B مجموعه‌های فشرده دلخواهی هستند. با توجه به این‌که در این حالت $A+B$ نیز فشرده است و این‌که اگر تعریف کنیم

$$A^\varepsilon = \{x : d(x, A) < \varepsilon\},$$

آنگاه A^ε باز است و هنگامی‌که $\varepsilon \to 0$ داریم $A^\varepsilon \searrow A$. با تعریف مشابه برای B^ε و $(A+B)^\varepsilon$ ملاحظه می‌کنیم که $A + B \subset A^\varepsilon + B^\varepsilon \subset (A+B)^{2\varepsilon}$. بنابراین با فرض $\varepsilon \to 0$ می‌بینیم که برقراری (۸.۱) برای A^ε و B^ε حکم مطلوب را برای A و B نتیجه می‌دهد. در حالت کلی فرض می‌کنیم A، B و $A+B$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه با تقریب زدن A و B از درون با مجموعه‌های فشرده از (ج) قضیه ۲۵.۱ حکم به دست می‌آید. □

۵.۱ تمرین‌ها

۱. ثابت کنید مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ ساخته شده در متن کاملا ناهمبند و کامل است. به عبارت دیگر به‌ازای دو نقطه مجزای $x, y \in \mathcal{C}$،

نقطه‌ای مانند z بین x و y قرار می‌گیرد که $z \notin \mathcal{C}$ و $\mathcal{C}$ نقطه تنها ندارد.
راهنمایی: اگر $x, y \in C$ و $|x-y| > \frac{1}{3^k}$ آنگاه x و y به دو بازه متفاوت در C_k تعلق دارند. همچنین برای هر $x \in \mathcal{C}$، نقطه پایانی y_k از بازه‌ای در C_k وجود دارد، به‌طوری که $x \neq y_k$ و $|x-y_k| \leq \frac{1}{3^k}$.

۲. مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ می‌تواند با بسط سه‌سه‌ای تعریف شود.

الف) هر عدد در $[0,1]$ یک بسط سه‌سه‌ای دارد

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}, \quad a_k \in \{0,1,2\}.$$

دقت می‌کنیم این تجزیه منحصر به فرد نیست. زیرا برای مثال $\frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}$. ثابت کنید $x \in \mathcal{C}$ اگر و فقط اگر x یک نمایش همانند بالا داشته باشد به‌طوری که هر a_k، ۰ یا ۲ است.
ب) تابع کانتور-لبگ روی $\mathcal{C}$ به‌صورت

$$\text{اگر} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \quad \text{آنگاه،} \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}, \quad b_k = \frac{a_k}{2},$$

تعریف می شود.

در این تعریف بسط x را طوری بر می‌گزینیم که $a_k = ۰$ یا ۲.
نشان دهید F خوش تعریف و روی $\mathcal{C}$ پیوسته است و به علاوه $F(۰) = ۰$، همچنین $F(۱) = ۱$.
ج) ثابت کنید $F : \mathcal{C} \to [۰, ۱]$ پوشا است، به این معنی که برای هر $y \in [۰, ۱]$، $x \in \mathcal{C}$ $F(x) = y$ برقرار است.
د) می‌توان F را به تابع پیوسته‌ای روی $[۰, ۱]$ به شکل زیر توسیع داد. توجه کنید اگر (a, b) بازه‌ی بازی در متمم $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه $F(a) = F(b)$. بنابراین می‌توانیم F را برابر با مقدار ثابت $F(a)$ در این بازه تعریف کنیم.
ساختار هندسی F، در فصل ۳ توصیف شده است.

۳. **مجموعه‌های کانتور با حذف ثابت.** بازه واحد $[۰, ۱]$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $۰ < \xi < ۱$ یک عدد حقیقی ثابت باشد. (حالت $\xi = \frac{۱}{۳}$ با مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ در متن متناظر است.)

در مرحله اول ساختن، بازه باز میانی در $[۰, ۱]$ باطول ξ را حذف می‌کنیم. در مرحله دوم، بازه میانی با طول نسبی ξ در بازه‌های باقی مانده از مرحله اول را حذف می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

فرض کنیم $\mathcal{C}_\xi$ مجموعه‌ای را مشخص می‌کند که بعد از به کار

بردن نامتناهی بار[1] روش بالا به‌دست می‌آید.
الف) ثابت کنید که متمم $\mathcal{C}_\xi$ در $[\circ,1]$، اجتماع بازه‌های باز با طول کلی برابر با ۱ است.
ب) مستقیما نشان دهید $m_*(\mathcal{C}_\xi)=\circ$.
راهنمایی: بعد از مرحله k ام، نشان دهید مجموعه باقی‌مانده طول کلی $(1-\xi)^k$ دارد.

۴. **مجموعه‌های شبه‌کانتور**، مجموعه بسته $\hat{\mathcal{C}}$ را به شکلی بسازید که مرحله kام ساختن، از حذف 2^{k-1} بازه باز میانی با طول l_k و با شرط

$$l_1+2l_2+\cdots+2^{k-1}l_k<1,$$

حاصل شود.
الف) اگر l_j به اندازه کافی کوچک اختیار شود، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1$.
در این حالت نشان دهید که $m(\hat{\mathcal{C}})>\circ$ و در حقیقت

$$m(\hat{\mathcal{C}})=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$$

.

ب) نشان دهید اگر $x\in\hat{\mathcal{C}}$، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود

۱. گاهی اوقات مجموعه‌ای را که $\mathcal{C}_\xi$ می‌نامیم، با $\mathcal{C}_{\frac{1-\xi}{2}}$ نمایش داده می‌شود.

دارد، به‌طوری که $x_n \notin \hat{\mathcal{C}}$ و $x_n \to x$ و $x_n \in I_n$، که در آن I_n یک زیربازه در متمم $\hat{\mathcal{C}}$ با شرط $|I_n| \to ۰$ است.
ج) به‌عنوان نتیجه‌گیری ثابت کنید که $\hat{\mathcal{C}}$ کامل است و شامل هیچ بازه‌ای نیست.
د) نشان دهید که $\hat{\mathcal{C}}$ ناشمارا است.

۵. فرض کنید E یک مجموعه داده شده و $\mathcal{O}_n$ مجموعه باز

$$\mathcal{O}_n = \{x \mid d(x,E) < \frac{۱}{n}\}$$

باشد. نشان دهید
الف) اگر E فشرده باشد آنگاه $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(\mathcal{O}_n)$.
ب) نتیجه الف ممکن است برای مجموعه بسته وکراندار E یا باز و بیکران E غلط باشد.

۶. با به کار بردن انتقال‌ها و تجانس‌ها ثابت کنید: با فرض این‌که B گویی در $\mathbb{R}^d$ با شعاع r باشد آنگاه $m(B) = (v_d)r^d$، که در آن

$$v_d = m(B_۱)$$

و $B_۱$ گوی واحد است، $B_۱ = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < ۱\}$. محاسبه ثابت v_d تا تمرین ۱۴ در فصل بعد به تعویق انداخته می‌شود.

۷. اگر $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$ یک d تایی از اعداد مثبت، $\delta_i > 0$ و E یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^d$ باشد، δE را به صورت

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \ldots, \delta_d x_d) : (x_1, \ldots, x_d) \in E\},$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که اگر E اندازه‌پذیر باشد، δE اندازه‌پذیر است و در این‌صورت

$$m(\delta E) = \delta_1 \ldots \delta_d m(E).$$

۸. فرض کنید که L یک تبدیل خطی روی $\mathbb{R}^d$ است. نشان دهید که اگر E زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه با فرآیندی که در ادامه می‌آید، $L(E)$ نیز چنین است:
الف) توجه کنید، اگر E فشرده باشد $L(E)$ نیز چنین است. بنابراین اگر E یک مجموعه F_σ باشد، $L(E)$ نیز چنین است.
ب) از آنجا که L به‌طور خودکار برای یک M در نامساوی

$$\left|L(x) - L'(x)\right| \leq M\left|x - x'\right|,$$

صدق می‌کند، می‌توانیم ببینیم که L هر مکعب با طول l را به یک مکعب با طول ضلع $c_d M l$ می نگارد که در آن $c_d = 2\sqrt{d}$ است. حال اگر

$$m(E) = 0$$

، گردایه‌ای از مکعب‌های $\{Q_j\}$ وجود دارد به‌طوری که $E \subset \bigcup_j Q_j$ و $\sum_j m(Q_j) < \varepsilon$. بنابراین $m_*(L(E)) \leq c'\varepsilon$ و $m(L(E)) = 0$. در پایان نتیجه ۳٫۵ را به کار ببرید.

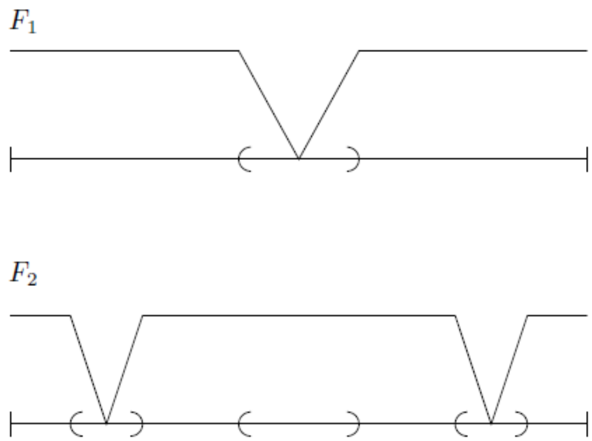
می‌توان نشان داد که $m(L(E)) = |\det L| m(E)$. مسأله ۴ در فصل بعد را ببینید.

۹. مثالی از مجموعه باز $\mathcal{O}$ با خاصیت زیر ارائه دهید: مرز بستار $\mathcal{O}$ اندازه لبگ مثبت دارد.

راهنمایی: مجموعه‌ای را در نظر بگیرید که از اجتماع گیری از بازه‌های باز که در مراحل فرد در ساخت مجموعه شبه کانتور حذف شده‌اند، به‌دست آمده است.

۱۰. این تمرین دنباله نزولی‌ای از توابع پیوسته مثبت روی بازه $[0,1]$ را می‌سازد که حد نقطه به نقطه آن‌ها انتگرالپذیر ریمان نیست. فرض می‌کنیم $\hat{C}$ مجموعه شبه کانتور را مشخص می‌کند که جزئیات ساختار آن در تمرین ۴ آمده است، به‌طوری که به خصوص $m(\hat{C}) > 0$. فرض می‌کنیم F_1 یک تابع قطعه‌ای خطی و پیوسته روی $[0,1]$ باشد، که روی متمم اولین بازه حذف شده در ساختار $\hat{C}$، $F_1 = 1$ و در مرکز این بازه $F_1 = 0$ و برای هر x، $0 \leq F_1(x) \leq 1$.

به‌طور مشابه روی متمم بازه‌های حذف شده در مرحله دوم ساختن $\hat{C}$، $F_۲ = ۱$ و در مرکز این بازه‌ها $F_۲ = ۰$ و $۰ \leq F_۲ \leq ۱$. این روش را ادامه دهید و فرض کنید $f_n = F_۱ F_۲ \ldots F_n$ (شکل ۵.۱ را ببینید)



شکل ۵.۱: ساختار $\{F_n\}$ در تمرین ۱۰

ثابت کنید:

الف) برای هر $n \geq ۱$ و هر $x \in [۰, ۱]$، $۰ \leq f_n(x) \leq ۱$ و

$$f_n(x) \geq f_{n+۱}(x)$$

بنابراین $f_n(x)$ زمانی که $n \to \infty$ همگراست، که آن را با $f(x)$

مشخص می‌کنیم.
ب) تابع f در هر نقطه $\hat{c}$ ناپیوسته است.

راهنمایی: توجه کنید که اگر $x \in \hat{C}$، آنگاه $f(x) = ۱$ و حال دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ را بیابید به‌طوری که $x_n \to x$ و $f(x_n) = ۰$.

اکنون $\int f_n(x)dx$ نزولی است، بنابراین $\int f_n$ همگراست. با این وجود تابع کراندار انتگرالپذیر ریمان است، اگر و فقط اگر مجموعه نقاط ناپیوستگی‌اش اندازه صفر داشته باشد.

(برهان این حکم که در ضمیمه جلد ۱ قرار دارد، در مسأله ۴ توضیح داده می‌شود.) چون f روی یک مجموعه با اندازه مثبت، ناپیوسته است، f انتگرالپذیر ریمان نیست.

۱۱. فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از $[۰,۱]$ باشد، که شامل همه اعدادی است که رقم ۴ در بسط دهدهی آن‌ها ظاهر نمی‌شود. $m(A)$ را بیابید.

۱۲. قضیه ۳.۱ بیان می‌کند که هر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ اجتماع مجزایی از بازه‌های باز است. گزاره مشابه در حالت $\mathbb{R}^d$ که در آن $d \geq ۲$ است، در حالت کلی نادرست است. گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) یک دیسک باز در $\mathbb{R}^۲$ اجتماع مجزایی از مستطیل‌های باز نیست.

راهنمایی: چه اتفاقی برای مرزهای این مستطیل‌ها می‌افتد؟
ب) یک مجموعه باز همبند Ω اجتماع مجزایی از مستطیل‌های باز است، اگر و فقط اگر Ω خودش یک مستطیل باز باشد.

۱۳. مفاهیم زیر با مجموعه‌های G_δ و F_σ سر و کار دارند.
الف) نشان دهید که یک مجموعه بسته، G_δ است و یک مجموعه باز، F_σ است.

راهنمایی: اگر F بسته باشد، فرض می کنیم

$$\mathcal{O}_n = \{x : d(x, F) < \frac{۱}{n}\}$$

ب مثالی از یک F_σ ارائه دهید که G_δ نیست.

راهنمایی: حل این مسأله مشکل‌تر است. فرض کنید F مجموعه‌ای شمارا و نامتناهی باشد که چگال است.
پ)مثالی از مجموعه بورل بدهید که یک G_δ یا F_σ نیست.

۱۴. هدف این تمرین، این است که نشان دهیم در تعریف اندازه خارجی m_*، پوشاندن با استفاده از تعداد متناهی از بازه‌ها،

کارآمد نیست. محتوای بیرونی جردن $J_*(E)$، از مجموعه E در $\mathbb{R}$ با

$$J_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{N} |I_j|,$$

تعریف می‌شود، که در آن اینفیمم‌گیری روی هر پوشش متناهی $E \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ با بازه‌های I_j انجام شده است.

الف) برای هر مجموعه E، ثابت کنید $J_*(E) = J_*(\bar{E})$ (که در آن $\bar{E}$ نمایش بستار E است.)

ب) زیرمجموعهٔ شمارای $E \subset [0,1]$ را معرفی کنید، به‌طوری که

$$J_*(E) = 1 \text{ و } m_*(E) = 0$$

.

۱۵. در ابتدای نظریه، می‌توان اندازهٔ بیرونی را با گرفتن پوشش‌هایی از مستطیل‌ها جای مکعب‌ها تعریف کرد. به زبان دقیق‌تر این‌گونه تعریف می‌کنیم

$$m_*^{\mathcal{R}}(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|.$$

که در آن اینفیمم‌گیری روی پوشش‌های شمارای $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ از مستطیل‌ها (ی بسته) گرفته می‌شود. با ثابت کردن این‌که

برای هر زیرمجموعه E از $\mathbb{R}^d$، $m_*(E) = m_*^R(E)$. نشان دهید که این نگرش به همان نظریه اندازه که در این کتاب بحث شده منجر می‌شود.
راهنمایی: لم ۱,۱ را به کار ببرید.

۱۶. **لم بورل-کانتلی.** فرض کنید که $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ خانواده شمارایی از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ است و

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

همچنین فرض کنید

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E_k ,\ k \text{ برای تعداد نامتناهی}\} \\ &= \limsup_{k\to\infty}(E_k). \end{aligned}$$

الف) ثابت کنید E اندازه‌پذیر است.
ب) ثابت کنید $m(E) = 0$.

راهنمایی: بنویسید $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} E_k$

۱۷. فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر روی $[0,1]$ باشد به‌طوری که تقریبا به‌ازای هر x، $|f_n(x)| < \infty$. نشان دهید

دنباله c_n از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به‌طوری که تقریبا به‌ازای هر x،

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to ۰.$$

راهنمایی: c_n را طوری انتخاب کنید که

$$m\left(\left\{x : \left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{۱}{n}\right\}\right) < ۲^{-n},$$

و لم بورل-کنتلی را به کار ببرید.

۱۸. ادعای زیر را ثابت کنید
هر تابع اندازه‌پذیر، حد دنباله‌ای از توابع پیوسته است.

۱۹. در اینجا به برخی نکات راجع به مجموعهٔ $A+B$ می‌پردازیم.
الف) نشان دهید اگر A و B باز باشد، آنگاه $A+B$ باز است.
ب) نشان دهید اگر A و B بسته باشد، آنگاه $A+B$ اندازه‌پذیر است.
ج) نشان دهید حتی اگر A و B بسته باشد، ممکن است $A+B$ بسته نباشد.
راهنمایی: برای (ب) نشان دهید به‌طوری که $A+B$، F_σ است.

۲۰. نشان دهید مجموعه‌های بسته A و B وجود دارند، به‌طوری که

$m(A) = m(B) = 0,$ اما

$$m(A+B) > 0.$$

الف) در $\mathbb{R}$ فرض کنید $A = \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ مجموعه کانتور) و $B = \frac{\mathcal{C}}{2}$. نشان دهید

$$A + B \supset [0, 1].$$

ب) در $\mathbb{R}^2$ توجه کنید اگر $A = I \times \{0\}$ و $B = \{0\} \times I$ (که $I = [0, 1]$) آنگاه

$$A + B = I \times I.$$

۲۱. ثابت کنید تابع پیوسته‌ای وجود دارد، که یک مجموعه اندازه‌پذیر لبگ را به یک مجموعه اندازه‌ناپذیر می‌نگارد.
راهنمایی: زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر $[0, 1]$ و تصویر معکوسش در $\mathcal{C}$ تحت تابع F در تمرین ۲ را در نظر بگیرید.

۲۲. فرض می‌کنیم $\chi_{[0,1]}$ تابع مشخصه $[0, 1]$ باشد. نشان دهید هیچ تابع f همه جا پیوسته‌ای روی $\mathbb{R}$ وجود ندارد، به‌طوری که

$$f(x) = \chi_{[0,1]}(x).$$

۲۳. فرض کنید f با ضابطه $f(x, y)$ یک تابع روی $\mathbb{R}^2$ باشد که به‌طور مجزا پیوسته است، به این معنا که برای هر متغیر ثابت

f نسبت متغیر دیگر پیوسته است. ثابت کنید f روی $\mathbb{R}^۲$ اندازه‌پذیر است.
راهنمایی: تابع f را به وسیله توابع تکه‌ای - خطی f_n نسبت به متغیر x تقریب بزنید، به‌طوری که نقطه به نقطه $f_n \to f$

۲۴. آیا شماره‌گذاری‌ای مانند $\{r_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعداد گویا وجود دارد، به‌طوری که متمم

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty}\left(r_n - \frac{۱}{n}, r_n + \frac{۱}{n}\right),$$

در $\mathbb{R}$ ناتهی باشد؟
راهنمایی: شماره‌گذاری‌ای بیابید که تنها، اعداد گویای خارج یک بازه کراندار ثابت به شکل r_n باشد، که در آن به ازای یک عدد صحیح m، $n = m^۲$ است.

۲۵. یک تعریف جایگزین برای اندازه‌پذیری این‌گونه است: E اندازه‌پذیر است، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک مجموعه بسته F مشمول در E با

$$m_*(E \setminus F) < \varepsilon$$

وجود داشته باشد. نشان دهید این تعریف با تعریفی که در متن داده شده معادل است.

۲۶. فرض کنید $A \subset E \subset B$ که A و B مجموعه‌های اندازه‌پذیر با اندازه متناهی هستند. ثابت کنید اگر $m(A) = m(B)$ آنگاه E اندازه‌پذیر است.

۲۷. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ یک جفت از مجموعه‌های فشرده در $\mathbb{R}^d$ هستند و $E_۱ \subset E_۲$. فرض کنید $a = m(E_۱)$ و $b = m(E_۲)$. ثابت کنید برای هر c با شرط $a < c < b$ مجموعه فشرده E موجود است، به‌طوری که $E_۱ \subset E \subset E_۲$ و $m(E) = c$.
راهنمایی: به‌عنوان مثال، اگر $d = ۱$ و E زیرمجموعه اندازه‌پذیری از $[۰,۱]$ باشد، $m(E \cap [۰, t])$ را به‌عنوان تابعی از t در نظر بگیرید.

۲۸. فرض کنید E یک زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشد و $m_*(E) > ۰$. ثابت کنید برای هر $۰ < \alpha < ۱$ بازه باز I وجود دارد، به‌طوری که

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m_*(I).$$

در واقع این تقریب نشان می‌دهد، که E تقریبا شامل یک بازه کامل است.
راهنمایی: بازه باز $\mathcal{O}$ را انتخاب کنید که شامل E است، به‌طوری که

$$m_*(E) \geq \alpha m_*(\mathcal{O})$$

$\mathcal{O}$ را به‌عنوان یک اجتماع شمارا و مجزا از بازه‌های باز بنویسید

و نشان دهید که یکی از این بازها باید خاصیت مطلوب را داشته باشد.

۲۹. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد و $m(E) > ۰$. ثابت کنید که مجموعه تفاضلی E که به صورت

$$\{z \in \mathbb{R} : z = x - y;\ x, y \in E\},$$

تعریف می‌شود، شامل یک بازه باز به مرکز مبدأ است.

اگر E شامل یک بازه باشد، آنگاه نتیجه به سهولت به دست می‌آید. در حالت کلی می‌توان از تمرین ۲۸ بهره برد.
راهنمایی: در واقع، بنابر تمرین ۲۸، بازه باز I وجود دارد، به‌طوری که

$$m(E \cap I) \geq \frac{۹}{۱۰} m(I).$$

اگر $E \cap I$ را با $E_۰$ نمایش دهیم و فرض کنیم مجموعه تفاضلی $E_۰$ شامل هیچ بازه بازی حول مبدأ نیست، آنگاه برای a به دلخواه کوچک، مجموعه‌های $E_۰$ و $E_۰ + a$ مجزا هستند. از این حقیقت که

$$(E_۰ \cup (E_۰ + a)) \subset (I \cup (I + a))$$

به یک تناقض می‌رسیم. زیرا سمت چپ از اندازه $۲m(E_۰)$ است

، در حالی که سمت راست اندازه‌ای بزرگ‌تر از $m(I)$ دارد.
شکلی کلی‌تر از این نتیجه در زیر آمده است.

۳۰. اگر E و F اندازه‌پذیر باشند و $m(E) > 0$ و $m(F) > 0$، آنگاه ثابت کنید

$$E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\},$$

شامل یک بازه است.

۳۱. نتیجه حاصل شده از تمرین ۲۹ برهان دیگری برای اندازه‌ناپذیری مجموعه $\mathcal{N}$ که در متن مطالعه شد، عرضه می‌کند. در حقیقت می‌توانیم اندازه‌ناپذیری یک مجموعه در $\mathbb{R}$ که ارتباط زیادی با $\mathcal{N}$ دارد را نیز ثابت کنیم.

دو عدد حقیقی x و y داده شده است. مانند قبل می‌نویسیم $x \sim y$ هرگاه تفاضل $x-y$ گویا باشد. فرض کنید $\mathcal{N}^*$ یک مجموعه است که شامل دقیقا یک عضو در هر کلاس هم‌ارزی است. با به کار بردن نتیجه در تمرین ۲۹، ثابت کنید $\mathcal{N}^*$ اندازه‌ناپذیر است.
راهنمایی: اگر $\mathcal{N}^*$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $\mathcal{N}_n^* = \mathcal{N}^* + r_n$، که در اینجا $\{r_n\}$ یک شماره‌گذاری از $\mathbb{Q}$ است. حال نتیجهٔ

$$m(\mathcal{N}^*) > 0$$

چگونه به دست می‌آید؟ آیا مجموعه تفاضلی $\mathcal{N}^*$ می‌تواند شامل یک بازه باز به مرکز مبدأ باشد؟

۳۲. فرض کنید $\mathcal{N}$ زیرمجموعه اندازه‌ناپذیر $I = [0, 1]$ که در انتهای قسمت ۳ ساخته شد، را مشخص کند.
الف) ثابت کنید اگر E زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\mathcal{N}$ باشد، آنگاه $m(E) = 0$.
ب) اگر G زیرمجموعه $\mathbb{R}$ با $m_*(G) > 0$ باشد، ثابت کنید یک زیرمجموعه از G اندازه‌ناپذیر است.
راهنمایی: برای (الف) انتقال‌های E با اعداد گویا را به کار ببرید.

۳۳. فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه اندازه‌ناپذیر ساخته شده در متن باشد. از تمرین بالا به یاد داشته باشید که زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathcal{N}$ اندازه صفر دارند.

نشان دهید مجموعه $\mathcal{N}$ در شرط $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$ صدق می‌کند، نتیجه بگیرید اگر $\mathcal{N}$ و $E_2 = \mathcal{N}^c$، آنگاه

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \neq m_*(E_1 \cup E_2).$$

اگرچه E_1 و E_2 مجزا هستند.
راهنمایی: برای اثبات $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$، از روش برهان خلف استفاده کنید و یک مجموعه اندازه‌پذیر U را انتخاب کنید که $U \subset I$ و $\mathcal{N}^c \subset U$ و $m_*(U) < 1 - \varepsilon$.

۳۴. فرض کنید $\mathcal{C}_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ دو مجموعه کانتور دلخواه باشند (که در تمرین ۳ ساخته شده‌اند) نشان دهید که تابع $F : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ با خواص زیر وجود دارد:
(۱) F پیوسته و دوسویی است،
(۲) F اکیدا صعودی است،
(۳) F مجموعه $\mathcal{C}_۱$ را به روی $\mathcal{C}_۲$ می‌نگارد.
راهنمایی: از ساختار تابع کانتور لبگ استاندارد پیروی کنید.

۳۵. مثالی از تابع اندازه‌پذیر f و تابع پیوسته Φ ارائه دهید که $f \circ \Phi$ اندازه‌ناپذیر باشد.
راهنمایی: در تمرین ۳۴ فرض کنید $\Phi : \mathcal{C}_۱ \to \mathcal{C}_۲$ با $m(\mathcal{C}_۱) > ۰$ و $m(\mathcal{C}_۲) = ۰$. فرض کنید $N \subset \mathcal{C}_۱$ اندازه‌ناپذیر باشد و $f = \chi_{\Phi(N)}$ را اختیار کنید.
ساختاری که در راهنمایی آمده را به کار ببرید، تا نشان دهید یک مجموعه اندازه‌پذیر لبگ وجود دارد که یک مجموعه بورل نیست.

۳۶. این تمرین مثالی از یک تابع اندازه‌پذیر f روی $[۰, ۱]$ را عرضه می‌کند به‌طوری که، هر تابع g که تقریبا همه جا با f برابر است، (به این معنی که f و g فقط روی یک مجموعه با اندازه صفر نامساوی است)، در هر نقطه ناپیوسته است.

الف) مجموعه اندازه‌پذیر E را طوری بسازید، که به‌ازای هر زیربازه باز ناتهی I در $[0,1]$، هر دو مجموعهٔ $E\cap I$ و $E^c\cap I$ اندازه مثبت داشته باشند.
ب) نشان دهید $f=\chi_E$ این خاصیت را دارد که اگر تقریبا همه جا به‌ازای هر x خاصیت $f(x)=g(x)$ برقرار باشد، آنگاه g باید در هر نقطه $[0,1]$ ناپیوسته باشد.
راهنمایی: برای قسمت اول، یک مجموعه شبه-کانتور با اندازه مثبت را در نظر بگیرید و به هر یک از این بازه‌ها که در مرحله اول ساخت آن حذف شده است، مجموعه‌های شبه کانتور دیگری اضافه کنید. این روش را تا نامتناهی ادامه دهید.

۳۷. فرض کنید Γ منحنی $y=f(x)$ در $\mathbb{R}^2$ است که f پیوسته است. نشان دهید $m(\Gamma)=0$.
راهنمایی: Γ را با مستطیل‌ها بپوشانید، پیوستگی یکنواخت f را به کار ببرید.

۳۸. ثابت کنید هرگاه $\gamma\geq 1$ و $a,b\geq 0$ آنگاه $(a+b)^\gamma\geq a^\gamma+b^\gamma$. همچنین نشان دهید که هرگاه $0\leq\gamma\leq 1$ عکس نامساوی برقرار است.
راهنمایی: از نامساوی بین $(a+t)^{\gamma-1}$ و $t^{\gamma-1}$، از 0 تا b انتگرال بگیرید

نامساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{x_1 + \cdots x_d}{d} \geq (x_1 \ldots x_d)^{1/d} \quad j = 1, \ldots, d., \; x_j \geq 0. \qquad (10.1)$$

با به کار بردن عکس استقرا به دست می‌آید که
الف) نامساوی برقرار است، هرگاه d توانی از ۲ باشد. ($k \geq 1$ و $d = 2^k$).
ب) اگر (۱۰) به‌ازای یک عدد صحیح $d \geq 2$ برقرار باشد، آنگاه باید به‌ازای $d-1$ برقرار باشد و در این‌صورت به‌ازای $y_j \geq 0$ که در آن $j = 1, \ldots d-1$ است،

$$\frac{(y_1 + \cdots + y_{d-1})}{d-1} \geq (y_1 \ldots y_{d-1}).$$

راهنمایی: برای (الف)، اگر $k \geq 2$، $\frac{(x_1+\cdots+x_{2^k})}{2^k}$ را همانند $\frac{A+B}{2}$ بنویسید، که در آن $A = \frac{(x_1+\cdots+x_{2^{k-1}})}{2^{k-1}}$ و نامعادله را برای $d = 2$ به کار ببرید . برای (ب) نامعادله را برای $x_1 = y_1, \ldots, x_{d-1} = y_{d-1}$ و $x_d = \frac{(y_1+\cdots+y_{d-1})}{d-1}$ به کار ببرید.

مسائل

۱. عدد گنگ x داده شده است. نشان دهید (برای مثال اصل لانه کبوتری را به کار ببرید) تعداد نامتناهی کسر مانند $\frac{p}{q}$ با

اعداد صحیح p و q وجود دارند، به‌طوری که

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{۱}{q^{۲}}.$$

ثابت کنید مجموعه نقاط $x \in \mathbb{R}$ که در آن تعداد نامتناهی از کسرهای $\frac{p}{q}$ با اعداد صحیح اول و نسبت به هم اول p و q وجود داشته باشند، به‌طوری که

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{۱}{q^{۳}},\ (\text{یا} \leq \frac{۱}{q^{۲+\varepsilon}}),$$

مجموعه‌ای با اندازه صفر است.
راهنمایی: لم کنتلی-بورل

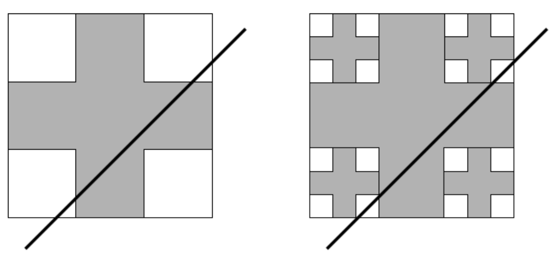
۲. هر مجموعه باز Ω می‌تواند به صورت اجتماع مکعب‌های بسته نوشته شود به‌طوری که $\Omega = \bigcup Q_j$ دارای خواص زیر است:
(الف) Q_j ها درون مجزا دارند.
(ب) $d(Q_j, \Omega^c) \approx$ طول Q_j. این به این معنی است که اعداد ثابت مثبت c و C وجود دارند به‌طوری که

$$c \leq {}^{d(Q_j,\Omega^c)}/_{l(Q_j)} \leq C,$$

که در آن $l(Q_j)$ ضلعی با طول Q_j را مشخص می‌کند.

۳. مثالی از زیرمجموعه اندازه‌پذیر C از $[۰,۱]$ بیابید، که در آن $m(C) = ۰$ و مجموعهٔ تفاضلی C شامل یک بازه نابدیهی به مرکز مبدأ است. نتیجه را با تمرین ۲۹ مقایسه کنید.
راهنمایی: مجموعه کانتور $C = \mathcal{C}$ را بردارید. به ازای $a \in [-۱,۱]$ ثابت، خط $y = x + a$ را در صفحه در نظر بگیرید و از ساختار مجموعه کانتور در مکعب $Q = [۰,۱] \times [۰,۱]$ الگو بردارید. ابتدا، همه را به جز ۴ مکعب بسته با طول ضلع $\frac{۱}{۳}$ حذف کنید. در هر گوشه Q، این روش را در مکعب‌های باقی‌مانده تکرار کنید. (شکل۶.۱ را ببینید)

مجموعهٔ کانتور باقی‌مانده، گرد کانتوری نامیده می‌شود. خاصیت مجموعه‌های فشرده تو در تو را به کار ببرید، تا نشان دهید که خط با گرد کانتوری اشتراک دارد.



شکل ۶.۱: ساختار گرد کانتور

۴. مطالب زیر را کامل کنید تا ثابت کنید یک تابع کراندار روی بازه $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان است، اگر و فقط اگر مجموعهٔ ناپیوستگی‌هایش اندازه صفر داشته باشد. جزئیات این بحث در ضمیمه جلد ۱ داده شده است.

فرض کنید f یک تابع کراندار روی بازه فشرده J باشد و فرض کنید $I(c,r)$ بازه‌ای باز به مرکز c و شعاع $r>0$ را مشخص کند. فرض کنید

$$osc(f,c,r)=\sup|f(x)-f(y)|,$$

که در آن سوپریمم روی همه $x,y\in J\cap I(c,r)$ گرفته می‌شود و نوسان f در c را با

$$osc(f,c)=\lim_{r\to 0} osc(f,c,r),$$

تعریف کنید. به وضوح f در $c\in J$ پیوسته است، اگر و فقط اگر $osc(f,c)=0$.

احکام زیر را ثابت کنید:

الف) به‌ازای هر $\varepsilon>0$، مجموعه نقاط c در J به‌طوری که

$$osc(f,c)\geq\varepsilon$$

، فشرده است.

ب) اگر مجموعه ناپیوستگی‌های f اندازه صفر داشته باشد، آنگاه f انتگرالپذیر ریمان است.
راهنمایی: فرض می‌کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم

$$A_\varepsilon = \{c \in J : osc(f,c) \geq \varepsilon\}.$$

A_ε را با تعداد متناهی از بازه‌های باز بپوشانید که طول کلی آنها بیشتر از ε است. افراز مناسبی از J را انتخاب کنید و تفاضل بین مجموع بالایی و پایینی f روی این قسمت را تقریب بزنید.

ج) برعکس، اگر f روی J انتگرالپذیر باشد، مجموعه ناپیوستگی‌هایش اندازه صفر دارد.
راهنمایی: مجموعه ناپیوستگی‌های f مشمول در $\bigcup\limits_n A_{\frac{1}{n}}$ است. افراز P را طوری انتخاب کنید که $U(f,P)-L(f,P) < \frac{\varepsilon}{n}$. نشان دهید طول کلی بازه‌ها در P که درونش با $A_{\frac{1}{n}}$ اشتراک دارد نابیشتر از ε است.

۵. فرض کنید E یک مجموعه اندازه‌پذیر باشد، $m(E) < \infty$ و

$$E = E_۱ \cup E_۲\,, \quad E_۱ \cap E_۲ = \phi.$$

اگر $m(E) = m_*(E_۱) + m_*(E_۲)$، آنگاه $E_۱$ و $E_۲$ اندازه‌پذیر است.

به خصوص اگر $E \subset Q$ که Q یک مکعب متناهی است، آنگاه E اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر $m(Q) = m_*(E) + m_*(Q \setminus E)$ باشد.

*۶. این گزاره که اصل موضوع انتخاب و اصل خوش ترتیبی معادلند، نتیجه ای از مباحث زیر است.
با یک ترتیب جزئی روی مجموعه E که یک رابطه دوتایی $\leq$ روی مجموعه E است و در شرایط زیر صدق می کند، آغاز می‌کنیم:
(۱) برای هر $x \in E$، $x \leq x$.
(۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$، آنگاه $x = y$.
(۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$، آنگاه $x \leq z$.
به‌علاوه هرگاه به‌ازای $x, y \in E$، $x \leq y$ یا $y \leq x$، آنگاه $\leq$ ترتیب خطی روی E است.
اصل انتخاب و اصل خوش ترتیبی به‌طور منطقی، با اصل ماکسیمال-هاسدورف معادل هستند:
هرمجموعه مرتب جزئی ناتهی، زیرمجموعه مرتب خطی ماکسیمال (ناتهی) دارد.
به عبارت دیگر، اگر E با $\leq$ مرتب جزئی باشد، آنگاه E شامل یک زیرمجموعه ناتهی F است که با $\leq$ مرتب خطی است و

به‌طوری که اگر F مشمول در G و با $\leq$ مرتب خطی نیز باشد، $F = G$.

کاربردی از اصل ماکسیمال-هاسدورف مربوط به گردایه همه زیرمجموعه‌های خوش ترتیب E، منجر به اصل خوش ترتیبی برای E می‌شود. اگرچه اثبات این‌که اصل انتخاب، منجر به اصل ماکسیمال هاسدورف می‌شود، پیچیده‌تر است.

۷.* خم $\Gamma = \{y = f(x)\}$ در $\mathbb{R}^۲$ و $۰ \leq x \leq ۱$، را در نظر بگیرید. فرض کنید f روی $۰ \leq x \leq ۱$، دو بار مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد. در این‌صورت نشان دهید $m(\Gamma + \Gamma) > ۰$، اگر و فقط اگر $\Gamma + \Gamma$ شامل یک مجموعه باز باشد و اگر و فقط اگر f خطی نباشد.

۸.* فرض کنید A و B مجموعه‌هایی باز با اندازه مثبت و متناهی باشند، آنگاه در نامعادله برون-مینکوفسکی (۸.۱) تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر A و B محدب و مشابه باشند، به این معنا که $\delta > ۰$ و $h \in \mathbb{R}^d$ وجود دارد، به‌طوری که

$$A = \delta B + h.$$

فصل ۲

نظریه انتگرالگیری

در میان تعاریف متعددی که برای انتگرال توابع حقیقی مقدار روی اعداد حقیقی پیشنهاد می‌شود، من مواردی را که به عقیده خودم برای فهم تحولات مسأله انتگرالگیری و برقراری ارتباط بین مفهوم سطح، با ظاهر بسیار ساده، و بسیاری تعاریف پیچیده تحلیلی انتگرال ضروری است، حفظ کرده‌ام.

ممکن است کسی بپرسد آیا علاقه کافی برای پرداختن به این

پیچیدگی‌ها وجود دارد و آیا بهتر نیست که خودمان را به مطالعه توابعی با شرایط ساده محدود کنیم ... همان‌گونه که در این دوره می‌بینیم، در این صورت ناچاریم احتمالا از مسائل بسیاری که مدت‌ها پیش مطرح شده‌اند و ظاهر ساده‌ای نیز دارند، بگذریم. برای حل این مسائل و نه به‌دلیل علاقه به پیچیدگی‌ها ست که این کتاب را برای تعریف انتگرال به شکل کلی‌تر از ریمان معرفی کرده‌ام.

اچ. لبگ ۱۹۰۳.

۱.۲ انتگرال لبگ

۱.۰.۱.۲ خواص اولیه و قضایای همگرایی

مفهوم کلی انتگرال لبگ روی $\mathbb{R}^d$ به صورت قدم به قدم تعریف خواهد شد، تا در مرحله بعد به خانواده‌ی بزرگتری از توابع منجر شود. در مرحلۀ بعد خواهیم دید، انتگرال خواص اولیه‌ای مثل خطی بودن و یکنوایی را دارا است و قضایای همگرایی مناسبی را ثابت می‌کنیم، که به جابجایی انتگرال و حد می‌پردازند. در پایان این

روش نظریه‌ی کلی انتگرال‌گیری را به‌دست خواهیم آورد که قطعا در مسائل بعد سرنوشت‌ساز خواهد بود.

در طی چهار مرحله تدریجا به انتگرال‌گیری می‌پردازیم.

۱. توابع ساده

۲. توابع کرانداری که دارای محمل با اندازۀ متناهی‌اند.

۳. توابع نامنفی

۴. توابع انتگرالپذیر (حالت کلی).

نخست تأکید می‌کنیم که همه توابع، اندازه‌پذیر فرض شده‌اند. در ابتدا تنها توابع متناهی مقدار را در نظر می‌گیریم که مقادیر حقیقی اختیار می‌کنند. سپس توابعی را با مقادیر حقیقی توسعه یافته و مختلط مقدار در نظر می‌گیریم.

مرحلۀ اول: توابع ساده

از فصل قبل یادآوری می‌کنیم که منظور از تابع ساده φ، مجموع متناهی

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x), \tag{۱.۲}$$

است که در آن E_k ها مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر با اندازهٔ متناهی و a_k ها ثابت هستند. ایرادی که در چنین تعریفی وجود دارد، این است که یک تابع ساده، به روش‌های مختلف به‌صورت ترکیبات خطی متناهی نوشته می‌شود. برای مثال، به ازای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر متناهی E، $\chi_E - \chi_E = 0$ خوشبختانه برای نمایش یک تابع ساده، یک انتخاب بی ابهام وجود دارد که کاربردهایش مفید و طبیعی است.

فرم کانونی، تجزیه منحصر به فردی به صورت ۱.۲ است، که در آن اعداد a_k ناصفر و نامساوی و مجموعه‌های E_k مجزا هستند.

یافتن فرم کانونی φ آسان است، چون φ تنها می‌تواند مقادیر ناصفر و نامساوی $c_1، \cdots، c_m$ را اختیار کند. قرار می‌دهیم

$$F_k = \{x : \varphi(x) = c_k\}$$

و توجه می‌کنیم که مجموعه‌های F_k مجزا هستند. بنابراین $\varphi = \sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{F_k}$، فرم کانونی مورد انتظار φ است.

اگر φ یک تابع ساده با فرم کانونی $\varphi = \sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{F_k}$ باشد، انتگرال لبگ φ را با

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{M} c_k m(F_k),$$

تعریف می‌کنیم. اگر E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ با اندازهٔ متناهی

باشد، آنگاه $\varphi(x)\chi_E(x)$ نیز یک تابع ساده است و تعریف می‌کنیم

$$\int_E \varphi(x)dx = \int \varphi(x)\chi_E(x)dx.$$

برای تأکید بر انتخاب اندازهٔ لبگ m در تعریف انتگرال، گاهی اوقات برای انتگرال لبگ φ می‌نویسیم

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dm(x).$$

در واقع به منظور سهولت، اغلب برای انتگرال φ روی $\mathbb{R}^d$ یا $\int \varphi(x)dx$ یا به طور ساده $\int \varphi$ را به‌کار می‌بریم.

قضیه ۱.۲. انتگرال توابع ساده تعریف شده در بالا در خواص زیر صادق هستند:

۱. استقلال از نمایش. اگر $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$ نمایشی از φ باشد، آنگاه

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

۲. خطی بودن. اگر φ و ψ ساده باشند و $a, b \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$\int (a\varphi + b\psi) = a\int \varphi + b\int \psi.$$

۳. جمع‌پذیری. اگر E و F زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ با اندازهٔ متناهی باشند، آنگاه

$$\int_{E\cup F}\varphi=\int_E\varphi+\int_F\varphi.$$

۴. یکنوایی. اگر $\varphi\leq\psi$ ساده باشند، آنگاه

$$\int\varphi\leqslant\int\psi.$$

۵. نامساوی مثلثی. اگر φ یک تابع ساده باشد، آنگاه $|\varphi|$ نیز چنین است و

$$\left|\int\varphi\right|\leqslant\int|\varphi|.$$

برهان. تنها حکمی که نیاز به کمی تلاش دارد، حکم اول است که بیان می‌کند انتگرال یک تابع ساده می‌تواند با استفاده از تجزیه‌اش به ترکیب خطی توابع مشخصه، محاسبه شود.

فرض می‌کنیم $\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$ همچنین فرض می‌کنیم مجموعه‌های E_k مجزا هستند. اگرچه اعداد a_k را ناصفر و نامساوی در نظر نگرفته‌ایم. برای هر مقدار ناصفر و مجزای a از $\{a_k\}$ تعریف می‌کنیم، $E'_a=\bigcup E_k$، که در آن اجتماع روی اندیس‌های k گرفته شده است، به طوری که $a_k=a$.

توجه کنید مجموعه‌های E'_a مجزا هستند و $m(E'_a) = \sum m(E_k)$ که در آن مجموع، روی همان مجموعه‌ها با اندیس‌های k گرفته شده است. بنابراین به وضوح $\varphi = \sum a\chi_{E'_a}$، که در آن مجموع روی مقادیر ناصفر نامساوی از $\{a_k\}$ است. بنابراین

$$\int \varphi = \sum am(E'_a) = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k).$$

سپس فرض می‌کنیم $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\chi_{E_k}$ که در آن E_k ها مجزا فرض شده‌اند. در این صورت می‌توانیم تجزیه $\bigcup_{k=1}^{N} E_k$ را با یافتن مجموعه‌های $E^*_1, ..., E^*_n$ با این خاصیت که در آن‌ها $\bigcup_{K=1}^{N} E_K = \bigcup_{j=1}^{n} E^*_j$، دوباره تعریف کنیم. مجموعه‌های $E^*_j (j = 1, ..., n)$ دو به دو مجزا هستند و به ازای هر k داریم: $E_k = \bigcup E^*_j$ که در آن اجتماع روی E^*_j هایی گرفته می‌شود که مشمول در E_k است. (یک برهان از این حکم ساده، را می‌توان در تمرین ۱ یافت.) اکنون به ازای هر j قرار می‌دهیم $a^*_j = \sum a_k$، مجموعی که روی همه k ها گرفته می‌شود، به‌طوری که E_k شامل E^*_j است. به وضوح $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a^*_j\chi_{E^*_j}$. در این حالت، این تجزیه‌ای است که اخیرا به آن پرداخته‌ایم، زیرا E^*_j ها مجزا هستند.

بنابراین

$$\int \varphi = \sum a_j^* m(E_j^*) = \sum \sum_{E_k \supset E_j^*} a_k m(E_j^*) = \sum a_k m(E_k),$$

و حکم (۱) ثابت می‌شود.

حکم (۲) با به کار بردن نمایش دلخواهی از φ و ψ و به وضوح خطی بودن (۱) به‌دست می‌آید.

برای جمعپذیری روی مجموعه‌ها باید توجه کرد اگر E و F مجزا باشند،

$$\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F,$$

و با استفاده از خطی بودن انتگرال می‌بینیم که $\int_{E\cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi$.

اگر $\eta \geqslant ۰$ یک تابع ساده باشد، فرم کانونی آن تقریبا همه جا نامنفی است، پس بنابر تعریف انتگرال $\int \eta \geqslant ۰$. به کار بردن این حکم برای $\varphi - \psi$، خاصیت یکنوایی مطلوب را به‌دست می‌دهد.

سرانجام برای نامساوی مثلثی، کافی است φ را در فرم کانونی‌اش $\varphi = \sum_{k=۱}^{N} a_k \chi_{E_k}$، بنویسیم و مشاهده کنیم که

$$|\varphi| = \sum_{k=۱}^{N} |a_k| \chi_{E_k}(x).$$

بنابراین، از نامساوی مثلثی به کار برده شده برای تعریف انتگرال،

$$\left|\int \varphi\right| = \left|\sum_{k=۱}^{N} a_k m(E_k)\right| \leqslant \sum_{k=۱}^{N} |a_k| m(E_k) = \int |\varphi|.$$

□

جا دارد که در اینجا به حکم آسان بعدی اشاره کنیم. هرگاه f و g یک جفت از توابع ساده باشند که تقریبا همه جا باهم برابرند، آنگاه $\int f = \int g$. برابری انتگرال دو تابع که تقریبا همه جا باهم برابرند، منجر به تعاریف بعدی انتگرال خواهد شد، که در ادامه می‌آید.

مرحله دوم: توابع کراندار با محمل با اندازهٔ متناهی

منظور از محمل تابع اندازه‌پذیر f مجموعهٔ همه نقاطی است که f در آنها صفر نمی‌شود،

$$\operatorname{supp}(f) = \{x : f(x) \neq ۰\},$$

در این‌صورت می‌گوییم f به روی مجموعه E **تکیه می‌کند**، اگر $f(x) = ۰$ هرگاه $x \notin E$. از آنجایی که f اندازه‌پذیر است، مجموعه $\operatorname{supp}(f)$ نیز چنین است. در ادامه علاقه‌مان را به توابع اندازه‌پذیری معطوف می‌کنیم که در آن‌ها $m(\operatorname{supp}(f)) < \infty$ است.

یک نتیجهٔ مهم که در فصل قبل(قضیه ۳۷.۱)گرفته شد، به این صورت است: اگر f تابعی کراندار با کران M باشد و روی مجموعه E تکیه کند، آنگاه دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که هر φ_n کراندار با کران M است و به روی E تکیه می‌کند، و برای هر x،

$$\varphi_n(x) \to f(x).$$

لم کلیدی بعدی به ما این امکان را می‌دهد تا انتگرال را برای رده‌ی توابع کرانداری که دارای محمل با اندازه متناهی هستند، تعریف کنیم.

لم ۲.۲. فرض کنید f تابع کرنداری باشد که به روی مجموعهٔ E با اندازه متناهی تکیه می‌کنند. اگر $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع ساده کراندار با کران M باشد، به طوری که به روی E تکیه کند، و تقریبا به ازای هر x $\varphi_n(x) \to f(x)$، آنگاه:

(آ) حد $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$ وجود دارد.

(ب) اگر تقریبا همه جا $f = 0$ آنگاه حد $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$ برابر صفر است.

برهان. اگر φ روی E به طور یکنواخت به f همگرا باشد، در آن صورت احکام لم تقریبا بدیهی هستند. اما به جای این فرض، یکی

از اصول لیتل وود را یادآوری می‌کنیم که بیان می‌کند، همگرایی دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر تقریبا یکنواخت است. گزاره دقیقی که در پس این اصل قرار دارد، قضیه ایگوروف است که در فصل یک ثابت کردیم و در اینجا به کار می‌بریم. از آنجایی که اندازه E متناهی است، به ازای $\varepsilon > ۰$، داده شده، قضیه ایگوروف، وجود زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر (بسته) A_ε از E را تضمین می‌کند، به طوری که $m(E\backslash A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ و روی A_ε، $\varphi \to f$ به طور یکنواخت. بنابراین با قرار دادن $I_n = \int \varphi_n$، داریم

$$\begin{aligned}
|I_n - I_m| &\leq \int_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|dx \\
&= \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)dx| + \int_{E\backslash A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|dx \\
&\leq \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|dx + ۲Mm(E\backslash A_\varepsilon) \\
&\leq \int_{A_\varepsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)|dx + ۲M\varepsilon.
\end{aligned}$$

با استفاده از همگرایی یکنواخت، به ازای هر $x \in A_\varepsilon$ ، و همه m و n های به قدر کافی بزرگ داریم $|\varphi_n x - \varphi_m(x)| < \varepsilon$، بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$|I_n - I_m| \leqslant m(E)\varepsilon + ۲M\varepsilon.$$

از آنجایی که ε دلخواه است و $m(E) < \infty$ لذا $\{I_n\}$ یک دنباله کشی

است و بنابراین همان طور که انتظار می‌رفت، همگراست.
برای قسمت دوم توجه می‌کنیم اگر $f=0$، می‌توانیم بحث بالا را تکرار کنیم، تا به این نتیجه برسیم که $|I_n| \leqslant m(E)\varepsilon + M\varepsilon$ که خود منجر می‌شود به
$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. □

با به کار بردن لم ۲.۲ اکنون می‌توانیم به انتگرالگیری توابع کرانداری بپردازیم که به روی مجموعه‌های با اندازه متناهی تکیه می‌کند. برای چنین تابع f **انتگرال لبگ** آن را با

$$\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)dx,$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\{\varphi_n\}$ دنباله ای از توابع ساده است و $|\varphi_n| \leqslant M$، هر φ_n به روی تکیه‌گاه f تکیه می‌کند و تقریبا به ازای هر x وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، $\varphi_n(x) \to f(x)$. بنابر لم قبلی می‌دانیم که این حد وجود دارد.

در قدم بعدی، باید اول نشان دهیم که $\int f$ مستقل از انتخاب دنباله $\{\varphi_n\}$ است، تا انتگرال خوش تعریف باشد. بنابراین فرض کنید که $\{\psi_n\}$ دنباله دیگری از توابع ساده باشد، که کراندار با کران M است و به روی $\mathrm{supp}(f)$ تکیه می‌کند، به طوری که تقریبا به ازای هر x، داریم: $\psi_n(x) \to f(x)$ وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین،

$\eta_n = \varphi_n - \psi_n$، دنباله $\{\eta_n\}$ از توابع ساده کراندار به $2M$ تشکیل شده است به طوری که $\{\eta_n\}$ها دارای محمل با اندازه متناهی هستند، لذا وقتی که $n \to \infty$ به بی‌نهایت میل می‌کند، تقریبا همه جا داریم $\eta_n \to 0$. بنابراین با استفاده از قسمت دوم لم نتیجه می‌گیریم، وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، $\int \eta_n \to 0$. در نتیجه دو حد

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)dx \qquad \text{و} \qquad \lim_{n\to\infty} \int \psi_n(x)dx,$$

که بنابر لم وجود دارند برابر هستند. اگر E زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^d$ با اندازه متناهی باشد و f کراندار باشد و $m(\mathrm{supp}(f)) < \infty$، آنگاه به طور طبیعی تعریف می‌کنیم

$$\int_E f dx = \int f(x)\chi_E(x)dx,$$

به وضوح اگر f ساده باشد، آنگاه $\int f$ که در بالا تعریف شده با انتگرال توابع ساده که قبلا مطالعه شد، برابر است. این توسیع تعریف انتگرال نیز، در همه خواص اساسی انتگرال توابع ساده صادق است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید f و g توابع کرانداری هستند که بر مجموعه‌های با اندازه متناهی تکیه می‌کنند، آنگاه خواص زیر برقرارند:

۱. خطی بودن. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، آنگاه

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

۲. جمع‌پذیری. اگر F و E زیر مجموعه‌های مجزا در $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f.$$

۳. یکنوایی. اگر $f \leq g$، آنگاه

$$\int f \leqslant \int g.$$

۴. نامساوی مثلثی. $|f|$ نیز کراندار است، بر یک مجموعه با اندازه متناهی تکیه می‌کند و

$$\left| \int f \right| \leqslant \int |f|$$

همه این خواص با به‌کار بردن تقریب‌های توابع ساده و خواص انتگرال توابع ساده که در قضیه ۱.۲ داده شده به‌دست می‌آید. اکنون در اینجا اولین قضیهٔ همگرایی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. (قضیهٔ همگرایی کراندار) فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر است که همگی به M کراندار هستند و روی E

با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کنند و تقریبا به ازای هر x هنگامی که $n \to \infty$، داریم $f_n(x) \to f(x)$. آنگاه f اندازه‌پذیر و کراندار است و به ازای هر x، تقریبا همه جا روی E تکیه می‌کند و هنگامی که $n \to \infty$ داریم،

$$\int |f_n - f| \to 0$$

در این‌صورت زمانی‌که $n \to \infty$ داریم

$$\int f_n \to \int f.$$

برهان. از مفروضات فورا می‌توان به این نتیجه رسید که f تقریبا همه جا به M کراندار است و احتمالا به جز روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر، خارج E صفر می‌شود. به وضوح بنابر نامساوی مثلثی برای انتگرال، کافی است ثابت کنیم که وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، داریم $\int |f_n - f| \to 0$.

بنابر قضیهٔ ایگوروف،به ازای $\varepsilon > 0$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر A_ε از E موجود است، به‌طوری که $m(E \backslash A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ و روی A_ε، به طور یکنواخت $f_n \to f$. بنابراین می‌دانیم که به ازای n به اندازهٔ کافی بزرگ و به ازای هر $x \in A_\varepsilon$، داریم $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. چون ε دلخواه بود با کنار هم قرار دادن این حقایق نتیجه می‌گیریم

$$\int |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{E - A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \varepsilon m(E) + 2Mm(E - A\varepsilon).$$

□

توجه می‌کنیم که قضیهٔ همگرایی فوق، گزاره‌ای درباره جابجایی یک انتگرال و یک حد است. چون نتیجه‌اش به سادگی بیان می‌کند که

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

نکته مفیدی که می‌توانیم در این جا داشته باشیم، این است که: اگر $f \geq 0$ کراندار باشد و بر یک مجموعه با اندازهٔ متناهی E تکیه کند و $\int f = 0$، آنگاه تقریبا همه جا $f = 0$. در واقع، اگر به ازای هر عدد صحیح $k \geqslant 1$ قرار دهیم $E_k = \{x \in E : f(x) \geqslant \frac{1}{k}\}$، آنگاه این عبارت که $k^{-1}\chi_{E_k}(x) \leqslant f(x)$، بنابر یکنوایی انتگرال نتیجه می‌دهد

$$k^{-1} m(E_k) \leqslant \int f.$$

بنابراین به ازای هر k، داریم $m(E_k) = 0$ و چون

$$\{x : f(x) > 0\} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$$

، می‌بینیم که تقریبا همه جا $f = 0$.

بازگشت به توابع انتگرالپذیر ریمان:

اکنون نشان خواهیم داد که توابع انتگرالپذیر ریمان، انتگرالپذیر لبگ نیز هستند. هنگامی‌که این حکم را با قضیهٔ همگرایی کراندار، که به تازگی ثابت کرده‌ایم تلفیق می‌کنیم، می‌بینیم که انتگرال لبگ مسأله‌ی دوم مطرح شده در مقدمه را حل می‌نماید.

قضیه ۵.۲. فرض کنید f روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ انتگرالپذیر ریمان است، در این صورت f اندازه‌پذیر است و

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)dx,$$

که درآن انتگرال سمت چپ، انتگرال ریمان استاندارد و سمت راست، انتگرال لبگ است.

برهان. بنابر تعریف، تابع انتگرالپذیر ریمان، کراندار است. مثلا $|f(x)| \leqslant M$ و بنابراین کافی است ثابت کنیم که f اندازه‌پذیر است و تساوی انتگرال‌ها را به‌دست آوریم.

همچنین بنابر تعریف انتگرالپذیری ریمان دو دنباله از توابع پله‌ای $\{\varphi_k\}$ و $\{\psi_k\}$ را می‌سازیم که در خواص زیر صادق باشند: به ازای هر

$x \in [a,b]$ و $k \geqslant ۱$، $|\varphi_k(x)| \leqslant M$ و $|\psi_k(x)| \leqslant M$ و

$$\varphi_۱(x) \leqslant \varphi_۲(x) \leqslant ... \leqslant f \leqslant \cdots \leqslant \psi_۲(x) \leqslant \psi_۱(x)$$

و

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx. \qquad (۲.۲)$$

چند نکته در اینجا قابل ملاحظه است: اولا بی‌درنگ از تعاریف به‌دست می‌آید که برای توابع پله‌ای انتگرال ریمان و لبگ برابر هستند، بنابراین به ازای هر $k \geqslant ۱$

$$(۳.۲) \quad \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \psi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \psi_k(x)dx \qquad \text{و} \qquad \int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} \varphi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x)dx$$

سپس اگر فرض کنیم

$$\tilde{\psi}(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x), \qquad \text{و} \qquad \tilde{\varphi}(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$$

داریم $\tilde{\psi} \leqslant f \leqslant \tilde{\varphi}$. بعلاوه $\tilde{\varphi}$ و $\tilde{\psi}$ هر دو اندازه‌پذیرند (بنابر حد توابع پله‌ای) و قضیهٔ همگرایی کراندار نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \varphi_k(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}(x)dx$$

و

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}\psi_k(x)dx=\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}\tilde{\psi}(x)dx.$$

این دو، به همراه (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌دهند که

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}(\tilde{\psi}(x)-\tilde{\varphi}(x)dx=0.$$

چون $\psi_k-\varphi_k\geqslant 0$ داریم $\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}\geqslant 0$. بنابر توضیحات قبل و برهان قضیهٔ همگرایی کراندار نتیجه می‌گیریم تقریبا همه جا $\tilde{\psi}-\tilde{\varphi}=0$ و بنابراین تقریبا همه جا $f=\tilde{\psi}=\tilde{\varphi}$ که ثابت می‌کند f اندازه‌پذیر است. سرانجام چون تقریبا همه جا $\varphi_k\to f$ (بنابر تعریف) داریم،

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}\varphi_k(x)dx=\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}f(x)dx$$

بنابر (۲.۲) و (۳.۲) می بینیم $\lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}}f(x)dx=\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}f(x)dx$.
□

مرحلهٔ سوم: توابع نامنفی

با انتگرالگیری از توابعی که اندازه‌پذیر و نامنفی هستند، ولی لزوما کراندار نیستند پیش می‌رویم. نکته بسیار مهم این است که

این توابع مجاز باشندکه مقادیر حقیقی توسعه یافته را بپذیرند، یعنی این توابع می‌توانند (روی یک مجموعه اندازه‌پذیر) مقدار $+\infty$ را اختیار کنند. دراین رابطه قراردادی را یاد آوری می‌کنیم که سوپریمم مجموعه‌ای بیکران از اعداد مثبت $+\infty$ است.

در آن صورت **انتگرال لبگ** (توسعه یافته) تابع f را با

$$\int f(x)dx = \sup_{g} \int g(x)dx$$

تعریف می‌کنیم که سوپریمم روی همه توابع اندازه‌پذیر g گرفته می‌شود به طوری‌که $0 \leqslant g \leqslant f$ و g کراندار است و روی مجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کند.

بنابر تعریف فوق از انتگرال، تنها دو حالت ممکن است، اینکه سوپریمم متناهی یا نامتناهی باشد. در حالت اول، هنگامی که $\int f(x)dx < \infty$ می‌گوییم f **انتگرالپذیر لبگ** یا ساده‌تر بگوییم **انتگرالپذیر** است.

به وضوح اگر E زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ باشد و $f \geqslant 0$ آنگاه $f\chi_E$ نیز مثبت است و تعریف می‌کنیم

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx.$$

مثال‌های ساده‌ای از توابع انتگرالپذیر (یا انتگرال‌ناپذیر) روی $\mathbb{R}^d$،

بدین صورت ارائه می‌شود:

$$f_a(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & \text{اگر } |x| \leq ۱, \\ ۰ & \text{اگر } |x| > ۱. \end{cases}$$

$$F_a(x) = \frac{۱}{۱ + |x|^a} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

در این صورت f_a انتگرالپذیر است، دقیقا هنگامی‌که $a < d$ باشد، در حالی که F_a ، دقیقا وقتی انتگرالپذیر است که $a > d$ باشد. نتیجه ۱۰.۲ و نیز تمرین ۱۰ را ببینید.

قضیه ۶.۲. انتگرال توابع اندازه‌پذیر نامنفی خواص زیر را دارد:

۱. خطی بودن. اگر $f, g \geqslant ۰$ و a, b اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

۲. جمعپذیری. اگر F و E زیرمجموعه‌های مجزا در $\mathbb{R}$ باشند و $f \geqslant ۰$، آنگاه

$$\int_{F \cup E} f = \int_E f + \int_F f.$$

۳. یکنوایی. اگر $g \geqslant f \geqslant ۰$، آنگاه

$$\int f \leqslant \int g.$$

۴. اگر g انتگرالپذیر باشد و $0 \leqslant f \leqslant g$، آنگاه f انتگرالپذیر است.

۵. اگر f انتگرالپذیر باشد، آنگاه تقریبا به ازای هر x، داریم $f(x) < \infty$.

۶. اگر $\int f = 0$، آنگاه تقریبا به ازای هر x، داریم $f(x) = 0$.

برهان. از بین چهار حکم اول فقط (۱) بلافاصله از تعاریف به دست نمی‌آید و برای اثبات آن در ادامه بحث می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a = b = 1$ و توجه می‌کنیم که اگر $\varphi \leqslant f$ و $\psi \leqslant g$ که در آن φ و ψ کراندار هستند و بر مجموعه‌هایی با اندازه متناهی تکیه می‌کنند، آنگاه $\varphi + \psi \leqslant f + g$ و $\varphi + \psi$ نیز کراندار است و بر یک مجموعه با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کنند، در نتیجه

$$\int f + \int g \leqslant \int f + g,$$

برای اثبات عکس نامساوی فرض می‌کنیم، η کراندار است و بر یک مجموعه با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کند و $\eta \leqslant f + g$. اگر تعریف کنیم $\eta_1(x) = \min(f(x), \eta(x))$ و $\eta_2 = \eta - \eta_1$ توجه می‌کنیم که

$$\eta_1 \leqslant f \qquad \text{و} \qquad \eta_2 \leqslant g.$$

به‌علاوه $\eta_۱$ و $\eta_۲$ کراندارند و بر مجموعه‌هایی با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کنند. بنابراین

$$\int \eta = \int (\eta_۱ + \eta_۲) = \int \eta_۱ + \int \eta_۲ \leqslant \int f + \int g$$

با سوپریمم‌گیری روی η، عکس نامساوی نتیجه می‌شود.

برای اثبات گزاره‌ی (۵) در ادامه بحث می‌کنیم. فرض کنید $E_k = \{x : f(x) \geqslant k\}$, و $E_\infty = \{x : f(x) = \infty\}$ آنگاه

$$\int f \geqslant \int \chi_{E_k} f \geqslant k m(E_k),$$

بنابراین هرگاه $k \to \infty$ ، آنگاه $m(E_k) \to ۰$ چون $E_\infty \searrow m(E_k)$ بنابر نتیجه ۲۴.۱ از فصل قبل داریم $m(E_\infty) = ۰$.

برهان (۶) مشابه مطالب بعد از قضیه ۴.۲ است. $\square$

اکنون توجهمان را به قضایای مهم همگرایی برای ردهٔ توابع اندازه‌پذیر نامنفی معطوف می‌کنیم. برای رسیدن به نتایج بعدی، سؤال زیر را مطرح می‌کنیم: فرض کنید $f_n \geqslant ۰$ و تقریبا به ازای هر x، داریم $f_n(x) \to f(x)$، آیا این درست است که $\int f_n dx \to \int f dx$ ؟ متأسفانه مثال بعد، به این سؤال پاسخ منفی می‌دهد و نشان می‌دهد که باید صورت سؤال را تغییر دهیم تا نتیجه مثبتی برای همگرایی به دست آوریم.

فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \circ < x < \frac{1}{n} \text{ اگر}, \\ \circ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

آنگاه به ازای هر x، $f_n(x) \to \circ$. ولی به ازای هر n، $\int f_n(x)dx = ۱$. در این مثال به خصوص حد انتگرال‌ها بزرگتر از انتگرال تابع حد است. این حالت همان‌طور که اکنون خواهیم دید، یک حکم کلی است.

لم ۷.۲. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر با $f_n \geqslant \circ$ باشد. اگر تقریبا به ازای هر x، داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، آنگاه

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

برهان. فرض کنید $\circ \leqslant g \leqslant f$ که در آن g کراندار است و روی مجموعهٔ E با اندازهٔ متناهی تکیه می‌کند. اگر قرار دهیم

$$g_n(x) = \min(g(x), f_n(x))$$

، آنگاه g_n اندازه‌پذیر است. و دارای محمل E است و تقریبا همه جا داریم $g_n(x) \to g(x)$. لذا بنابر قضیهٔ همگرایی کراندار

$$\int g_n \to \int g.$$

همچنین بنابر نوع ساخت داریم $g_n \leqslant f_n$ و بنابراین $\int g_n \leqslant \int f_n$ و بنابراین

$$\int g \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

با سوپریمم گیری روی همه g ها نامساوی مطلوب به‌دست می‌آید. حالت‌های خاص $\int f = \infty$ یا $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$ را در نظر نگرفتیم. $\square$

اکنون می‌توانیم بی‌درنگ، به نتایج زیر برسیم.

نتیجه ۸.۲. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد که تقریبا به ازای هر x، $f_n(x) \leqslant f(x)$ و $f_n(x) \to f(x)$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

برهان. چون تقریبا به ازای هر x، $f_n(x) \leqslant f(x)$، لزوما به ازای هر n داریم $\int f_n \leqslant \int f$، بنابراین

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

این نامساوی همراه با لم فاتو، حد مورد نظر را به‌دست می‌دهد. $\square$

به ویژه، اکنون می‌توانیم یک قضیهٔ همگرایی پایه‌ای برای رده‌ی توابع اندازه‌پذیر نامنفی به دست آوریم. این گزاره به نمادگذاری زیر نیاز دارد.

مشابه نمادهای $\nearrow$ و $\searrow$ که برای نشان دادن دنباله‌های صعودی و نزولی از مجموعه‌ها به کار می‌رود، می‌نویسیم $f_n \nearrow f$ هرگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر است و

به ازای هر $n \geqslant 1$ و تقریبا هر x، $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ و برای تقریبا هر x، $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

به طور مشابه می‌نویسیم $f_n \searrow f$ هرگاه،

به ازای هر $n \geqslant 1$ و تقریبا هر x، $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. و برای تقریبا هر x، $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

نتیجه ۹.۲ (قضیه همگرایی یکنوا). فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد و $f_n \searrow f$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجهٔ سودمند زیر را به‌دست می‌دهد.

نتیجه ۱۰.۲. سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای هر $k \geqslant 1$، $a_k(x) \geqslant 0$ اندازه‌پذیر است، آنگاه

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx,$$

اگر $\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)$ متناهی باشد، آنگاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ تقریبا همه جا همگراست.

برهان. فرض کنید $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ و $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$. توابع f_n اندازه‌پذیرند، $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ و وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند $f_n(x) \to f(x)$. از آنجا که

$$\int f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx$$

قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد،

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx.$$

اگر $\sum \int a_k < \infty$، آنگاه تساوی فوق نتیجه می‌دهد که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ انتگرالپذیر است و بنابر مباحث قبل نتیجه می‌گیریم $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ تقریبا همه جا متناهی است. $\square$

دو بحث زیبا از نتیجهٔ اخیر ارائه می‌دهیم.
اولی حاوی برهان دیگری از لم بورل-کنتلی (تمرین ۱۶ فصل ۱) است، که می‌گوید اگر $E_۱$،$E_۲$،... گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $\sum m(E_k) < \infty,$ آنگاه مجموعهٔ نقاطی که به تعداد نامتناهی E_k متعلق است، اندازهٔ صفر دارد. برای اثبات این گزاره فرض کنید

$$a_k(x) = \chi_{E_k}(x)$$

و توجه کنید نقطه‌ی x به تعداد نامتناهی مجموعهٔ E_k تعلق دارد، اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=۱}^{\infty} a_k(x) = \infty$$

. فرض ما روی $\sum m(E_k)$ دقیقا بیان می‌کند $\sum_{k=۱}^{\infty} \int a_k(x)dx < \infty$ و نتیجه بیان می‌کند $\sum_{k=۱}^{\infty} a_k(x)$ متناهی است به جز احتمالا روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر و بنابراین لم بورل-کنتلی ثابت می‌شود.
شرح دوم در مبحث تقریب‌ها که در فصل سوم خواهد آمد،

سودمند خواهد بود. تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^d + 1} & x \neq 0 \quad \text{اگر}, \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} . \end{cases}$$

ثابت می‌کنیم f خارج هر گوی $|x| < \varepsilon$ انتگرالپذیر است. همچنین برای یک ثابت $C > 0$،

$$\int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)dx \leqslant \frac{C}{\varepsilon}.$$

در واقع اگر قرار دهیم $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^k\varepsilon < |x| \leqslant 2^{k+1}\varepsilon\}$ و تعریف کنیم

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \quad \text{که در آن} \quad a_k(x) = \frac{1}{(2^k\varepsilon)^{d+1}}\chi_{A_k}(x)،$$

آنگاه باید داشته باشیم $f(x) \leqslant g(x)$ و بنابراین $\int f \leqslant \int g$. از آنجا که مجموعهٔ A_k با یک تجانس با عامل $2^k\varepsilon$ از $\mathcal{A} = \{1 < |x| < 2\}$ به دست می‌آید، بنابر خواص پایایی نسبی اندازهٔ لبگ داریم، $m(A_k) = (2^k\varepsilon)^d m(\mathcal{A})$ بنابر نتیجهٔ ۱۰.۲ می‌بینیم

$$\int g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(A_k)}{(2^k\varepsilon)^{d+1}} = m(\mathcal{A}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^k\varepsilon)d}{(2^k\varepsilon)^{d+1}} = \frac{C}{\varepsilon},$$

که در آن $C = ۲m(A)$. توجه کنید در حقیقت خاصیت پایایی تجانس مشابه نشان می‌دهد

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{dx}{|x|^{d+۱}} = \frac{۱}{\varepsilon} \int_{|x|\geqslant ۱} \frac{dx}{|x|^{d+۱}}.$$

در ادامه تساوی (۷.۲) را ببینید.

مرحلهٔ چهارم : حالت کلی

اگر f تابعی اندازه‌پذیر و حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^d$ باشد می‌گوییم f **انتگرالپذیر لبگ** (یا فقط انتگرالپذیر) است، هرگاه تابع اندازه‌پذیر نامنفی $|f|$ به معنای بخش قبل، انتگرالپذیر باشد.

اگر f انتگرالپذیر لبگ باشد، مفهومی برای انتگرال ارائه می‌دهیم که در ادامه می‌آید ابتدا تعریف می‌کنیم

$$f^{-}(x) = max(-f(x), ۰) \text{ و } f^{+}(x) = max(f(x), ۰).$$

بنابراین f^- و f^+ نامنفی هستند و $f = f^+ - f^-$. ازآنجا که $f^\pm \leqslant |f|$ و هرگاه f انتگرالپذیر باشد، هر دو تابع f^- و f^+ نیز انتگرالپذیرند و در این صورت انتگرال لبگ f را به صورت

$$\int f = \int f^+ - f^-$$

تعریف می‌کنیم.

در عمل می‌توان تجزیه‌های مختلفی چون $f = f_1 - f_2$ که در آن f_1 و f_2 توابع اندازه‌پذیر نامنفی هستند، ارائه کرد و می‌توان انتظار داشت صرف‌نظر از تجزیه f، همیشه

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

به عبارت دیگر، تعریف انتگرال باید مستقل از تجزیه $f = f_1 - f_2$ باشد. برای این که ببینیم چرا این درست است، فرض می‌کنیم $f = g_1 - g_2$ تجزیهٔ دیگری است که هر دو g_1 و g_2 نامنفی و انتگرالپذیر هستند. از آنجا که $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ داریم $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$، اما هر دو طرف تساوی آخر شامل توابع اندازه‌پذیر مثبت است. بنابراین، خطی بودن انتگرال در این حالت نتیجه می‌دهد که

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$$

از آنجا که همه انتگرال‌های مطرح شده متناهی هستند، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

با توجه به تعاریف بالا، مباحث کوتاه زیر مفید خواهد بود. انتگرالپذیری و مقدار انتگرال f با تغییر f روی یک مجموعه از اندازهٔ صفر تغییر نمی‌کند. همچنین مفید است تا قرارداد کنیم که در بحث انتگرال، توابع مجاز هستند که روی مجموعه‌های با اندازهٔ صفر تعریف نشده باشند. بعلاوه اگر f انتگرالپذیر باشد، آنگاه بنابر قسمت (۵) از قضیهٔ ۶.۲ تقریبا همه جا متناهی مقدار است. بنابراین با به کار بردن قرار داد بالا ما می‌توانیم همیشه دو تابع انتگرالپذیر f و g را جمع کنیم، زیرا مبهم بودن $f+g$، از لحاظ مقادیر توسعه یافته‌ی هر کدام، در مجموعهٔ با اندازهٔ صفر رخ می‌دهد. به‌علاوه توجه می‌کنیم که وقتی از تابع f حرف می‌زنیم، در حقیقت در حال صحبت کردن درباره گردایهٔ همه توابعی هستیم که تقریبا همه جا برابر با f هستند.

کاربردهای ساده از تعریف و خواصی که قبلا ثابت شده است، همه خواص ابتدایی در انتگرال را نتیجه می‌دهد.

گزاره ۱۱.۲. انتگرال توابع انتگرالپذیر لبگ، خطی، جمعپذیر، و یکنوا است و در نامساوی مثلثی صدق می‌کند.

حال دو نتیجه را جمع می‌کنیم که اگر چه در نوع خودشان آموزنده‌اند، در برهان قضیه بعدی به آنها نیازمندیم.

گزاره ۱۲.۲. فرض می‌کنیم f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر است، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$:

۱. مجموعه B با اندازهٔ متناهی (برای مثال یک گوی) وجود دارد، به طوری که

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon.$$

۲. $\delta > 0$ وجود دارد، به طوری که که هرگاه $m(E) < \delta$

$$\int_E |f| < \varepsilon.$$

شرط آخر به عنوان پیوستگی مطلق شناخته می‌شود.

برهان. با جایگزینی f با $|f|$ بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $f \geqslant 0$. برای قسمت اول فرض می‌کنیم B_N نشان دهنده گویی با شعاع N به مرکز مبدا مختصات باشد و توجه می‌کنیم که اگر $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$ ، آنگاه $f_N \geqslant 0$ اندازه‌پذیر است، $f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x)$ و $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$. بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا داریم

$$\lim_{N\to\infty} \int f_N = \int f.$$

به خصوص برای N به اندازهٔ کافی بزرگ

$$0 \leqslant \int f - \int f\chi_{B_N} < \varepsilon,$$

و از آنجا که $\chi_{B_N^c} = 1 - \chi_{B_N}$ است، نتیجه می‌گیریم $\int_{B_N^c} f < \varepsilon$.

برای قسمت دوم، دوباره فرض می‌کنیم $f \geqslant 0$ است، قرار می‌دهیم $f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}$ که در آن

$$E_N = \{x : f(x) \leqslant N\}.$$

یک بار دیگر $f_N \geqslant 0$ اندازه‌پذیر است و $f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x)$، و به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده (بنابر قضیهٔ همگرایی یکنوا) عدد صحیح $N > 0$ وجود دارد، به طوری‌که

$$\int (f - f_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

اکنون $\delta > 0$ را در نظر می‌گیریم، به‌طوری که $N\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. اگر $m(E) < \varepsilon$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leq \int (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leq \int (f - f_N) + Nm(E) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

به طور شهودی توابع انتگرالپذیر، به تعبیری باید در بی‌نهایت به صفر میل کنند. زیرا انتگرال آن‌ها متناهی است و قسمت اول قضیه معنای دقیقی از این شهود را ضمیمه می‌کند. با این وجود باید ملاحظه کرد که انتگرالپذیری، همگرایی نقطه‌ای به صفر را، زمانی که $|x|$ بزرگ می‌شود، تضمین نمی‌کند. تمرین ۶ را ببینید.

اکنون آماده‌ایم تا مبنای نظریه انتگرال لبگ، قضیهٔ همگرایی تسلطی را ثابت کنیم. این قضیه می‌تواند به عنوان اوج تلاشهایمان تلقی شود و گزاره‌ای کلی درباره اثر متقابل بین حدود و انتگرال‌ها است.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر است و هنگامی‌که n به بی‌نهایت میل می‌کند، تقریبا همه جا $f_n(x) \to f(x)$. اگر $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ که در آن g انتگرالپذیر است، آنگاه

$$\int |f_n - f| \to 0 \qquad \text{وقتی که } n \to \infty,$$

و در نتیجه

$$\int f_n \to \int f \qquad \text{وقتی که } n \to \infty.$$

برهان. به ازای هر $N > 0$ فرض کنید

$$E_N = \{x : |x| \leqslant N,\, g(x) \leqslant N\}$$

. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، مشابه قسمت اول لم قبل بحث می‌کنیم. به این منظور N ای وجود دارد که $\int_{E_N^c} g < \varepsilon$. در این‌صورت توابع $f_n\chi E_N$ کراندار (با کران N) هستند و بر یک مجموعه با اندازۀ متناهی تکیه می‌کنند. بنابراین بنابر قضیۀ همگرایی کراندار داریم

$$\text{به ازای } n\text{های بزرگ}, \qquad \int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon.$$

به ازای n های بزرگ تقریب، زیر به‌دست می‌آید،

$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f| &= \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \\ &\leq \int_{E_N} |f_N - f| + ۲\int_{E_N^c} g \\ &\leq \varepsilon + ۲\varepsilon = ۳\varepsilon.\end{aligned}$$

□

توابع مختلط مقدار

اگر f تابع مختلط مقدار روی $\mathbb{R}^d$ باشد، می‌نویسیم

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

که u و v توابع حقیقی مقدار هستند و به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی f نامیده می‌شوند. تابع f اندازه‌پذیر است، اگر و تنها اگر هر دو u و v اندازه‌پذیر باشند. سپس می‌گوییم f **انتگرالپذیر لبگ** است، هرگاه تابع

$$|f(x)| = (u(x)^۲ + v(x)^۲)^{\frac{۱}{۲}},$$

(که نامنفی است) به معنایی که پیش‌تر تعریف شد، انتگرالپذیر لبگ باشد.

به وضوح داریم

$$|v(x)| \leqslant |f(x)| \qquad \text{و} \qquad |u(x)| \leqslant |f(x)|.$$

همچنین اگر $a, b \geqslant ۰$ داریم، $(a+b)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant a^{\frac{۱}{۲}} + b^{\frac{۱}{۲}}$، که بنابراین

$$|f(x)| \leqslant |u(x)| + |v(x)|.$$

با استفاده از این نامساوی‌های ساده، نتیجه می‌گیریم تابع مختلط مقدار f انتگرالپذیر است، اگر و فقط اگر هر دو قسمت حقیقی و موهومی‌اش انتگرالپذیر باشند. حال انتگرال لبگ f به صورت

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx$$

تعریف می‌شود. سرانجام اگر E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^d$ باشد و f تابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار روی E باشد، می‌گوییم f روی E

انتگرال‌پذیر لبگ است، اگر $f\chi_E$ روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر باشد و تعریف می‌کنیم $\int_E f = \int f\chi_E$.

گردایهٔ همه توابع انتگرال‌پذیر مختلط مقدار روی زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset \mathbb{R}^d$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ را تشکیل می‌دهد. در واقع اگر f و g انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه $f+g$ نیز چنین است. زیرا نامساوی مثلثی

$$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|,$$

و یکنوایی انتگرال‌ها نتیجه می‌دهد

$$\int_E |f+g| \leqslant \int_E |f| + \int_E |g| < \infty.$$

همچنین به وضوح اگر $a \in \mathbb{C}$ و f انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه af نیز چنین است. سرانجام انتگرالگیری به خطی بودن روی $\mathbb{C}$ می‌انجامد.

۲.۲ فضای L^1 از توابع انتگرال‌پذیر

این حقیقت که توابع انتگرال‌پذیر فضای برداری را تشکیل می‌دهند، موضوع مهمی دربارهٔ خواص جبری این توابع است. یک گزارهٔ تحلیلی بنیادی این است که این فضای برداری با یک نرم مناسب

کامل می‌شود. برای هر تابع انتگرالپذیر f روی $\mathbb{R}^d$ ، **نرم** [1] f را تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx.$$

گردایهٔ همه توابع انتگرالپذیر با نرم بالا یک تعریف (تا حدی نادقیق) از فضای $L^1(\mathbb{R}^d)$ رابه دست می‌دهد. همچنین توجه می‌کنیم که $\|f\| = 0$ اگر و تنها اگر تقریبا همه جا $f = 0$ باشد. (قضیهٔ ۶.۲ را ببینید) این خاصیت ساده نرم، روشی را تداعی می‌کند که پیش از این اتخاذ کرده‌ایم که دو تابعی که تقریبا همه جا برابرند را از هم متمایز ندانیم. با در نظر داشتن این مفهوم، تعریف دقیقی از $L^1(\mathbb{R}^d)$ به‌عنوان فضای همه رده‌های هم ارزی از توابع انتگرالپذیر ارائه می‌دهیم که در آن دو تابع هم ارز نامیده می‌شوند، هرگاه تقریبا همه جا برابر باشند. با این وجود اغلب راحت‌تر است که این تعریف (غیر دقیق) که یک عضو $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$، تابعی انتگرالپذیراست را حفظ کنیم، در حالی که آن یک رده هم ارزی از چنین توابعی است. توجه می‌کنیم بنابر بالا، نرم $\|f\|$ از یک عضو $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$، با انتخاب هر تابع انتگرالپذیر از رده هم‌ارزی‌اش خوش تعریف است. بعلاوه $L^1(\mathbb{R}^d)$ خاصیت فضای

1. Norm

برداری بودن را به ارث می‌برد. این مطلب و گزاره‌های سر راست دیگر در قضیهٔ زیر خلاصه شده‌اند.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید f و g دو تابع در $L^1(\mathbb{R}^d)$ هستند:

۱. به ازای هر $a \in \mathbb{C}$ ، $\|af\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |a|\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

۲. $\|f+g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

۳. $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ اگر وفقط اگرتقریبا همه جا $f = 0$.

۴. $d(f,g) = \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ یک متر روی $L^1(\mathbb{R}^d)$ تعریف می‌کند.

در (۴) منظور این است که d شرایط زیر را برقرار می‌کند. ابتدا به ازای توابع انتگرالپذیر f و g، $d(f,g) \geqslant 0$ و $d(f,g) = 0$ اگر و تنها اگر تقریبا همه جا $f = g$. همچنین $d(f,g) = d(g,f)$ و سرانجام d نامساوی مثلثی را برقرار می‌کند.

$$\text{به ازای هر } f,g,h \in L^1(\mathbb{R}^d) \qquad d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g).$$

فضای V با متر d **کامل** نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله‌ی کشی $\{x_k\}$ در V (به این معنا که $d(x_k, x_l) \to 0$ هنگامی‌که $k,l \to \infty$)، $x \in V$ وجود دارد، به طوری‌که $\lim_{k\to\infty} x_k = x$، یعنی

$$\text{وقتی که } k \to \infty, \qquad d(x_k, x) \to 0.$$

هدف اصلی ما کامل‌سازی فضای توابع انتگرالپذیر ریمان است که پس از اثبات قضیهٔ مهم بعد آن را به‌دست خواهیم آورد.

قضیه ۱۵.۲. (**ریس-فیشه**[1]) فضای برداری L^1 با مترش کامل است.

برهان. فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در نرم است، به این معنا که هنگامی $n, m \to +\infty$، $\|f_n - f_m\| \to 0$. ایده‌ی برهان بیرون کشیدن زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}$ است، که هم تقریبا نقطه به نقطه و هم در نرم به تابعی چون f همگرا باشد.

تحت شرایط ایده‌ال دنباله $\{f_n\}$ را داریم که تقریبا همه جا به حد f همگراست و سپس ثابت می‌کنیم که دنباله در نرم نیز به f همگراست. متاسفانه، تقریبا همه جا همگرایی برای دنباله‌های کشی کلی برقرار نیست. (تمرین ۱۲ را ببینید) با این وجود نکته مهم این است که اگر همگرایی با نرم به اندازهٔ کافی سریع باشد، آنگاه تقریبا همه جا همگرایی یک نتیجه است و می‌تواند با به‌کارگیری زیر دنباله‌ی مناسبی از دنباله اصلی به‌دست آید.

در واقع زیر دنباله‌ی $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{f_n\}$ را با خاصیت زیر در نظر

1. Riesz-Fischer

می‌گیریم :

به ازای هر $k \geqslant ۱$ $\qquad \|f_{n_{k+۱}} - f_{n_k}\| \leqslant ۲^{-k}$.

با توجه به این نکته که هرگاه $n, m \geqslant N(\varepsilon)$، $\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$، وجود یک زیر دنباله با این خاصیت تضمین می‌شود. بنابراین کافی است قرار دهیم $n_k = N(۲^{-k})$. اکنون سری‌ای را در نظر می‌گیریم که متعاقبا همگرایی آن دیده خواهد شد،

$$f(x) = f_{n_۱}(x) + \sum_{k=۱}^{\infty}(f_{n_{k+۱}}(x) - f_{n_k}(x))$$

و

$$g(x) = |f_{n_۱}(x)| + \sum_{k=۱}^{\infty}|f_{n_{k+۱}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

و توجه می‌کنیم

$$\int |f_{n_۱}| + \sum_{k=۱}^{\infty}\int |f_{n_{k+۱}} - f_{n_k}| \leqslant \int |f_{n_۱}| + \sum_{k=۱}^{\infty} ۲^{-k} < \infty.$$

بنابراین قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد که g انتگرالپذیر است و چون $|f| \leqslant g$، بنابراین f نیز چنین است. به خصوص سری تعریف کننده f تقریبا همه جا همگراست و چون مجموع جزئی این سری دقیقا f_{n_k} (با ساختار سری تلسکوپی) است، در می‌یابیم که

تقریبا همه جا x $\qquad f_{n_k}(x) \to f(x)$.

برای اثبات اینکه در L^1، $f_{n_k} \to f$، به راحتی ملاحظه می‌کنیم، به ازای هر k

$$|f - f_{n_k}| \leqslant g$$

و قضیهٔ همگرایی تسلطی را به کار می‌بندیم و وقتی که k به بی‌نهایت میل می‌کند، $\|f_{n_k} - f\|_{L^1} \to 0$.

سرانجام مرحلهٔ آخر برهان شامل یادآوری این است که $\{f_n\}$ کشی است. فرض می‌کنیم ε داده شده باشد N وجود دارد، به‌طوری که به ازای هر $n, m > N$, داریم $\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. اگر n_k انتخاب شده باشد، به‌طوری که $n_k > N$ و $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$، آنگاه نامساوی مثلثی نتیجه می‌دهد که هرگاه $n > N$:

$$\|f_n - f\| \leqslant \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon.$$

بنابراین $\{f_n\}$ دارای حد f در L^1 است. □

از آنجا که هر دنباله‌ای که در نرم همگرا باشد، با همان نرم یک دنباله کشی است، برهان قضیه به نتیجهٔ بعد منجر می‌شود.

نتیجه ۱۶.۲. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به f در L^1 همگرا باشد، آنگاه زیر دنباله $\{f_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد که

تقریبا برای هر x $\quad f_{n_k}(x) \to f(x)$.

می‌گوییم خانواده $\mathcal{G}$ از توابع انتگرالپذیر در L^1 چگال است، اگر برای هر $f \in L^1$ و $\varepsilon > 0$ و $g \in \mathcal{G}$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon$. خوشبختانه ما با خانواده‌هایی که در L^1 چگال هستند، آشناییم و برخی از آن‌ها را در قضیهٔ زیر توصیف می‌کنیم. این خانواده‌ها هنگام رویارویی با مشکل اثبات گزاره یا تساوی در مورد توابع انتگرالپذیر مفید هستند. دراین شرایط یک اصل کلی به کار می‌رود: اغلب راحت‌تر است نتیجه برای ردهٔ محدودتری از توابع ثابت شود (مثل توابعی در قضیهٔ زیر) و سپس بحث چگال بودن (یا حد گیری) به نتیجهٔ کلی در قضیه منجر می‌شود.

قضیه ۱۷.۲. خانواده‌های زیر از توابع در $L^1(\mathbb{R}^d)$ چگال هستند:

۱. توابع ساده.

۲. توابع پله‌ای.

۳. توابع پیوسته با محمل فشرده.

برهان. فرض می‌کنیم f تابع انتگرالپذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشد، ابتدا می‌توانیم فرض کنیم که f حقیقی مقدار است، زیرا می‌توانیم قسمت‌های حقیقی و موهومی‌اش را به طور مستقل تقریب بزنیم. در این حالت

می‌نویسیم $f = f^+ - f^-$ که در آن $f^+, f^- \geqslant 0$ و کافی است قضیه را برای $f \geqslant 0$ ثابت کنیم.

برای (۱) قضیهٔ ۳۶.۱ در فصل ۱ وجود دنباله $\{\varphi_k\}$ از توابع ساده‌ی نامنفی را که به‌طور نقطه‌ای به f صعود می‌کند، تضمین می‌کند. با استفاده از قضیهٔ همگرایی تسلطی (یا حتی ساده‌تر قضیهٔ همگرایی یکنوا) داریم

$$\|f - \varphi\|_{L^1} \to 0. \qquad \text{وقتی که } k \to \infty$$

بنابراین توابع ساده‌ای وجود دارند که به اندازهٔ دلخواه به f با نرم L^1 نزدیک هستند.

برای ۲ در ابتدا توجه می‌کنیم که بنابر ۱ کافی است توابع ساده را با توابع پله‌ای تقریب بزنیم. بنابراین یادآوری می‌کنیم که یک تابع ساده، یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخصه از مجموعه‌های با اندازهٔ متناهی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که اگر E یک مجموعه باشد، آنگاه تابع پله‌ای ψ وجود دارد، به‌طوری که $\|\chi_E - \psi\|_{L^1}$ کوچک است. اکنون یادآوری می‌کنیم که قبلا این بحث در اثبات قضیهٔ ۳۸.۱ فصل ۱، انجام شده است. در واقع نشان داده شده است که خانواده‌ی تقریبا مجزایی از مستطیل‌های $\{Rj\}$ با $m(E \triangle \bigcup_{j=1}^{M} R_j) \leqslant 2\varepsilon$ وجود دارد. بنابراین χ_Eو$\psi = \sum_j \chi_{R_j}$ حداکثر روی

یک مجموعه با اندازهٔ 2ε اختلاف دارند و در نتیجه $\|\chi_E - \psi\|_{L^1} < 2\varepsilon$.

بنابر (۲) برای اثبات (۳) کافی است حالتی که f تابع مشخصهٔ یک مستطیل است، را در نظر بگیریم. در حالت یک بعدی که f تابع مشخصه‌ی بازه $[a,b]$ است، تابع پیوسته قطعه قطعه خطی g را انتخاب می‌کنیم که به صورت

$$g(x) = \begin{cases} 1 & a \leqslant x \leqslant b \text{ اگر} \\ 0 & x \leqslant a - \varepsilon \text{ یا } x \geqslant b + \varepsilon \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌شود و g روی بازه‌های $[a-\varepsilon, a]$ و $[b, b+\varepsilon]$ خطی است. بنابراین $\|f - g\|_{L^1} < 2\varepsilon$. در ابعاد d، کافی است توجه کنیم که توابع مشخصه یک مستطیل، حاصلضرب توابع مشخصه بازه‌ها است. بنابراین تابع پیوسته‌ی مورد انتظار با محمل فشرده به سادگی حاصلضرب توابعی مثل g است که در بالا تعریف شده است. $\square$

نتایج بالا برای $L^1(\mathbb{R}^d)$ به سرعت به یک توسیع منجر می‌شود که در آن $\mathbb{R}^d$ می‌تواند با هر زیرمجموعهٔ ثابت E با اندازهٔ مثبت، جایگزین شود. در حقیقت اگر E یک زیر مجموعه باشد، می‌توانیم L^1 را تعریف کنیم و مباحثی که مشابه با $L^1(\mathbb{R}^d)$ هستند را ارائه دهیم.

بهتر از آن، می‌توانیم با توسیع هر تابع f روی E به‌وسیله قرار دادن $\tilde{f} = f$ روی E و $\tilde{f} = 0$ روی E^c و تعریف $\|\tilde{f}\|_{L^1(E)} = \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ ادامه دهیم. فرم مشابه قضیه ۱۴.۲ و قضیهٔ ۱۵.۲ برای فضای $L^1(E)$ نیز برقرار است.

خاصیت‌های پایایی

اگر f یک تابع تعریف شده روی $\mathbb{R}^d$ باشد، **انتقال** f به اندازهٔ بردار $h \in \mathbb{R}^d$، تابع f_h است و با $f_h(x) = f(x-h)$ تعریف می‌شود. در اینجا ما می‌خواهیم ویژگی‌های ابتدایی انتقال‌های توابع انتگرالپذیر را بررسی کنیم.

ابتدا تحت انتقال پایایی برای انتگرال وجود دارد. یک روش برای بیان این حالت به‌صورت زیر است. اگر f تابع انتگرالپذیر باشد، آنگاه f_h نیز چنین است و

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx. \qquad (۴.۲)$$

ابتدا این حکم را زمانی‌که $f = \chi_E$ ، تابع مشخصه مجموعهٔ اندازه‌پذیر E است، بررسی می‌کنیم. در این‌صورت به وضوح داریم $f_h = \chi_{E_h}$ که در آن $E_h = \{x+h : x \in E\}$ و بنابراین حکم برقرار است، زیرا

$m(E_h) = m(E)$ (بخش ۳.۱ فصل ۱ را ببینید). در نتیجهٔ خطی بودن، تساوی ۴.۲ برای همه توابع ساده برقرار است. اکنون اگر f نامنفی باشد و $\{\varphi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده باشد که تقریبا همه جا به طور نقطه‌ای به f صعود می‌کند (بنابر قضیهٔ ۳۶.۱ در فصل قبل چنین دنباله‌ای وجود دارد.) آنگاه $\{(\varphi_n)_h\}$ دنباله‌ای از توابع ساده است که تقریبا همه جا به طور نقطه‌ای به f_h صعود می‌کنند و قضیهٔ همگرایی یکنوا در این حالت به خصوص، (۴.۲) را نتیجه می‌دهد. بنابراین اگر f مختلط مقدار و انتگرالپذیر باشد، می‌بینیم $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$. و این نشان می‌دهد که $f_h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و نیز $\|f\| = \|f_h\|$. از تعاریف نتیجه می‌گیریم، هرگاه $f \in L^1$، ۴.۲ برقرار است.

اتفاقا با به کار بردن پایایی نسبی اندازهٔ لبگ تحت تجانس و انعکاس‌ها (قسمت ۳.۱ فصل ۱) می‌توان به همان روش ثابت کرد که اگر $f(x)$ انتگرالپذیر باشد آنگاه، $f(\delta x)$، $\delta > 0$ و $f(-x)$ نیز چنین هستند و

(۵.۲)
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx \quad \text{در حالی که} \quad \delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

گریزی می‌زنیم تا به دو نتیجهٔ کاربردی از خواص پایایی بالا را برای کاربرد بعدی اشاره کنیم:

۱. فرض کنید f و g یک جفت از توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشند، به‌طوری که به ازای عضو ثابت x از $\mathbb{R}^d$، تابع $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ انتگرالپذیر است.

به عنوان یک نتیجه، تابع $y \longmapsto f(y)g(x-y)$ نیز انتگرالپذیر است و داریم

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy. \tag{۶.۲}$$

این رابطه از ۴.۲ و ۵.۲ با تعویض متغیر y با $x-y$ و توجه به این نکته این تغییر ترکیبی از یک انتقال و یک بازتاب است، به‌دست می‌آید.

انتگرال سمت چپ با $(f*g)(x)$ مشخص و **پیچش** f و g نامیده می‌شود. بنابراین ۶.۲ بیان می‌کند که ضرب پیچشی جابجایی است.

۲. با به کار بردن ۵.۲ به ازای هر $\varepsilon > ۰$ داریم

(۷.۲)

وقتی که $a > d$ $\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d}\int_{|x|\geqslant ۱} \frac{dx}{|x|^a}$ ،

(۸.۲)

وقتی که $a < d$ $\int_{|x|\leqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d}\int_{|x|\leqslant ۱} \frac{dx}{|x|^a}$.

و نیز می‌توان دید که انتگرال‌های $\int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}$ و $\int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}$ (به ترتیب زمانی $a > d$ و $a < d$) بنابر بحثی که بعد از نتیجه ۱۰.۲ دیده می‌شود، متناهی هستند.

انتقال‌ها و پیوستگی

در این بخش بررسی می‌کنیم چطور خواص پیوستگی f به انتقال‌های f_h با تغییرات h، مربوط می‌شود. توجه کنید، به ازای هر $x \in \mathbb{R}^d$ عبارت $f_h(x) \to f(x)$ وقتی که $h \to 0$، همان مفهوم پیوستگی f در نقطه‌ی x است.

با وجود این ممکن است تابع دلخواه f که انتگرالپذیر است در هر x ناپیوسته باشد، حتی اگر روی یک مجموعه با اندازهٔ صفر اصلاح شود، تمرین ۱۵ را ببینید. با وجود این مفهومی از یک پیوستگی عمومی برای $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ موجود است که با تقریب در نرم رخ می‌دهد.

گزاره ۱۸.۲. فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. در این صورت

$$\|f_h - f\|_{L^1} \to 0 \qquad \text{وقتی که } h \to 0$$

یک نتیجهٔ ساده‌ی تقریب توابع انتگرالپذیر با توابع پیوسته با محمل فشرده است که در قضیهٔ ۱۷.۲ ارائه شده است. در حقیقت

به ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توانیم چنین تابع g را بیابیم که $\|f-g\| < \varepsilon$. اکنون

$$f_h - f = (g_h - g) + (f_h - g_h) - (f - g)$$

در این‌صورت $\|f_h - g_h\| = \|f-g\| < \varepsilon$، درحالی که چون g پیوسته است و محمل فشرده دارد به وضوح داریم

$$\|g_h - g\| = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-h) - g(x)| dx \to 0 \qquad \text{وقتی که } h \to 0$$

بنابراین اگر $|h| < \delta$، که در آن δ به اندازهٔ کافی کوچک است، آنگاه $\|g_h - g\| < \varepsilon$ و در نتیجه هنگامی‌که $|h| < \delta$، $\|f_h - f\| < 3\varepsilon$.

۳.۲ قضیهٔ فوبینی

در حسابان مقدماتی، انتگرال‌های توابع پیوسته‌ی چند متغیره، اغلب با انتگرال‌های یک بعدی محاسبه می‌شوند. ما اکنون این ابزار تحلیلی مهم را از دیدگاه اندازه لبگ در $\mathbb{R}^d$ امتحان می‌کنیم و قضایای جالبی را خواهیم دید.

به طور کلی $\mathbb{R}^d$ را به‌صورت حاصلضرب

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \qquad \text{که در آن} \qquad d_1, d_2 \geqslant 1, \qquad d = d_1 + d_2$$

می‌نویسیم.

یک نقطه در $\mathbb{R}^d$ فرم (x,y) را می‌گیرد که در آن $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ و $y \in \mathbb{R}^{d_2}$. با این تجزیه $\mathbb{R}^d$ در ذهن، مفهوم عمومی برش، که با ثابت نگه داشتن یک متغیر به دست می‌آید، طبیعی می‌شود. اگر f تابعی از $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ باشد، یک **برش** از f متناظر با $y \in \mathbb{R}^{d_1}$، **تابع** f^y **با متغیر** $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ است، که به صورت

$$f^y(x) = f(x,y),$$

داده می‌شود.

به طور مشابه برش f برای یک ثابت $x \in \mathbb{R}^{d_1}$، $f_x(y) = f(x,y)$ است.

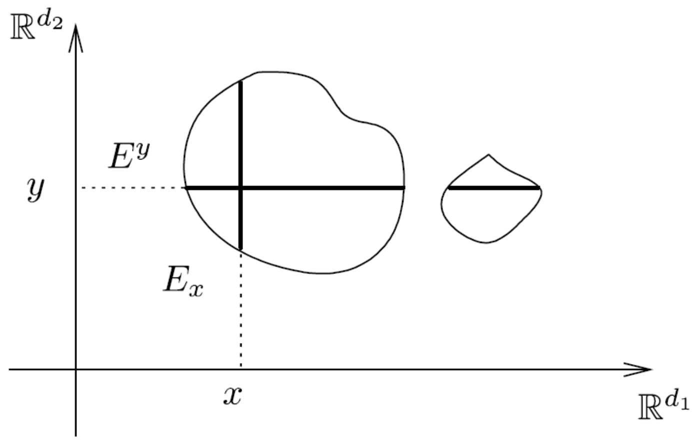
در این حالت برای مجموعهٔ $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$، **برش‌های** مربوطه را با

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\} \quad \text{و} \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x,y) \in E\}$$

تعریف می‌کنیم. تصویر ۱.۲ را ببینید.

۱.۳.۲ بیان و برهان قضیه

قضیه‌ای که در ادامه می‌آید، کاملا سر راست نیست. به وضوح اولین مشکل از فرمول‌بندی آن ناشی می‌شود که با اندازه‌پذیری



شکل ۱.۲: برش‌های E^y و E_x (برای ثابت x و y) از مجموعهٔ E

توابع و مجموعه‌های طرح شده در سوال درگیر است. در حقیقت حتی با فرض این که f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است، لزوما این درست نیست که به ازای هر y برش f^y، روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است و این حکم به شکل متناظر لزوما برای یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر برقرار نیست: برش E^y به ازای هر y اندازه‌پذیر نیست. یک مثال ساده در $\mathbb{R}^۲$ با جایگزینی مجموعه اندازه‌ناپذیر یک بعدی روی محور x به دست می‌آید. مجموعهٔ E در $\mathbb{R}^۲$، اندازه صفر دارد اگر چه E^y به ازای $y = ۰$ اندازه‌پذیر نیست. چیزی که ما را نجات می‌دهد، این است که اندازه‌پذیری تقریبا برای همه برش ها برقرار است.

قضیه اصلی در ادامه می آید. یادآوری می‌کنیم که بنابر تعریف،

همه توابع انتگرالپذیر، اندازه‌پذیرند.

قضیه ۱۹.۲. فرض کنید $f(x,y)$ روی $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ انتگرالپذیر است. آنگاه تقریبا به ازای هر $y \in \mathbb{R}^{d_2}$:

۱. برش f^y روی $\mathbb{R}^{d_1}$ انتگرالپذیر است.

۲. تابع تعریف شده به صورت $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx.$ روی $\mathbb{R}^{d_2}$ انتگرالپذیر است.

به‌علاوه :

۳. $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} (\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f$.

به وضوح قضیه نسبت به x و y متقارن است. بنابراین همچنین می‌توانیم نتیجه بگیریم که برش f_x تقریبا به ازای هر x ، روی $\mathbb{R}^{d_2}$ انتگرالپذیر است. به‌علاوه $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x(y)dy$ انتگرالپذیر است.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

به خصوص قضیه فوبینی بیان می کند که انتگرال f روی $\mathbb{R}^d$ می‌تواند با انتگرال‌های مکرر با ابعاد پایین‌تر محاسبه شود و این‌که این تکرارها می‌توانند با هر ترتیبی به کار گرفته شوند.

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

ابتدا توجه می‌کنیم که می‌توانیم فرض کنیم f حقیقی مقدار است، زیرا قضیه را می‌توان برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط مقدار به کار برد. برهان قضیه فوبینی که بعدتر ارائه می شود، شامل شش مرحله است. با این فرض شروع می کنیم که $\mathcal{F}$ مجموعه توابع انتگرالپذیر روی $\mathbb{R}^d$ را مشخص می‌کند که در هر سه نتیجهٔ قضیه صادق هستند و به سمت اثبات $L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{F}$ پیش می‌رویم.

نخست به نشان دادن این که $\mathcal{F}$ تحت اعمالی مثل ترکیبات خطی (مرحله۱) و حدود (مرحله ۲) بسته است، می پردازیم. سپس ساختن خانواده‌هایی از توابع در $\mathcal{F}$ را آغاز می‌کنیم. چون هر تابع انتگرالپذیر «حد» توابع ساده است و توابع ساده خودشان ترکیبات خطی مجموعه‌هایی با اندازه متناهی هستند، حالا هدفمان سریعا به اثبات این موضوع تبدیل می‌شود که هرگاه E زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ با اندازه متناهی باشد، χ_E به $\mathcal{F}$ متعلق است. برای دست یافتن به این هدف با مستطیل‌ها شروع می‌کنیم و با مجموعه‌هایی از نوع G_δ (مرحله ۳) و مجموعه‌های با اندازه صفر (مرحله ۴) کار می‌کنیم. سرانجام یک مبحث حدی نشان می‌دهد که همه توابع انتگرالپذیر در $\mathcal{F}$ هستند. این برهان قضیه فوبینی را کامل می‌کند.

مرحله ۱ : هر ترکیب خطی متناهی از توابع در $\mathcal{F}$، مجددا به $\mathcal{F}$ متعلق است.

در واقع، فرض می‌کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathcal{F}$. به ازای هر k مجموعهٔ $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ با اندازهٔ صفر وجود دارد به طوری که هرگاه $y \notin A_k$ ، f_k روی $\mathbb{R}^{d_1}$ انتگرالپذیر است. بنابراین، اگر $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ ، مجموعهٔ A اندازهٔ صفر دارد و در متمم A، y-برش متناظر با هر ترکیب خطی متناهی از f_k، اندازه‌پذیر و نیز انتگرالپذیر است. بنابر خطی بودن انتگرال، نتیجه می‌گیریم که هر ترکیب خطی از f_k ها به $\mathcal{F}$ متعلق است.

مرحله ۲ : فرض کنید $\{f_k\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر در $\mathcal{F}$ است، به‌طوری که $f_k \nearrow f$ یا $f_k \searrow f$ که در آن f (روی $\mathbb{R}^d$) انتگرالپذیر است. در این‌صورت $f \in \mathcal{F}$.

توجه می‌کنیم کافی است حالت دنبالهٔ صعودی را در نظر بگیریم، زیرا می‌توانیم در صورت لزوم، $-f_k$ را به جای f_k در نظر بگیریم. همچنین f_k را با $f_k - f_1$ جایگزین می‌کنیم و فرض می‌کنیم که f_k ها نامنفی هستند. اکنون ملاحظه می‌کنیم که یک کاربرد در قضیهٔ همگرایی یکنوا (نتیجه ؟؟) نتیجه می‌دهد که:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy. \qquad (۹.۲)$$

بنابر فرض، به ازای هر k ، مجموعهٔ $A_k \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ وجود دارد، به‌طوری که هرگاه $y \notin A_k$، f_k^y روی $\mathbb{R}^{d_1}$ انتگرالپذیر است. اگر $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$، آنگاه در $\mathbb{R}^{d_2}$، $m(A) = 0$ و اگر $y \notin A$، آنگاه روی $\mathbb{R}^{d_1}$، f_k^y به ازای هر k

انتگرالپذیر است و بنابر قضیه همگرایی یکنوا در می‌یابیم وقتی که k به بی‌نهایت میل می‌کند

$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)dx$ به حد $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx$ صعود می‌کند.

بنابر فرض هر $g_k(y)$ انتگرالپذیر است. بنابراین کاربرد دیگر قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)dy \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_y(x)dy \qquad k \to \infty \text{ هرگاه} \tag{۱۰.۲}$$

با فرض $f_k \in \mathcal{F}$، داریم

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)dxdy.$$

و با ترکیب این عبارت با (۹.۲) و (۱۰.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy.$$

از آنجا که f انتگرالپذیر است، انتگرال سمت راست متناهی است و این ثابت می‌کند که g انتگرالپذیر است. در نتیجه تقریبا به ازای هر y، $g(y) < \infty$، بنابراین f^y تقریبا به ازای هر y انتگرالپذیر است و

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy.$$

این ثابت می‌کند که $f \in \mathcal{F}$، همان طور که می‌خواستیم.

مرحله ۳ : تابع مشخصه هر مجموعهٔ E که یک G_δ و با اندازهٔ متناهی است، به $\mathcal{F}$ تعلق دارد.

با ترتیبی صعودی از کلی‌سازی در مراحل پیش می‌رویم:

الف. نخست فرض می‌کنیم که E مکعب باز کراندار در $\mathbb{R}^d$ باشد، به طوری که $E = Q_1 \times Q_2$ که در آن Q_1 و Q_2 به ترتیب مکعب‌های باز در $\mathbb{R}^{d_1}$ و $\mathbb{R}^{d_2}$ هستند. در این‌صورت به ازای هر y، تابع $\chi_E(x,y)$ نسبت به x اندازه‌پذیر و انتگرالپذیر است و

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)dx = \begin{cases} |Q_1| & \text{اگر } x \in Q_2 \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

در نتیجه $g = |Q_1|\chi_{Q_2}$ نیز اندازه‌پذیر و انتگرالپذیر است و

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy = |Q_1||Q_2|.$$

از آنجا که $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x,y)dxdy = |E||Q_1||Q_2|$ نتیجه می‌گیریم $\chi_E \in \mathcal{F}$.

ب. اکنون فرض کنید E زیر مجموعهٔ کرانداری از مرز یک مکعب بسته باشد. از آنجا که مرز یک مکعب کراندار در $\mathbb{R}^d$ اندازهٔ صفر دارد، داریم $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x,y)dxdy = 0$.

سپس، بعد از بررسی احتمالات متفاوت، توجه می‌کنیم تقریبا به ازای هر y برش E_y در $\mathbb{R}^d$ اندازهٔ صفر دارد، بنابراین اگر تقریبا به ازای هر y $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)dx$ داریم $g(y) = 0$. در نتیجه $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)dy = 0$ و بنابراین $\chi_E \in \mathcal{F}$.

ج. اکنون فرض کنید E اجتماع متناهی از مکعب‌های بسته با درون‌های مجزا باشد و $E = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$، در این‌صورت اگر $\tilde{Q}_k$ درون Q_k را مشخص کند، χ_E را به صورت یک ترکیب خطی از $\chi_{\tilde{Q}_k}$ و χ_{A_k} می‌نویسیم که در آن A_k به ازای $k = 1, ..., K$ یک زیر مجموعهٔ کراندار از مرز Q است. بنابر تحلیل قبلی‌مان می‌دانیم که χ_{Q_k} و χ_{A_k} به ازای هر k به $\mathcal{F}$ تعلق دارد و چون مرحله ۱ تضمین می‌کند که $\mathcal{F}$ تحت ترکیبات خطی متناهی بسته است، نتیجه می‌گیریم $\chi_E \in \mathcal{F}$.

د. حال ثابت می‌کنیم که اگر E باز و با اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه $\chi_E \in \mathcal{F}$ و این با گرفتن حد از حالت قبل به‌دست می‌آید. در واقع بنابر قضیه ۴.۱ در فصل ۱، E را به‌صورت اجتماع شمارایی از مکعب‌های بستهٔ تقریبا مجزا

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

می‌نویسیم. در نتیجه اگر قرار دهیم $f_k = \sum_{j=1}^{k} \chi_{Q_j}$، آنگاه توجه می‌کنیم که توابع f_k به $f = \chi_E$، صعود می‌کنند که انتگرالپذیر است، زیرا $m(E)$ متناهی است. بنابراین از مرحلهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم $f \in \mathcal{F}$.

۵. سرانجام اگر E یک مجموعهٔ G_δ با اندازهٔ متناهی باشد، آنگاه $\chi_E \in \mathcal{F}$. در واقع بنابر تعریف، مجموعه‌های باز $\tilde{\mathcal{O}}_1$،$\tilde{\mathcal{O}}_2$،$\cdots$ وجود دارند به‌طوری که

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{O}}_k.$$

چون E اندازهٔ متناهی دارد، مجموعهٔ باز $\tilde{\mathcal{O}}_0$ با اندازهٔ متناهی شامل E وجود دارد. اگر قرار دهیم

$$\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_0 \cap \bigcap_{j=1}^{k} \tilde{\mathcal{O}}_j,$$

آنگاه در می‌یابیم که یک دنباله‌ی نزولی از مجموعه‌های باز با اندازهٔ متناهی $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2 \supset \cdots$ و

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k,$$

وجود دارد.

بنابراین دنباله‌ی توابع $f_k = \chi_{\mathcal{O}_k}$ به $f = \chi_E$ نزول می‌کند و چون به ازای هر k بنابر (د)، $\chi_{\mathcal{O}_k} \in F$ بنابر مرحلهٔ ۲ نتیجه می‌گیریم χ_E به $\mathcal{F}$ تعلق دارد.

مرحله ۴ : اگر E اندازهٔ صفر داشته باشد، آنگاه χ_E به $\mathcal{F}$ تعلق دارد.

در واقع چون E اندازه‌پذیر است مجموعهٔ G ازنوع G_δ را با خاصیت $E \subset G$ و $m(G) = ۰$، انتخاب می‌کنیم. (نتیجه ۲۶.۱ از فصل ۱) چون $\chi_G \in \mathcal{F}$ (بنابر مرحلهٔ قبل) در می‌یابیم که

$$\int_{\mathbb{R}^{d_۲}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_۱}} \chi_G(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_G = ۰,$$

بنابراین

$$\text{تقریبا به ازای هر } y \qquad \int_{\mathbb{R}^{d_۱}} \chi_G(x,y) dx = ۰ .$$

در نتیجه برش G^y تقریبا به ازای هر y، اندازهٔ صفر دارد. ملاحظهٔ ساده $E^y \subset G^y$، نشان می‌دهد، E^y تقریبا به ازای هر y، اندازهٔ صفر دارد و تقریبا به ازای هر y، $\int_{\mathbb{R}^{d_۱}} \chi_E(x,y) dx = ۰$. بنابراین

$$\int_{\mathbb{R}^{d_۲}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_۱}} \chi_E(x,y) dx \right) dy = ۰ = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E,$$

همانطور که باید نشان داده می‌شد.

مرحله ۵: اگر E زیر مجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ با اندازه متناهی باشد، آنگاه χ_E به $\mathcal{F}$ تعلق دارد.

برای اثبات این حکم، ابتدا یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ای با اندازه متناهی G از نوع G_δ با $E \subset G$ و $m(G\backslash E) = ۰$ وجود دارد. از آنجا که

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G\backslash E},$$

و $\mathcal{F}$ تحت ترکیبات خطی بسته است، در می یابیم که $\chi_E \in \mathcal{F}$ همانطور که انتظار داشتیم.

مرحله ۶ : این مرحله نهایی است که شامل اثبات این می‌شود که اگر f انتگرالپذیر باشد، آنگاه $f \in \mathcal{F}$.

ابتدا توجه می‌کنیم که f تجزیه‌ای به صورت $f = f^+ - f^-$ دارد که هر دو f^+ و f^- نامنفی و انتگرالپذیر هستند. با توجه به مرحله ۱ می‌توانیم فرض کنیم که f خودش نامنفی است. با توجه به قضیه ۳۶.۱ فصل قبل دنباله $\{\varphi_k\}$ از توابع ساده وجود دارد، به‌طوری که به f صعود می کنند. چون هر φ_k یک ترکیب خطی متناهی از توابع مشخصه از مجموعه‌هایی با اندازه متناهی است، بنابر مرحله ۵ داریم $\varphi_k \in \mathcal{F}$، بنابراین بنابر مرحله۲ ، $f \in \mathcal{F}$.

۲.۳.۲ کابرد قضیه فوبینی

قضیه ۲۰.۲. فرض کنید $f(x,y)$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ باشد. در این صورت تقریبا به ازای هر $y\in\mathbb{R}^{d_2}$:

۱. برش f^y روی $\mathbb{R}^{d_1}$ اندازه‌پذیر است.

۲. تابع تعریف شده به صورت $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)dx$ روی $\mathbb{R}^{d_2}$ اندازه‌پذیر است.

به‌علاوه:

۳. به مفهوم اعداد حقیقی توسعه یافته

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dxdy.$$

در عمل، این قضیه اغلب در ترکیب با قضیه فوبینی استفاده می‌شود[1]. در واقع فرض می‌کنیم تابع اندازه‌پذیر f روی $\mathbb{R}^d$ داده شده و از ما خواسته شده $\int_{\mathbb{R}^d} f$ را محاسبه کنیم. برای تصدیق استفاده انتگرال مکرر، ابتدا این قضیه را برای $|f|$ به کارمی بریم. با استفاده

۱. قضیه ۲۳توسط تونلی فرمول بندی شده است. با این وجود ما به اختصار به آن، قضیه ۱۹.۲ و نتیجه ۲۱.۲ به عنوان قضیه فوبینی اشاره خواهیم کرد.

از آن آزادانه انتگرال‌های تابع نامنفی $|f|$ را محاسبه می‌کنیم (یا تقریب می‌زنیم). اگر این مقادیر متناهی باشند قضیه ۲۰.۲ تضمین می‌کند که f انتگرال‌پذیر است و $\int |f| < \infty$. بنابراین فرض قضیه فوبینی برقرار می‌شود و ما می‌توانیم از آن قضیه در محاسبه انتگرال f استفاده کنیم.

برهان. قضیه ۲۰.۲. برش‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & f(x,y) < k, |(x,y)| < k \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

هر f_k انتگرال‌پذیر است و بنابر قسمت (۱) در قضیه فوبینی مجموعه $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ با اندازه صفر وجود دارد به طوری که برش $f_k^y(x)$ به ازای هر $y \in E_k^c$ اندازه‌پذیر است. حال اگر قرار دهیم $E = \cup_k E_k$ در می‌یابیم که $f^y(x)$ به ازای هر $y \in E^c$ اندازه‌پذیر است. به‌علاوه $m(E) = 0$. چون $f_k^y \nearrow f^y$، قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌دهد که اگر $y \notin E$ آنگاه وقتی که $k \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)dx \nearrow \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx.$$

از طرف دیگر بنابر قضیه فوبینی، $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx$ به ازای هر $y \in E^c$ اندازه‌پذیر است. بنابراین $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx$ نیز چنین است. کاربرد

دیگری از قضیه همگرایی یکنوا، به ما می دهد که

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)dx\right)dy \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)dx\right)dy. \tag{۱۱.۲}$$

بنابر قسمت ۳ در قضیه فوبینی می‌دانیم که

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k. \tag{۱۲.۲}$$

کاربرد پایانی قضیه همگرایی یکنوا مستقیما برای f_k نیز این را به دست می‌دهد که

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k \to \int_{\mathbb{R}^d} f. \tag{۱۳.۲}$$

با ترکیب ۱۱.۲ و ۱۲.۲ و ۱۳.۲ برهان قضیه ۲۰.۲ کامل می‌شود. □

نتیجه ۲۱.۲. اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر در $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ باشد، آنگاه تقریبا به ازای هر $y\in\mathbb{R}^{d_2}$، برش

$$E^y = \{x\in\mathbb{R}^{d_1} \ : \ (x,y)\in E\}$$

زیر مجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^{d_1}$ است. به‌علاوه $m(E^y)$ یک تابع اندازه‌پذیر از y است و

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)dy.$$

این نتیجه‌ای آنی از قسمت اول قضیه ۲۰.۲ است، که برای تابع χ_E به کار می‌رود. به وضوح یک نتیجه متقارن برای برش‌های x در $\mathbb{R}^{d_2}$ برقرار است.

بنابراین، این گزاره اصلی را ثابت کرده‌ایم که اگر E روی $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه تقریبا به ازای هر $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ برش E^y در $\mathbb{R}^{d_1}$ اندازه‌پذیر است. همچنین عبارت متقارن با تغییر نقش‌های x و y نیز برقرار است. ممکن است کسی ترغیب شود تابررسی کند که آیا عکس این عبارت نیز برقرار است. برای دیدن این که این طور نیست، توجه می‌کنیم که اگر فرض کنیم $\mathcal{N}$ زیر مجموعه اندازه‌ناپذیر از $\mathbb{R}$ باشد و سپس تعریف کنیم

$$E = [0, 1] \times \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

می‌بینیم

$$E^y = \begin{cases} [0, 1] & y \in \mathcal{N} \text{ اگر} \\ \phi & y \notin \mathcal{N} \text{ اگر}. \end{cases}$$

بنابراین E^y به ازای هر y اندازه‌پذیر است. در این حالت اگر E اندازه‌پذیر باشد، آنگاه نتیجه می‌گیریم که $E^x = \{y \in \mathbb{R} \ : \ (x, y) \in E\}$ تقریبا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است که این درست نیست، زیرا E_x به ازای هر $x \in [0, 1]$ با $\mathcal{N}$ مساوی است.

یک مثال پرکاربرد این است که مجموعه E در مربع واحد

$$[0,1]\times[0,1]$$

اندازه‌پذیر نیست و هنوز برش‌های E^y و E_x با $m(E^y)=0$ و $m(E_x)=1$ به ازای هر $x,y\in[0,1]$، اندازه‌پذیر هستند. ساختار E بر اساس وجود یک ترتیب فوق متناقض، از اعداد حقیقی است، با این خاصیت که $\{x : x\propto y\}$ به ازای هر $y\in\mathbb{R}$ شمارا است. (ساختار این ترتیب در مسأله ۶ بحث شده است) به این ترتیب که اگر قرار دهیم

$$E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$$

توجه می‌کنیم به ازای هر $y\in[0,1]$، $E^y=\{x : x\propto y\}$، بنابراین E^y شمارا و $m(E^y)=0$ به طور مشابه $m(E_x)=1$ زیرا E_x متمم مجموعه قابل شمارش در $[0,1]$ است. اگر E اندازه‌پذیر باشد، آنگاه با فرمول نتیجه ۲۱.۲ متناقض است.

رابطه مجموعه E با برش های E_x و E^y، زمانی که $\mathbb{R}^d$ را به‌عنوان حاصلضرب $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ در نظر می گیریم، برای مجموعه‌های ابتدایی عملکرد سر راستی دارد. این مجموعه‌ها مجموعه‌های حاصلضرب $E=E_1\times E_2$، هستند که $E_j\subset\mathbb{R}^{d_j}$.

قضیه ۲۲.۲. اگر $E=E_1\times E_2$ زیرمجموعه اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ باشد و $m_*(E_2)>0$، آنگاه E_1 اندازه‌پذیر است.

برهان. بنابر نتیجه ۲۱.۲ می‌دانیم که تقریبا به ازای هر $y \in \mathbb{R}^{d_۲}$ تابع برش

$$(\chi_{E_۱ \times E_۲})^y(x) = \chi_{E_۱}(x)\chi_{E_۲}(y)$$

به‌عنوان تابعی از x اندازه‌پذیر است. در حقیقت ادعا می کنیم که $y \in E_۲$ وجود دارد که تابع برشی بالا در x اندازه‌پذیر است. برای چنین y، خواهیم داشت $\chi_{E_۱ \times E_۲}(x,y) = \chi_{E_۱}(x)$ و این به این معنی است که $E_۱$ اندازه‌پذیر است.

برای اثبات وجود یک y، از این فرض که $m_*(E_۲) > ۰$ استفاده می‌کنیم. در واقع فرض می‌کنیم F مجموعهٔ $y \in \mathbb{R}^{d_۲}$ هایی را مشخص می‌کند به طوری که برش E^y اندازه‌پذیر است. بنابراین (بنابر نتیجه قبل) $m(F^c) = ۰$. با این وجود $E_۲ \cap F$ تهی نیست، زیرا $m_*(E_۲ \cap F) > ۰$. برای فهمیدن این موضوع توجه می‌کنیم که $E_۲ = (E_۲ \cap F) \cup (E_۲ \cap F^c)$، بنابراین

$$۰ < m_*(E_۲) \leqslant m_*(E_۲ \cap F) + m_*(E_۲ \cap F^c) = m_*(E_۲ \cap F)$$

زیرا $E_۲ \cap F^c$ زیر مجموعهٔ مجموعه‌ای با اندازه صفر است. $\square$

برای اینکه عکس نتیجه بالا را مطالعه کنیم، به لم زیر نیازمندیم.

لم ۲۳.۲. اگر $E_۱ \subset \mathbb{R}^{d_۱}$ و $E_۲ \subset \mathbb{R}^{d_۲}$، آنگاه

$$m_*(E_1 \times E_2) \leqslant m_*(E_1) m_*(E_2).$$

با درک این مطلب که اگر یکی از مجموعه‌های E_j اندازه خارجی صفر داشته باشد، آنگاه $m_*(E_1 \times E_2) = 0$.

برهان. فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$، بنابر تعریف می‌توانیم مکعب‌های $\{Q_l\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathbb{R}^{d_1}$ و $\{\acute{Q}_k\}_{l=1}^{\infty}$ در $\mathbb{R}^{d_2}$ را بیابیم، به طوری که

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \qquad \text{و} \qquad E_2 \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \acute{Q}_l$$

و

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leqslant m_*(E_1) + \varepsilon \qquad \text{و} \qquad \sum_{l=1}^{\infty} |\acute{Q}_l| \leqslant m_*(E_2) + \varepsilon.$$

از آنجا که $E_1 \times E_2 \subset \bigcup_{k,l=1}^{\infty} Q_k \times \acute{Q}_l$ ، زیر جمعپذیری اندازه خارجی نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} m_*(E_1 \times E_2) &\leqslant \sum_{k,l=1}^{\infty} |Q_k \times \acute{Q}_l| \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} |\acute{Q}_l|\right) \\ &\leqslant (m_*(E_1)+\varepsilon)(m_*(E_2)+\varepsilon). \end{aligned}$$

اگر E_1 و یا E_2 اندازه خارجی صفر داشته باشند، آنگاه از عبارت فوق در می‌یابیم

$$m_*(E_1 \times E_2) \leqslant (m_*(E_1)(m_*(E_2) + O(\varepsilon),$$

چون ε دلخواه است، باید داشته باشیم $m_*(E_1 \times E_2) \leqslant m_*(E_1)m_*(E_2)$.

اگر به‌عنوان مثال $m_*(E_1) = 0$ باشد، برای هر عدد صحیح مثبت j مجموعهٔ

$$E_2^j = E_2 \cap \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : |y| \leqslant j\}$$

را در نظر بگیرید. بنابراین با توجه به بحث بالا در می‌یابیم که $m_*(E_1 \times E_2^j) = 0$. چون هنگامی که $j \to \infty$، $(E_1 \times E_2^j) \nearrow (E_1 \times E_2)$، نتیجه می‌گیریم $m_*(E_1 \times E_2) = 0$. $\square$

قضیه ۲۴.۲. فرض کنید E_1 و E_2 به ترتیب زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^{d_1}$ و $\mathbb{R}^{d_2}$ باشند. در این صورت $E = E_1 \times E_2$، زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ است. به‌علاوه

$$m(E) = m(E_1)m(E_2),$$

با این مفهوم که اگر یکی از مجموعه‌های E_j اندازه صفر داشته باشد، آنگاه $m(E) = 0$.

برهان. کافی است ثابت کنیم که E اندازه‌پذیر است. زیرا آنگاه حکم درباره $m(E)$، از نتیجه ۲۱.۲ به‌دست می‌آید. از آنجایی که هر مجموعه E_j اندازه‌پذیر است، مجموعه‌های $G_j \subset \mathbb{R}^{d_j}$ به ازای $j = ۱,۲$ از نوع G_δ و

$$G_j \supset E_j$$

و $m_*(G_j - E_j) = ۰$ وجود دارند(نتیجه ۲۶.۱ در فصل ۱ را ببینید.) به وضوح $G = G_۱ \times G_۲$ در $\mathbb{R}^{d_۱} \times \mathbb{R}^{d_۲}$، و

$$(G_۱ \times G_۲) - (E_۱ \times E_۲) \subset ((G_۱ \setminus E_۱) \times G_۲) \cup (G_۱ \times (G_۲ \setminus E_۲)),$$

اندازه‌پذیر است.

بنابر لم نتیجه می‌گیریم که $m_*(G \setminus E) = ۰$، بنابراین E اندازه‌پذیر است. □

با عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲۵.۲. فرض کنید f تابع اندازه‌پذیری روی $\mathbb{R}^{d_۱}$ است. آنگاه تابع $\tilde{f}$ تعریف شده به‌صورت $\tilde{f}(x,y) = f(x)$ روی $\mathbb{R}^{d_۱} \times \mathbb{R}^{d_۲}$ اندازه‌پذیر است.

برهان. برای دیدن این موضوع، می‌توان فرض کرد f حقیقی مقدار است. یادآوری می‌کنیم اگر $a \in \mathbb{R}$ و $E_۱ = \{x \in \mathbb{R}^{d_۱} \ : \ \tilde{f}(x,y) < a\}$،

آنگاه بنابر تعریف $E_۱$ اندازه‌پذیر است. از آنجا که

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d_۱} \times \mathbb{R}^{d_۲} \ : \ \tilde{f}(x,y) < a\} = E_۱ \times \mathbb{R}^{d_۲},$$

گزاره قبل نشان می‌دهد برای هر $a \in \mathbb{R}$، $\{\tilde{f}(x,y) < a\}$ اندازه‌پذیر است. بنابراین $\tilde{f}(x,y)$ یک تابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^{d_۱} \times \mathbb{R}^{d_۲}$ است. $\square$

سرانجام به تعبیری از انتگرال بر می‌گردیم که نخست در حسابان رشد کرد، ما این مفهوم را در خاطر داریم که $\int f$ ، سطح زیر نمودار f را توصیف می‌کند. در اینجا، این را به انتگرال لبگ ربط می‌دهیم و نشان می‌دهیم که چه طور به مفهوم عمومی‌تر توسیع می‌یابد.

نتیجه ۲۶.۲. فرض کنید $f(x)$ تابع نامنفی روی $\mathbb{R}^d$ باشد و قرار دهید

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : ۰ \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

در این صورت:

۱. f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر $\mathcal{A}$ در $\mathbb{R}^{d+۱}$ اندازه‌پذیر باشد.

۲. اگر شرایط (۱) برقرار باشد، آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = m(\mathcal{A}).$$

برهان. اگر f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه قضیه قبل تضمین می‌کند که تابع

$$F(x,y) = y - f(x)$$

روی $\mathbb{R}^{d+1}$ اندازه‌پذیر باشد، بنابراین بلافاصله در می‌یابیم $\mathcal{A} = \{y \geqslant 0\} \cap \{F \leqslant 0\}$ اندازه‌پذیر است.

برعکس، فرض کنید A اندازه‌پذیر باشد. توجه می‌کنیم که به ازای هر

$$x \in \mathbb{R}^{d_1}$$

برش $\mathcal{A}_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \mathcal{A}\}$ پاره خطی بسته است و برای مثال $\mathcal{A}_x = [0, f(x)]$. سرانجام، نتیجه ۲۱.۲ با تغییر نقش‌های x و y به اندازه‌پذیری $m(\mathcal{A}_x) = f(x)$ منجر می‌شود. به‌علاوه

$$m(\mathcal{A}) = \int \chi_A(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} m(\mathcal{A})_x dx = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x)dx.$$

□

این قسمت را با قضیه مفید زیر می‌بندیم.

قضیه ۲۷.۲. اگر f تابع اندازه‌پذیری روی $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه تابع

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$$

روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است.

با برداشتن $E = \{z \in \mathbb{R}^d : f(z) < a\}$، می‌بینیم کافی است ثابت کنیم که هرگاه E زیرمجموعه اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه

$$\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\}$$

، زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ است.

ابتدا توجه کنید اگر $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز باشد، آنگاه $\tilde{\mathcal{O}}$ نیز باز است. اشتراک‌های شمارا نشان می‌دهد، اگر E، مجموعهٔ G_δ باشد، آنگاه $\tilde{E}$ نیز چنین است. اکنون فرض کنید به ازای هر k، $m(\tilde{E}_k) = 0$، که در آن $\tilde{E}_k = \tilde{E} \cap B_k$ و $B_k = \{|y| < k\}$. یک بار دیگر، $\mathcal{O}$ را در $\mathbb{R}^d$ باز در نظر می‌گیریم. حال بیایید $m(\tilde{\mathcal{O}} \cap B_k)$ را محاسبه کنیم. داریم $\chi_{\tilde{\mathcal{O}} \cap B_k} = \chi_{\mathcal{O}}(x - y)\chi_{B_k}(y)$. بنابراین تحت انتقال پایایی اندازه

$$\begin{aligned} m(\tilde{\mathcal{O}} \cap B_k) &= \int \chi_{\mathcal{O}}(x - y)\chi_{B_k}(y) dy dx \\ &= \int \left(\int \chi_{\mathcal{O}}(x - y) dx \right) \chi_{B_k}(y) dy \\ &= m(\mathcal{O}) m(B_k). \end{aligned}$$

اکنون اگر $m(E) = 0$ ، دنباله‌ای از مجموعه‌های باز $\mathcal{O}_n$ وجود دارد به طوری که $E \subset \mathcal{O}_n$ و $m(\mathcal{O}) \to 0$. از عبارت بالا به دست می‌آید که $\tilde{E}_k \subset \tilde{\mathcal{O}}_n \cap B_k$ و روی n به ازای هر k ثابت، $m(\tilde{\mathcal{O}}_n \cap B_k) \to 0$. این نشان می دهد که $m(\tilde{E}_k) = 0$ و بنابراین $m(\tilde{E}) = 0$. برهان قضیه

زمانی نتیجه‌گیری می‌شود که ما یادآوری کنیم هر مجموعه اندازه‌پذیر E می‌تواند به صورت تفاضل یک G_δ و یک مجموعه با اندازه صفر نوشته شود.

۴.۲ فرمول معکوس فوریه*

مسأله معکوس فوریه حاوی مسأله‌ای در مبنای آنالیز فوریه است. این موضوع در گرو بررسی صحت فرمول معکوس برای تابع f بر حسب تبدیل فوریه $\hat{f}$ است، به این معنا که

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \tag{۱۴.۲}$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi. \tag{۱۵.۲}$$

که ما قبلا با این مسأله در جلد ۱ در حالت ابتدایی مواجه شدیم، زمانی که هر دو تابع f و $\hat{f}$ پیوسته بودند و به سرعت و یا به طور متوسط در بی‌نهایت کاهش می‌یافتند. در جلد ۲، نیز از دیدگاه آنالیز مختلط، همین سؤال را در حالت یک بعدی در نظر گرفتیم. زیباترین و مفیدترین فرمول‌های فوریه معکوس در مفاهیم نظریه L^2 موجود هستند، یا به کلی‌ترین صورت به زبان توزیع‌ها بیان شوند.

به این مفاهیم به صورت سیستمی جدا خواهیم پرداخت[1]. اگرچه در این مرحله این مفاهیم را تعریف می‌کنیم تا ببینیم دانش ما در این مرحله در این باره چه به ما می آموزد. ما تمایل داریم تا این کار را با ارائه نمودن فرمول‌های متنوع معکوس مناسب برای L^1 انجام دهیم که در جمیع حالت‌ها هم ساده و هم مناسب باشد.

برای شروع، نیاز به این ایده داریم که در مورد تبدیل فوریه یا یک تابع دلخواه در $L^1(\mathbb{R}^d)$ چه می‌توان گفت.

گزاره ۲۸.۲. فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R})$. آنگاه $\hat{f}$ که با **۱۴.۲** تعریف شده روی $\mathbb{R}^d$ پیوسته و کراندار است.

در حقیقت چون $|f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}| = |f(x)|$، نمایش انتگرال $\hat{f}$ برای هر ξ همگراست و $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \|f\|$. برای بررسی پیوستگی، توجه کنید برای هر x هنگامی که $\xi \to \xi_0$،

$$f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} \to f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi_0}$$

. که در آن ξ_0 نقطه‌ای در $\mathbb{R}^d$ است. بنابراین بنابر قضیه تسلطی لبگ $\hat{f}(\xi) \to \hat{f}(\xi_0)$.

۱. نظریه‌ی L^2 با فصل ۵ در ارتباط است و در جلد ۴ مطالعه خواهد شد.

می توان کمی بیش از کرانداری $\hat{f}$ را بیان کرد، به‌عنوان مثال، زمانی که $|\xi| \to \infty$، $\hat{f}(\xi) \to 0$ اگر چه در مورد کاهش یافتن $\hat{f}$ در بی نهایت، چیزی نمی‌توان گفت (تمرین ۲۲ و ۲۵ را ببنید.) در نتیجه برای تابع دلخواه $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$، تابع $\hat{f}$ در $L^1(\mathbb{R}^d)$ نیست و فرمول فرضی (۱۵.۲) مساله دار است. قضیه زیر این مشکل را رفع می کند و در بسیاری از مواقع نیز مفید است.

گزاره ۲۹.۲. فرض کنید $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و نیز فرض کنید $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$، در این صورت فرمول معکوس (۱۵.۲) تقریبا به ازای هر x بر قرار است.

منحصر به فرد بودن تبدیل فوریه روی L^1 یک نتیجه بلافاصله است.

نتیجه ۳۰.۲. فرض کنید به ازای هر ξ، $\hat{f}(\xi) = 0$، آنگاه تقریبا همه جا $f = 0$.

برهان قضیه تنها نیازمند این است که بحث‌های اولیه‌ای را که برای توابع شوارتس در فصل ۵ جلد ۱ آمده است با مبحث فعلی تطبیق دهیم. با «فرمول ضرب» شروع می‌کنیم.

لم ۳۱.۲. فرض کنید f و g به $L^1(\mathbb{R}^d)$ تعلق دارند. در این صورت

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\hat{g}(y)dy.$$

توجه کنید با توجه به گزاره بالا هر دو انتگرال همگرایند. تابع $F(\xi,y) = g(\xi)f(y)e^{-2\pi i\xi\cdot y}$ را برای $(\xi,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$ در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۲۵.۲، F به‌عنوان یک تابع روی $\mathbb{R}^{2d}$ اندازه‌پذیر است. اکنون قضیه فوبینی را به‌کار می بریم و در مرحله اول می‌بینیم

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|F(\xi,y)|d\xi dy = \int_{\mathbb{R}^d}|g(\xi)|d\xi\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|dy < \infty,$$

و بعد اگر $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}F(\xi,y)d\xi dy$ را با نوشتن به صورت $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}F(\xi,y)d\xi\right)dy$ محاسبه کنیم، به تساوی سمت چپ می‌رسیم. محاسبه انتگرال دوگانه با ترتیب بر عکس، طرف راست را به دست می‌دهد و لم ثابت می‌شود.

سپس تابع گاوسین نرمال شده $g(\xi)e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi ix\cdot\xi}$ را در نظر می‌گیریم که در آن δ و x ثابت هستند، $\delta > 0$ و $x \in \mathbb{R}^d$. یک محاسبه ساده نتیجه می‌دهد [1]

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}d\xi = \delta^{\frac{-d}{2}}e^{\frac{-\pi|x-y|^2}{\delta}},$$

که به‌صورت $K_\delta(x-y)$ خلاصه می‌کنیم. K_δ را «هستهٔ خوب»

---

۱. برای مثال فصل ۶ جلد ۱ را ببینید.

می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر را برقرار کند:

۱. $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)dy = 1$

۲. به ازای هر $\eta > 0$، وقتی $\delta \to 0$، $\int_{|y|>\eta} K_\delta(y)dy$.

با استفاده از لم داریم که

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{2\pi ix.\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)K_\delta(x-y)dy. \qquad (۱۶.۲)$$

توجه کنید چون $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$، قضیه همگرایی تسلطی نشان می‌دهد، هنگامی‌که $\delta \to 0$، به ازای هر x طرف چپ ۱۶.۲ به $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix.\xi}d\xi$ همگرا است. برای طرف چپ دو تغییر متوالی از متغیرهای

$$y \to y + x$$

(یک انتقال) و

$$y \to -y$$

(یک بازتاب) را انجام می‌دهیم و پایایی انتگرال‌ها (معادلات ۴.۲ و ۵.۲ را ببینید.) را لحاظ می‌کنیم. بنابراین طرف راست با $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy$ برابر می‌شود و ثابت می‌کنیم که این تابع زمانی که $\delta \to 0$ با نرم L^1 به f همگراست.

در واقع از خاصیت ۱ عبارت بالا، می‌توانیم تفاضل را به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))K_\delta(y)dy.$$

بنابراین

$$|\Delta_\delta(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|K_\delta(y)dy.$$

اکنون می‌توانیم قضیهٔ فوبینی را به کار ببریم. یادآوری می‌کنیم که اندازه‌پذیری $f(x)$ و $f(x-y)$ روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ به کمک نتیجه ۲۵.۲ و گزاره ۲۷.۲ اثبات می‌شود. نتیجه این است که

$$\|\Delta_\delta\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \|f(y) - f(x)\|K_\delta(y)dy,$$

آن در که $f_y(x) = f(x-y)$

اکنون، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده (بنابر گزاره ۱۸.۲) می‌توان $\eta > 0$ به اندازه‌ای کوچک یافت، به‌طوری که هرگاه $|y| < \eta$، آنگاه $\|f_y - f\| < \varepsilon$. بنابراین

$$\|\Delta_\delta\| \leqslant \varepsilon + \int_{|y|>\eta} \|f_y - f\|K_\delta(y)dy \leqslant \varepsilon + 2\|f\| \int_{|y|>\eta} K_\delta(y)dy.$$

نامساوی اول با به کار بردن دوباره ۱ به‌دست می‌آید. دومی

برقرار است، زیرا

$$\|f_y - f\| \leqslant \|f_y\| + \|f\| = 2\|f\|.$$

بنابراین با به کار بردن ۲، ترکیب بالا نابیشتر از 2ε است، اگر δ به اندازهٔ کافی کوچک باشد. به طور خلاصه: زمانی که $\delta \to 0$ طرف راست (۱۶.۲) در نرم L^1 به f همگراست و بنابراین با توجه به نتیجه ۱۶.۲ زیر دنباله‌ای وجود دارد، به طوری که تقریبا همه جا به $f(x)$ همگراست و قضیه ثابت می‌شود.

توجه کنید نتیجه بلافاصله قضیه و گزاره این است که اگر $\hat{f}$ در L^1 باشد، آنگاه f می تواند روی مجموعه‌ای با اندازه صفر اصلاح شود، تا همه جا پیوسته باشد. البته این حکم به ازای هر $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ دلخواه، غیر ممکن است.

۵.۲ تمرین‌ها

۱. گردایه‌ای از مجموعه‌های $F_1, \cdots, F_n$ داده شده است. گردایهٔ $F_1^*, \cdots, F_N^*$ را با $N = 2^n - 1$ بسازید، به‌طوری که

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \bigcup_{j=1}^{N} F_j^*$$

، گردایه $\{F_j^*\}$ مجزا است و نیز به ازای هر k،

$$F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$$

.

راهنمایی: 2^n مجموعه $\acute{F}_1 \cap \acute{F}_2 \cap \cdots \cap \acute{F}_n$ را درنظر بگیرید، که در آن هر $\acute{F}_k$، مجموعه F_k یا F_k^c است.

۲. مشابه با قضیه ۱۸.۲، ثابت کنید اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشد و $\delta > 0$، آنگاه هنگامی که $\delta \to 1$، $f(\delta x)$ به $f(x)$ در نرم L^1 همگراست.

۳. فرض کنید f روی $[-\pi, \pi)$ انتگرالپذیر است و با متناوب ساختن آن با دوره‌ی 2π به $\mathbb{R}$ توسیع می‌یابد. نشان دهید

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_I f(x)dx$$

که در آن I هر بازه با طول 2π در $\mathbb{R}$ است.

راهنمایی: I مشمول در دو بازه‌ی متوالی به شکل $(k\pi, (k+2)\pi)$ است.

۴. فرض کنید f روی $[0,b]$ انتگرالپذیر است و

برای هر $0 < x \leqslant b$ $\quad g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt$

ثابت کنید g روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است و

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt.$$

۵. فرض کنید F مجموعهٔ بسته‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. که متمم آن، اندازه متناهی دارد و همچنین فرض کنید $\delta(x)$، فاصله‌ی x تا F را مشخص می‌کند، به این معنا که

$$\delta(x) = d(x,F) = inf\{|x-y| : y \in F\}$$

فرض کنید

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} dy.$$

(آ) با نشان دادن اینکه δ در شرط لیپ شیتس،

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leqslant |x-y|$$

صدق می‌کند، ثابت کنید δ پیوسته است.

(ب) نشان دهید به ازای هر $x \notin F$، $I(x) = \infty$.

(ج) نشان دهید تقریبا همه جا روی F، $I(x) < \infty$. با توجه به این حقیقت که شرط لیپ شیتس فقط یک توان از $|x-y|$ را در انتگرالده I حذف می‌کند، نتیجه حاصل شگفت انگیز است.

راهنمایی: برای قسمت قبل، $\int_F I(x)dx$ را بررسی کنید.

۶. انتگراپذیری f روی $\mathbb{R}$ زمانی که $x \to \infty$، لزوما به معنی همگرایی $f(x)$ به صفر نیست.

(آ) تابع مثبت پیوسته‌ی f روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که f روی $\mathbb{R}$ انتگرالپذیر است، اگرچه $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(ب) با این وجود، اگر فرض کنیم f روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت و انتگرالپذیر است، آنگاه $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = ۰$.

راهنمایی: برای (آ)، فرم پیوسته‌ای از یک تابع را بسازید که برای n که $n \geqslant ۱$ روی قطعه خط $\left[n, \frac{n+۱}{n^۳}\right]$ مساوی n است.

۷. فرض کنید $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$ و فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر است. نشان دهید Γ زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^{d+۱}$ است و $m(\Gamma) = ۰$.

۸. اگر f روی $\mathbb{R}$، انتگرالپذیر باشد، نشان دهید $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$، پیوسته‌ی یکنواخت است.

۹. **نامساوی چبیچف.** فرض کنید $f \geqslant 0$ و f انتگرالپذیر است. اگر $\alpha > 0$ و $E_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$، ثابت کنید

$$m(E_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int f.$$

۱۰. فرض کنید $f \geqslant 0$ و همچنین فرض کنید $E_{2^k} = \{x : f(x) > 2^k\}$ و $F_k = \{x : 2^k < f(x) \leqslant 2^{k+1}\}$. اگر f تقریبا همه جا متناهی باشد، آنگاه

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k = \{f(x) > 0\},$$

و مجموعه‌های F_k مجزا هستند.
ثابت کنید f انتگرالپذیر است، اگر و فقط اگر

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_{2^k}) < \infty$ اگر و فقط اگر $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(F_k) < \infty$.

با استفاده از این نتیجه، درستی نتایج زیر را بررسی کنید. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & \text{اگر } |x| \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases}.$$

و

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-b} & \text{اگر } |x| > ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

آنگاه f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $a < d$ و نیز g روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است، اگر و فقط اگر $b > d$.

۱۱. ثابت کنید اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر و حقیقی مقدار باشد و به ازای هر مجموعه اندازه‌پذیر E، داشته باشیم $\int_E f(x)dx \geqslant ۰$، آنگاه تقریبا به ازای هر x، داریم $f(x) \geqslant ۰$. در نتیجه اگر برای هر مجموعه اندازه‌پذیر E، $\int_E f(x)dx = ۰$ آنگاه تقریبا همه جا، $f(x) = ۰$.

۱۲. نشان دهید $f \in L^۱(\mathbb{R}^d)$ و دنباله $\{f_n\}$ با شرط $f_n \in L^۱(\mathbb{R}^d)$ وجود دارند، به طوری که

$$\|f - f_n\|_{L^۱} \to ۰,$$

اما به ازای هر x، $f_n(x) \nrightarrow f(x)$.

راهنمایی: در $\mathbb{R}$، فرض کنید $f_n = \chi_{I_n}$، که در آن I_n دنباله‌ی مناسبی است از بازه‌ها که با شرط $m(I_n) \to 0$ انتخاب شده است.

۱۳. مثالی از دو مجموعۀ اندازه‌پذیر A و B ارائه دهید، به طوری که $A+B$ اندازه‌پذیر نباشد.

راهنمایی: در $\mathbb{R}^2$، $A = \{0\} \times [0,1]$ و $B = \mathcal{N} \times \{0\}$ بگیرید.

۱۴. در تمرین ۶ از فصل قبل دیدیم $m(B) = v_d r^d$، که در آن B گویی با شعاع r در $\mathbb{R}^d$ و $v_d = m(B_1)$ و B_1 گوی واحد است. در این قسمت ثابت v_d را تقریب می‌زنیم.

(آ) برای $d = 2$، با به کار بردن نتیجه ۲۶.۲ ثابت کنید

$$v_2 = 2 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

و بنابراین، بنابر محاسبه ابتدایی داریم $v_2 = \pi$.

(ب) با روش‌های مشابه نشان دهید

$$v_d = 2 v_{d-1} \int_{0}^{1} (1 - x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx.$$

(ج) نتیجه این است که

$$v_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

استنتاج دیگری در تمرین ۵ فصل ۶ است. گزاره‌های مربوط به توابع گاما و بتا می تواند در فصل ۶ جلد ۲ یافت شود.

۱۵. تابع تعریف شده روی $\mathbb{R}$ را با

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{2}} & 0 < x < 1 \quad \text{اگر} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases}$$

در نظر بگیرید با یک شماره‌گذاری ثابت $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد گویای $\mathbb{Q}$، فرض کنید

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n).$$

ثابت کنید F انتگرالپذیر است، بنابراین سری که F را تعریف می‌کند، تقریبا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست. ملاحظه می‌کنیم که این سری روی هر بازه، بیکران است و در حقیقت هر تابع $\tilde{F}$ که با F تقریبا همه‌جا مساوی است، در هر بازه‌ای بیکران است.

۱۶. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است. اگر $\delta = (\delta_1, ..., \delta_d)$ یک d- تایی از اعداد حقیقی ناصفر باشد و

$$f^{\delta}(x) = f(\delta x) = f(\delta_1 x_1, ..., \delta_d x_d),$$

نشان دهید که f^{δ} انتگرالپذیر است و

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^{\delta}(x)dx = |\delta_1|^{-1} \cdots |\delta_d|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

۱۷. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است: اگر $n \leqslant x < n+1$ و $n \leqslant y < n+1$ ($n \geqslant 0$)، آنگاه $f(x,y) = a_n$؛ اگر $n \leqslant x < n+1$ و $n+1 \leqslant y < n+2$ ($n \geqslant 0$)، آنگاه $f(x,y) = -a_n$؛ در حالی‌که در سایر نقاط $f(x,y) = 0$. دراینجا $a_n = \sum_{k \leqslant n} b_k$ و $\{b_k\}$ یک دنباله مثبت است به طوری که $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = s < \infty$.

(آ) ثابت کنید هر برش f^y و f_x انتگرالپذیر است و همچنین به ازای هر x، $\int f_x(y)dy = 0$ و بنابراین $\int(\int f(x,y)dy)dx = 0$.

(ب) با این وجود $\int f^y(x)dx = a_0$ اگر $0 \leqslant y < 1$ و به ازای $n \geqslant 1$، $\int f^y(x)dx = a_n - a_{n-1}$ اگر $n \leqslant y < n+1$. بنابراین تابع $y \longmapsto \int f^y(x)dx$ روی $(0, \infty)$ انتگرالپذیر است و

$$\int (\int f(x,y)dy)dx = s.$$

(ج) توجه کنید $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x,y)|dxdy = \infty$.

۱۸. فرض کنید f تابع متناهی مقدار اندازه‌پذیر روی $[0,1]$ باشد و فرض کنید $|f(x)-f(y)|$ روی $[0,1]\times[0,1]$ انتگرالپذیر است. نشان دهید $f(x)$ روی $[0,1]$ انتگرالپذیر است.

۱۹. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است. به ازای هر $\alpha > 0$ فرض کنید

$$E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$$

. ثابت کنید

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \int_0^\infty m(E_\alpha)d\alpha.$$

۲۰. این مسأله (در روند قضیه فوبینی برجسته می‌شود) که برش‌های خاصی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌تواند اندازه‌ناپذیر باشد، ممکن است با معطوف کردن توجه مان به توابع اندازه‌پذیر برل و مجموعه‌های برل رد شود. در حقیقت مفاهیم زیر را ثابت کنید:

فرض کنید E مجموعه برل در $\mathbb{R}^2$ است. آنگاه برای هر y برش E^y مجموعه برلی در $\mathbb{R}$ است.

راهنمایی: گردایهٔ $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های E از $\mathbb{R}^۲$ را با این ویژگی که هر برش E^y یک مجموعهٔ برل در $\mathbb{R}$ است. در نظر بگیرید ثابت کنید $\mathcal{C}$ یک σ-جبر است که شامل مجموعه‌های باز است.

۲۱. فرض کنید f و g توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشند.

(آ) ثابت کنید $f(x-y)g(y)$ روی $\mathbb{R}^{۲d}$ اندازه‌پذیر است.

(ب) نشان دهید اگر f و g روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشند، آنگاه $f(x-y)g(y)$ روی $\mathbb{R}^{۲d}$ انتگرالپذیر است.

(ج) تعریف پیچش f و g را که با

$$(f*g)(y)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

داده شده است، به خاطر بیاورید.
نشان دهید $f*g$ تقریبا برای هر x خوش‌تعریف است (به این معنا که $f(x-y)g(y)$ تقریبا به ازای هر x روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است.)

(د) نشان دهید $f*g$ انتگرالپذیر است، هرگاه f و g انتگرالپذیر باشند و

$$\|f*g\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)},$$

و هرگاه f و g نامنفی باشند، تساوی برقرار است.

(ه) تبدیل فوریه تابع انتگرالپذیر f با

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-۲\pi i x\cdot\xi} dx,$$

تعریف می‌شود. بررسی کنید که $\hat{f}$ کراندار و تابع پیوسته‌ای از ξ است. ثابت کنید به ازای هر ξ داریم

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

۲۲. ثابت کنید اگر $f \in L^۱(\mathbb{R}^d)$ و

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-۲\pi i x\cdot\xi} dx,$$

آنگاه زمانی‌که $|\xi| \to \infty$، $\hat{f}(\xi) \to ۰$. (این لم **ریمان- لبگ** است.)

راهنمایی: بنویسید $\hat{f}(\xi) = \frac{۱}{۲}\int_{\mathbb{R}^d}[f(x) - f(x - \acute{\xi})]e^{-۲\pi i x\cdot\xi}dx$ که در آن $\acute{\xi} = \frac{۱}{۲}\frac{\xi}{|\xi|^۲}$ و گزاره ۱۸.۲ را به‌کارببرید.

۲۳. به عنوان کاربردی از تبدیل فوریه نشان دهید، تابع $I \in L^۱(\mathbb{R}^d)$ وجود ندارد، به طوری که

به ازای هر $f \in L^۱(\mathbb{R}^d)$، $\qquad f * I = f$.

۲۴. پیچش

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

را در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید $f*g$ به طور یکنواخت پیوسته است، هرگاه f انتگرالپذیر و g کراندار باشد.

(ب) به‌علاوه اگر g انتگرالپذیر باشد ثابت کنید، هرگاه $|x|\to\infty$، $(f*g)(x)\to 0$.

۲۵. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon > 0$ تابع $F(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}$، تبدیل فوریه‌ی یک تابع در L^1 است.

راهنمایی: با $K_\delta(x) = e^{\frac{-\pi|x|^2}{\delta}}\delta^{\frac{-d}{2}}$، تابع $f(x) = \int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta$ را در نظر بگیرید. قضیهٔ فوبینی را به کار ببرید تا ثابت کنید $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-\pi\delta}\delta^{\varepsilon-1}d\delta,$$

و انتگرال آخر را به صورت $\pi^{-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\varepsilon}$ تقریب بزنید. در اینجا $\Gamma(s)$ تابع گاما است که به صورت $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$ تعریف می‌شود.

۶.۲ مسائل

۱. اگر f روی $[\circ, ۲\pi]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه زمانی‌که $|n| \to \infty$، $\int_\circ^{۲\pi} f(x)e^{-inx}dx \to \circ$. به عنوان نتیجه نشان دهید اگر E زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیری از $[\circ, ۲\pi]$ باشد، آنگاه برای هر دنباله $\{u_n\}$، داریم:

$$\int_E \cos^۲(nx+u_n)dx \to \frac{m(E)}{۲} \qquad n \to \infty \text{ وقتی که }$$

راهنمایی: تمرین ۲۲ را ببینید.

۲. قضیهٔ کانتور- لبگ را ثابت کنید: اگر

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

برای وقتی‌که x در یک مجموعه با اندازهٔ مثبت است همگرا باشد (یا به‌خصوص به ازای تمام x ها) آنگاه هرگاه $n \to \infty$، داریم $a_n \to \circ$ و $b_n \to \circ$.

راهنمایی: توجه کنید $A_n(x) \to \circ$ به طور یکنواخت روی مجموعهٔ E با اندازه مثبت.

۳. دنباله $\{f_k\}$ از توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d$ کشی در اندازه نامیده

می‌شود، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$

زمانی که $k,l \to \infty$ $\quad m(\{x : |f_k(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}) \to 0$

می‌گوییم $\{f_k\}$ همگرای در اندازه به تابع (اندازه‌پذیر) f است، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$

زمانی که $k \to \infty$ $\quad m(\{x : |f_k(x) - f(x)| > \xi\}) \to 0$

این نکته با ”همگرایی در احتمال“ در نظریهٔ احتمال منطبق است.

ثابت کنید اگر دنباله $\{f_k\}$ از توابع انتگرالپذیر به f در L^1 همگرا باشد، آنگاه $\{f_k\}$ به f همگرای در اندازه است. آیا عکس این مطلب درست است؟

توجه می کنیم که این روش همگرایی به طور طبیعی در برهان قضیهٔ ایگوروف ظاهر می‌شود.

۴. ما قبلا دیده‌ایم که (در تمرین ۸ ، فصل ۱) اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر در $\mathbb{R}^d$ باشد و L تبدیل خطی از $\mathbb{R}^d$ به $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه $L(E)$ نیز اندازه‌پذیر است و اگر E اندازه صفر داشته باشد، آنگاه $L(E)$ نیز چنین است. گزاره کمی به صورت زیر است،

$$m(L(E)) = |det(L)|m(E).$$

به عنوان یک حالت ویژه توجه کنید که اندازه لبگ تحت دوران‌ها پایا است. (برای این حالت ویژه تمرین ۲۶ در فصل بعد را ببینید.)

تساوی بالا با به‌کار بردن قضیهٔ فوبینی ثابت می‌شود.

(آ) در حالت اول $d = ۲$ و L یک تبدیل بالا مثلثی «اکید» $x' = x + ay$ و $y' = y$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\chi_{L(E)}(x, y) = \chi_E(L^{-۱}(x, y)) = \chi_E(x - ay, y).$$

بنابراین بنابر تحت انتقال پایایی اندازه

$$\begin{aligned} m(L(E)) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Big(\int \chi_E(x - ay, y) \Big) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Big(\int \chi_E(x, y) \Big) dy \\ &= m(E). \end{aligned}$$

(ب) به طور مشابه $m(L(E)) = m(E)$ اگر L پایین مثلثی «اکید» باشد. به‌طور کلی می‌توانیم بنویسیم $L = L_۱ \triangle L_۲$ که در آن L_j (بالا و پایین) مثلثی اکید هستند و $\triangle$ قطری است. بنابراین، اگر تمرین ۷ را در فصل ۱ به‌کار ببرید،

$$m(L(E)) = |\det(l)| m(E)$$

.

۵. ترتیب $\prec$ از $\mathbb{R}$ با این خاصیت که به ازای هر $y \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : x \prec y\}$ حداکثر شمارا است، وجود دارد.

وجود این ترتیب به **فرضیه پیوستار** بستگی دارد که به این شرح است: هرگاه S زیرمجموعه نامتناهی از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه S شمارا است یا S عدد اصلی $\mathbb{R}$ را دارد (به این معنی که می‌تواند به شکل دوسویی به $\mathbb{R}$ نگاشته شود.) [۱]

راهنمایی: فرض کنید $\prec$ خوش ترتیبی از $\mathbb{R}$ را مشخص کند و مجموعه X را به صورت

$$X = \{y \in \mathbb{R} : \text{شمارا نیست}\{x : x \prec y\}\},$$

تعریف کنید. اگر X تهی باشد، حکم ثابت می‌شود. در غیراین‌صورت کوچکترین عنصر $\bar{y}$ در X را در نظر بگیرید و فرضیه پیوستار را به کار ببرید.

۱. این حکم توسط کانتور فرمول بندی شده است و مثل خوش ترتیبی از اصول موضوع دیگر نظریه‌ی مجموعه مستقل است، لذا برای این که درستی آن را بپذیریم، آزادیم.

فصل ۳

مشتقگیری و انتگرالگیری

مسأله ماکسیمال:
زمانی‌که مسأله به زبان بازی کریکت یا هر بازی دیگری بیان شود، که در آن بازیکن نتایجی اخذ می‌کند، که به صورت میانگین لحاظ می‌شود به راحتی قابل فهم است.

جی. اچ. هاردی و جی. ای. لیتل وود، ۱۹۶۰.

این‌که مشتقگیری و انتگرالگیری عملگرهای معکوس هم هستند،

پیش از این در مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال دانسته شد. در اینجا ما می‌خواهیم ایده‌ی پایه‌ای را در چارچوب نظریه کلی مطالعه شده در فصول قبل بازآزمایی کنیم. هدف ما فرمول‌بندی و ارائه برهان قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در این راستا و توسیع بعضی مفاهیمی است که پدیدار می‌شوند. می‌کوشیم تا پاسخ این دو سؤال را بیابیم هر یک از این روش‌ها نمایانگر عمل متقابل بین مشتقگیری و انتگرالگیری است.

اولین مسأله که با آن درگیریم را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد:

- فرض کنید f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است و F انتگرال نامعین آن است، یعنی
$$F(x) = \int_a^x f(y)dy.$$
آیا به این معنی است که F (حداقل به ازای تقریبا هر x) مشتقپذیر است و $F' = f$؟
اینک خواهیم دید پاسخ مثبت به این سؤال به ایده‌ای با کاربرد وسیع بستگی دارد و به وضعیت یک بعدی محدود نمی‌شود.
برای سؤال دوم ترتیب مشتقگیری و انتگرالگیری را برعکس می‌کنیم.

- چه شروطی روی تابع F روی $[a,b]$ تضمین می‌کند که $F'(x)$ (تقریبا همه جا به ازای هر x) وجود دارد و این تابع انتگرال‌پذیر است و به‌علاوه

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx?$$

با وجودی که این مسأله از دورنمای محدودتری نسبت به مورد اول مورد بررسی قرار می‌گیرد، مفاهیم آن عمیق هستند و نتایجی که به‌دست می‌آیند، وسیع می‌باشند. به‌خصوص در می‌یابیم که این بحث با مسأله متناهی بودن طول منحنی‌ها ارتباط دارد. به عنوان یک مثال از چنین ارتباطی، نامساوی متساوی المحیط کلی را در صفحه فراهم خواهیم ساخت.

مشتقگیری از انتگرال

با مسأله اول آغاز می‌کنیم و آن مطالعه مشتقگیری از انتگرال است. اگر f روی $[a,b]$ داده شده و روی آن بازه انتگرال‌پذیر باشد، فرض می‌کنیم

$$F(x)=\int_a^x f(y)dy, \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

در ارتباط با $F'(x)$، تعریف مشتق را یادآوری می‌کنیم که به صورت حد خارج قسمت

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

است، زمانی که h به 0 میل می‌کند.

توجه می‌کنیم که این خارج قسمت به این صورت است (مثلا در حالت $h>0$)

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy.$$

که در آن از نماد $I=(x,x+h)$ و $|I|$ برای طول این بازه استفاده می‌کنیم. در اینجا درنگی می‌کنیم تا ملاحظه کنیم که عبارت بالا (میانگین) مقدار f روی I است، و انتظار داریم که این میانگین‌ها در حد، زمانی‌که $|I|\to 0$ به $f(x)$ میل کند. با کمی تغییر در باز نویسی سؤال، این گونه می‌پرسیم که آیا

$$\lim_{\substack{x\in I\\ |I|\to 0}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = f(x),$$

برای نقاط مناسب x برقرار است. در ابعاد بالاتر می‌توانیم سؤال مشابهی بپرسیم، که میانگین‌های f روی مجموعه‌های مناسبی گرفته می‌شوند، که تعمیم بازه‌ها در حالت یک بعدی هستند. در ابتدا

این مسأله را در حالتی بررسی می‌کنیم که مجموعه‌های درگیر شده، گوی‌های B شامل x، با حجم $m(B)$ جایگزین طول $|I|$ از I هستند. پس از این خواهیم دید که به‌عنوان نتیجه‌ای از این حالت به‌خصوص، نتایج مشابهی برای گردایه‌ای از مجموعه‌های کلی‌تر برقرار است، مجموعه‌هایی که «گریز از مرکز» کراندار دارند.

به کمک این مفهوم اولین مسأله مان را در فضای $\mathbb{R}^d$ به ازای $d \geqslant ۱$ بیان می‌کنیم.

فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است. آیا این صحیح است که تقریبا همه جا به ازای هر x داریم:

$$\lim_{\substack{m(B)\to ۰ \\ x\in B}} \frac{۱}{m(B)} = \int_B f(y)dy = f(x)\,?$$

این حد روی حجم گوی‌های باز B شامل x گرفته می‌شود که به صفر می‌گراید.

از این پرسش به‌عنوان **مسأله‌ی میانگین‌پذیری** یاد خواهیم کرد. توجه می‌کنیم که اگر B گویی با شعاع r در $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه $m(B) = v_d r^d$، که در آن v_d اندازهٔ گوی واحد است. (تمرین ۱۴ فصل قبل را ببینید.)

به این حالت به‌خصوص توجه کنید زمانی که f در x پیوسته است،

قطعا حد به $f(x)$ همگراست. در واقع، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که اگر $|x-y| < \delta$، آنگاه $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. از آنجا که

$$f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = \frac{1}{m(B)}\int_B (f(x)-f(y))dy,$$

در می‌یابیم که وقتی B گویی به شعاع $\frac{\delta}{2}$ شامل x باشد، در این‌صورت

$$\left|f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy\right| \leqslant \frac{1}{m(B)}\int_B |f(x)-f(y)|dy < \varepsilon,$$

همانطور که انتظار داشتیم. مسأله میانگین‌پذیری پاسخی مثبت دارد، اگرچه برای اثبات آن که ذاتا کیفی است، نیازمند این هستیم که رفتارهای میانگین‌های f را به شکل کمی تقریب بزنیم. این کار از طریق میانگین‌های ماکزیمال $|f|$ انجام می‌شود که اکنون به آن اشاره می‌کنیم.

۱.۰.۳ تابع ماکزیمال هاردی - لیتل وود

تابع ماکزیمالی که در زیر در نظر می‌گیریم، ابتدا در شرایط یک بعدی پدیدار و توسط هاردی و لیتل وود بررسی شد. به نظر می‌رسد که

آن مفاهیم با مطالعه‌ی این تابع با پرداختن به این سؤال که چه‌طور امتیاز یک گوی زن در بازی کریکت بهینه می‌شود تا او به بالاترین سطح رضایت برسد، منجر می‌شود. همانطور که معلوم است مفاهیم درگیر، یک اهمیت جامع در آنالیز دارد. تعریف مربوطه در ادامه می‌آید.

اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشد، تابع ماکزیمال f^* را به‌صورت

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

تعریف می‌کنیم که درآن سوپریمم روی همه گوی‌های شامل نقطه‌ی x گرفته می‌شود به عبارت دیگر ما حد را در مسأله میانگین پذیری با یک سوپریمم و f را با مقدار مطلق آن جایگزین می‌کنیم.

خواص مهمی از f^* که به آن نیازمندیم در قضیهٔ زیر خلاصه می‌شود.

قضیه ۱.۳. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است. در این‌صورت :

۱. f^* اندازه‌پذیر است.

۲. تقریبا به ازای هر x، $f^*(x) < \infty$.

۳. f^* شرط زیر را داراست.

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\} \leqslant \frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \qquad (۱.۳)$$

به ازای هر $\alpha > 0$، که در آن $A = 3^d$ و $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$.

قبل از رسیدن به برهان، می‌خواهیم ماهیت نتیجهٔ مهم ۳ را توضیح دهیم. همانطور که ملاحظه می‌کنیم، تقریبا به ازای هر x داریم $f^*(x) \geqslant |f(x)|$. نتیجهٔ ۳ این است که، f خیلی بزرگتر از $|f|$ نیست. از این نظرگاه، می‌خواهیم نتیجه بگیریم که به‌دلیل انتگرالپذیری f، f^* نیز انتگرالپذیر است. اگر چه این مورد درست نیست و ۳ بهترین جایگزین موجود است. (تمرین ۴ و ۵ را ببینید.)

یک نامساوی از نوع ۱.۳، یک نامساوی ضعیف –گون نامیده می‌شود زیرا ضعیف تر از نامساوی متناظر برای L^1– نرم‌ها است. در واقع این می‌تواند از نامساوی چبیچف بررسی شود، (تمرین ۹ در فصل ۲ را ببینید) که بیان می‌کند برای یک تابع دلخواه g

به ازای هر $\alpha > 0$، $\quad m(\{x : |g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

باید اضافه کنیم که مقدار دقیق A در نامساوی ۱.۳ برای ما مهم نیست. چیزی که رخ می‌دهد این است که این ثابت مستقل از α و f است.

تنها نکته‌ی این قضیه این است که f^* یک تابع اندازه‌پذیر است. در واقع مجموعهٔ $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ باز است، زیرا اگر $\bar{x} \in E_\alpha$، گوی B وجود دارد که $\bar{x} \in B$ و

$$\frac{۱}{m(B)} \int_B |f(y)|dy > \alpha.$$

حال، هر نقطه x که به اندازه کافی به $\bar{x}$ نزدیک است، به B نیز تعلق دارد، بنابراین $x \in E_\alpha$ نیز چنین است.

دو خاصیت دیگر f^* در قضیه عمیق‌تر هستند، ۲ نتیجه‌ای از ۳ می‌شود. این حکم زمانی به‌دست می‌آید که ملاحظه کنیم که به ازای هر α

$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subset \{x : f^*(x) > \alpha\}.$$

با گرفتن حد، زمانی که α به بینهایت میل می کند، خاصیت سوم نتیجه می‌دهد: $m(\{x : f^*(x) = \infty\}) = ۰$.

برهان نامساوی ۱.۳ به‌صورت اولیه به مبحث پوشش ویتالی بستگی دارد.[۱]

۱. توجه می‌کنیم که لمی که در ادامه می‌آید، اولین لم از لم های مباحث پوششی است که در زیر نظریهٔ مشتقپذیری پدیدار می‌شوند، همچنین لم ۲۷.۳ و نتیجه‌اش نیز لم ۲۳.۲ را ببینید، جایی که حکم پوششی بودن صریح‌تر است.

لم ۲.۳. فرض کنید $\mathcal{B}=\{B_۱, B_۲, ..., B_N\}$ یک گردایه متناهی از گوی‌های باز $\mathbb{R}^d$ باشد. در این صورت یک زیر گردایه مجزای $B_{i_۱}$،…،B_{i_k} از $\mathcal{B}$ وجود دارد، به‌طوری که در شرط

$$m(\bigcup_{l=۱}^{N} B_l) \leqslant ۳^d \sum_{j=۱}^{k} m(B_{ij})$$

صدق می‌کند.

سخن کوتاه این‌که، همیشه زیر گردایه‌ای مجزا از گوی‌هایی می‌یابیم که کسری از منطقه پوشیده شده با گوی‌های اصلی را می‌پوشانند.

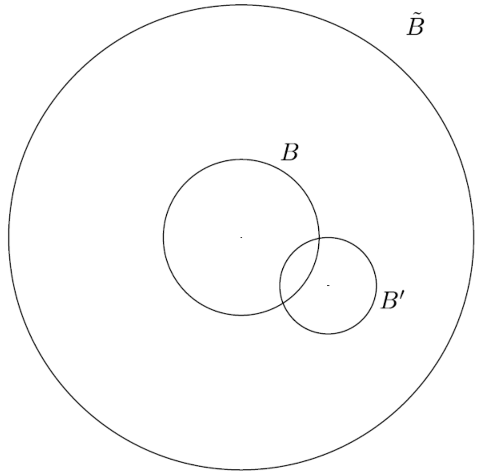
برهان. بحثی که ما ارائه می‌دهیم ساختاری است و به نگاه ساده زیر مبتنی است: فرض کنید B و B' یک جفت از گوی‌هایی هستند که با یکدیگر اشتراک دارند، و شعاع B' بزرگتر از شعاع B نیست. در این‌صورت، B' مشمول در گویی مانند $\tilde{B}$ است که با B هم مرکز است اما شعاع آن ۳ برابر شعاع B است.

در مرحله اول، گوی $B_{i_۱}$ در $\mathcal{B}$ را با شعاع ماکزیمال (به این معنا که بزرگترین است) انتخاب می‌کنیم، سپس از B گوی $B_{i_۱}$ و نیز هر گویی که با $B_{i_۱}$ اشتراک دارد را حذف می‌کنیم. بنابراین همه گوی‌هایی که حذف شده‌اند، مشمول در گوی $\tilde{B_{i_۱}}$ هم مرکز با $B_{i_۱}$، اما با شعاع ۳ برابر هستند.

گوی‌های باقیمانده یک گردایهٔ جدیدی از $\mathcal{B}'$ به‌دست می‌دهد، که برای آن، روند خود را تکرار می‌کنیم. $B_{i_۲}$ را با بزرگترین شعاع در $\mathcal{B}'$ انتخاب می کنیم و در این‌صورت از B'، گوی $B_{i_۲}$ و هر گویی که با $B_{i_۲}$ اشتراک دارد را حذف می‌کنیم. این روش را ادامه می‌دهیم تا بعد از N مرحله گوی‌های مجزای $B_{i_۱}$،$\cdots$،B_{i_k} را بیابیم.

سرانجام برای اثبات این‌که این گردایه از گوی‌های مجزا در نامساوی لم صدق می‌کند، از نتیجه‌ای که در ابتدای برهان آمده استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\tilde{B}_{i_j}$ گویی هم‌مرکز با B_{i_j}، اما با شعاع سه برابررا نمایش می‌دهد. از آنجا که هر گوی B در $\mathcal{B}$ باید با گوی B_{i_j} اشتراک داشته باشد و شعاعی برابر یا کوچکتر از B_{i_j} دارد، باید داشته باشیم $B \subset \tilde{B}_{i_j}$، بنابراین

$$m(\bigcup_{l=۱}^{N} B_l) \leqslant m(\bigcup_{j=۱}^{k} \tilde{B}_{i_j}) \leqslant \sum_{j=۱}^{k} m(\tilde{B}_{i_j}) = ۳^d \sum_{j=۱}^{k} m(B_{i_j}).$$



شکل ۱.۳: گوی‌های B و $\tilde{B}$

در مرحلهٔ آخر از این حکم استفاده می‌کنیم که یک تجانس از یک مجموعه توسط $\delta > 0$ در $\mathbb{R}^d$، به حاصلضرب در δ^d برای اندازه لبگ این مجموعه منجر می‌شود.

برهان (۳) قضیهٔ ۱.۳ اکنون در دسترس است. اگر فرض کنیم $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$، در این‌صورت به ازای هر $x \in E_\alpha$ گوی B_x موجود است، به طوری که شامل x است و

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

بنابراین به ازای هر گوی B_x داریم

$$m(B_x) < \frac{۱}{\alpha}\int_{B_x}|f(y)|dy. \qquad (۲.۳)$$

زیرمجموعهٔ فشرده K از E_α را ثابت در نظر بگیرید. از آنجا که K توسط $\bigcup_{x\in E_\alpha} B_x$ پوشانده می‌شود، یک زیر پوشش متناهی از K، مثل $K \subset \cup_{l=۱}^{N} B_l$ را انتخاب می‌کنیم. لم پوششی وجود یک زیر گردایه $B_{i_۱}$،…،B_{i_k} از گوی‌های مجزا و

$$m(\bigcup_{l=۱}^{N} B_l) \leqslant ۳^d \sum_{j=۱}^{k} m(B_{i_j}) \qquad (۳.۳)$$

را تضمین می‌کند. چون گوی‌های $B_{i_۱}$،…،B_{i_k} مجزا هستند و نیز در (۲.۳) و (۳.۳) صدق می‌کنند، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} m(K) \leqslant m(\bigcup_{l=۱}^{N} B_l) \leqslant ۳^d \sum_{j=۱}^{k} m(B_{i_j}) &\leqslant \frac{۳^d}{\alpha}\sum_{j=۱}^{k}\int_{B_{i_j}}|f(y)|dy \\ &= \frac{۳^d}{\alpha}\int_{\bigcup_{j=۱}^{k} B_{i_j}}|f(y)|dy \\ &\leqslant \frac{۳^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|dy. \end{aligned}$$

چون این نامساوی به ازای هر زیرمجموعهٔ فشرده K از E_α صحیح است، برهان نامساوی ضعیف- گون برای عملگر ماکزیمال پایان می‌یابد. $\square$

۱.۳ قضیهٔ مشتقگیری لبگ

تقریب به‌دست آمده برای تابع ماکزیمال، به راه حلی برای مسأله میانگین‌پذیری منجر می‌شود.

قضیه ۳.۳. اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشد، در این‌صورت

$$\lim_{\substack{m(B)\to ۰\\ x\in B}} \frac{۱}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(x) \qquad \text{تقریبا به ازای هر}\ x\text{،} \qquad (۴.۳)$$

برهان. کافی است نشان دهیم به ازای هر $\alpha > ۰$ مجموعهٔ

$$E_\alpha = \{x : \limsup_{\substack{m(B)\to ۰\\ x\in B}} |\frac{۱}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)| > ۲\alpha\}$$

اندازهٔ صفر دارد، زیرا این حکم تضمین می‌کند که مجموعهٔ $E = \bigcup_{n=۱}^{\infty} E_{۱/n}$ اندازهٔ صفر دارد و حد در (۴.۳) به ازای همه نقاط E^c برقرار است.

α را ثابت می‌گیریم و قضیه ۱۷.۲ در فصل ۲ را یادآوری می‌کنیم، که بیان می‌کند که می‌توانیم به ازای هر $\varepsilon > ۰$ تابع پیوسته g با محمل فشرده و

$$\|f-g\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

را انتخاب کنیم. همان‌طور که پیش از این به این موضوع توجه کردیم، پیوستگی g نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{\substack{m(B)\to \circ\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)dy = g(x) \qquad \text{به ازای هر } x,$$

از آنجا که تفاضل $\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)$ را به صورت

$$\frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-g(y))dy + \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)dy - g(x) + g(x) - f(x)$$

می‌توانیم بنویسیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\limsup_{\substack{m(B)\to \circ\\ x\in B}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy - f(x)\right| \leqslant (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|,$$

که در آن نماد $*$ تابع ماکزیمال را مشخص می‌کند. در نتیجه اگر

$$F_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \text{ و } G_\alpha = \{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\},$$

آنگاه $E_\alpha \subset (F_\alpha \cup G_\alpha)$، زیرا اگر u_1 و u_2 مثبت باشند، آنگاه فقط اگر به ازای حداقل یک u_i، $u_i > \alpha$ داریم $u_1 + u_2 > 2\alpha$. از طرف دیگر نامساوی چبیچف نتیجه می‌دهد که

$$m(G_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

و باز از طرف دیگر، تقریب ضعیف–گونه برای تابع ماکزیمال نتیجه می‌دهد

$$m(F_\alpha) \leqslant \frac{A}{\alpha}\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

تابع g طوری انتخاب شده که $\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$m(E_\alpha) \leqslant \frac{A}{\alpha}\varepsilon + \frac{1}{\alpha}\varepsilon$$

چون ε دلخواه است، باید داشته باشیم $m(E_\alpha) = 0$. $\square$

توجه کنید به‌عنوان نتیجه‌ای بلافصل از قضیه‌ای که برای $|f|$ به کار رفته، می‌بینیم که تقریبا به ازای هر x، $f^*(x) \geqslant |f(x)|$، که در آن f^* تابع ماکزیمال است.

تا اینجا ما با این فرض که f انتگرالپذیر است، کار کرده‌ایم. این فرض «کلی» برای مفهومی «موضعی» مثل مشتقپذیری کمی خارج از مبحث است. در واقع حد در قضیهٔ لبگ روی گوی‌هایی گرفته می‌شود که به نقطه x کاهش می‌یابند، بنابراین رفتار f دور از x نامربوط است. پس اگر انتگرالپذیری f را روی هر گویی در نظر بگیریم، انتظار داریم که نتیجه برقرار باشد.

برای دقیق‌تر کردن این موضوع، می‌گوییم تابع اندازه‌پذیر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر موضعی است، اگر به ازای هر گوی B تابع $f(x)\chi_B(x)$

انتگرال‌پذیر باشد. فضای همه توابع انتگرال‌پذیر موضعی را با $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ نشان خواهیم داد. کوتاه سخن این‌که رفتار یک تابع در بی‌نهایت، روی انتگرال‌پذیری موضعی آن اثر نمی‌گذارد. برای مثال، توابع $e^{|x|}$ و $|x|^{-\frac{1}{2}}$ هر دو انتگرال‌پذیر موضعی هستند، اگرچه روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر نیستند.

به وضوح نتیجه قضیهٔ آخر تحت مفروضات ضعیفتر که در آن f انتگرال‌پذیر موضعی است برقرارند.

قضیه ۴.۳. اگر $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$، آنگاه

تقریبا به ازای هر x، $$\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x).$$

اولین کاربرد ما از این قضیه منجر به چشم‌اندازی جالب بر ماهیت مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌شود. اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و

$$x \in \mathbb{R}^d$$

باشد، می‌گوییم x نقطه‌ای از چگالی لبگ E است، هرگاه

$$\lim_{\substack{m(B) \to 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1.$$

به طور مختصر، این نتیجه بیان می‌کند که گوی‌های کوچک حول x، تقریبا به طور کامل توسط E پوشیده می‌شوند. به طور دقیق‌تر به ازای هر $\alpha < 1$ و نزدیک به ۱ و هر گوی با شعاعی به اندازه کافی کوچک شامل x، داریم

$$m(B \cap E) \geqslant \alpha m(B).$$

بنابراین E حداقل یک α قسمت از B را می‌پوشاند.

یک کاربرد قضیه **۴.۳** برای تابع مشخصه E، بی‌درنگ نتیجهٔ زیر را می دهد:

نتیجه ۵.۳. فرض کنید E زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیری از $\mathbb{R}^d$ باشد. در این‌صورت:

۱. تقریبا هر x نقطه‌ی چگالی E است.

۲. تقریبا هر $x \in E^c$، نقطه‌ی چگالی E نیست.

در ادامه مفهومی را برای توابع انتگرالپذیر در نظر می‌گیریم، که جایگزینی مفید برای پیوستگی همه جایی است.
اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر موضعی باشد، **مجموعهٔ لبگ** f عبارت است از همه نقاط $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$، که برای آن $f(\bar{x})$ متناهی است و

$$\lim_{\substack{m(B)\to \circ \\ \bar{x}\in B}} \frac{۱}{m(B)}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|dy = \circ.$$

در این مرحله، ۲ نتیجه ساده در مورد این تعریف در دستور کار است. اولا $\bar{x}$ به مجموعهٔ لبگ f تعلق دارد هرگاه f در $\bar{x}$ پیوسته باشد. ثانیا اگر x متعلق به مجموعهٔ لبگ f باشد، در این‌صورت

$$\lim_{\substack{m(B)\to \circ \\ x\in B}} \frac{۱}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(\bar{x}).$$

نتیجه ۶.۳. اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر موضعی باشد، آنگاه تقریبا هر نقطه به مجموعهٔ لبگ f تعلق دارد.

برهان. کاربردی از قضیه ۴.۳ برای تابع $|f(y)-r|$ نشان می‌دهد که به ازای هر عدد گویای r، مجموعهٔ E_r با اندازهٔ صفر وجود دارد، به‌طوری که

$$\lim_{\substack{m(B)\to \circ \\ x\in B}} \frac{۱}{m(B)}\int_B |f(y)-r|dy = |f(x)-r| \qquad \text{هرگاه}\ x\notin E_r$$

اگر $E=\bigcup_{r\in Q} E_r$، آنگاه $m(E)=\circ$. اکنون فرض کنید که $\bar{x}\notin E$ و $f(\bar{x})$ متناهی باشد. اگر $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد، یک عدد گویای r وجود

دارد به‌طوری که $|f(\bar{x})-r|<\varepsilon$. زیرا

$$\frac{۱}{m(B)}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|dy \leqslant \frac{۱}{m(B)}\int_B |f(y)-r|dy + |f(\bar{x})-r|.$$

باید داشته باشیم

$$\limsup_{\substack{m(B)\to ۰\\ x\in B}} \frac{۱}{m(B)}\int_B |f(y)-f(\bar{x})|dy \leqslant ۲\varepsilon$$

و بنابراین $\bar{x}$ در مجموعهٔ لبگ f قرار دارد. □

تذکر: با توجه به تعریف بخش ۲ فصل ۲ به یاد بیاورید که اعضای $L^۱(\mathbb{R}^d)$ در واقع رده‌های هم‌ارزی هستند، به این معنا که دو تابع **هم ارز** هستند، دو تابع هم‌ارز هستند هرگاه خارج مجموعه‌ای با اندازه صفر مساوی باشند. جالب است، ملاحظه کنیم که مجموعه نقاطی که روی آن‌ها میانگین‌های ۴.۳ به حدی همگراست، از نمایش f انتخاب شده مستقل است، زیرا اگر f و g هم ارز باشند

$$\int_B f(y)dy = \int_B g(y)dy.$$

اگرچه مجموعهٔ لبگ f به نمایش ویژه‌ی f که در نظر می‌گیریم، بستگی دارد.

خواهیم دید مجموعهٔ لبگ یک تابع یک خاصیتی جامع را برقرار می‌کند، به این معنا که تابع در این نقاطش توسط طیف گسترده‌ای از میانگین‌ها می‌تواند بازیابی شود. این دو موضوع را برای میانگین‌ها روی مجموعه‌هایی که به گوی‌ها تعمیم می‌یابند و در قالب تقریب‌های تابع همانی، ثابت می‌کنیم. توجه کنید، نظریه‌ی مشتقپذیری از دیرباز با استفاده از میانگین‌پذیری روی گوی‌ها تعمیم یافت، اما همان‌گونه که پیش از این اشاره کرده‌ایم، می‌توان پرسید که آیا نتایج مشابهی برای خانواده‌ی دیگری از مجموعه‌ها مثل مکعب‌ها یا مستطیل‌ها برقرار است. پاسخ به یک روش اساسی روی خواص- هندسی خانواده‌ی مورد بحث بستگی دارد. برای مثال، اکنون نشان می‌دهیم در حالت مکعب‌ها (و خانواده‌ای کلی‌تر از مجموعه‌ها با « خروج از مرکز»[1] کراندار) نتایج فوق حاصل می‌شود. با این وجود، در حالت خانواده‌ی همه مستطیل‌ها وجود حد تقریبا همه جایی و نامساوی ضعیف-گونه نقض می‌شود.(مسأله‌ی ۸ را ببینید.)

گفته می‌شود که گردایه‌ای از مجموعه‌های $\{U_\alpha\}$ به $\bar{x}$ **به طور منظم جمع** می‌شود (یا دارای خروج از مرکز کراندار در $\bar{x}$ است)، هرگاه

1. Eccentricity

ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر U_α گوی B با خاصیت

$$\bar{x} \in B, \qquad U_\alpha \subset B, \qquad m(U_\alpha) \geqslant cm(B),$$

موجود باشد.

بنابراین U_α مشمول در B است، اما اندازه‌اش با اندازهٔ B قابل مقایسه است. برای مثال مجموعهٔ همه مکعب‌های باز شامل $\bar{x}$ برای $\bar{x}$ به طور منظم جمع‌شونده است. با وجود این، در $\mathbb{R}^d$ با $d \geqslant 2$ گردایه‌ی همه مستطیل‌های باز شامل $\bar{x}$ برای $\bar{x}$ به‌طور منظم جمع نمی‌شود. اگر مستطیل‌های خیلی باریک را در نظر بگیریم، این مطلب می‌تواند دیده شود.

نتیجه ۷.۳. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر موضعی است. اگر $\{U_\alpha\}$ برای $\bar{x}$ به‌طور منظم جمع‌شونده باشد، آنگاه به ازای هر نقطه $\bar{x}$ در مجموعهٔ لبگ f داریم

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha) \to 0 \\ x \in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = f(\bar{x}).$$

برهان. برهان بی‌درنگ حاصل می‌شود، زمانی که ملاحظه کنیم اگر $\bar{x} \in B$ با $U_\alpha \subset B$ و $m(U_\alpha) \geqslant cm(B)$ آنگاه

$$\frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} |f(y) - f(\bar{x})|dy \leqslant \frac{1}{cm(B)} \int_B |f(y) - f(\bar{x})|dy.$$

□

۲.۳ هسته‌های خوب و تقریب‌هایی از تابع همانی

اکنون به میانگین توابعی می‌پردازیم که به‌صورت پیچش [1] داده شده‌اند و می‌توان آن‌ها را به این صورت نوشت:

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy.$$

در اینجا f تابعی انتگرالپذیر دلخواه است که آن را ثابت می‌گیریم درحالی که K_δ روی یک خانواده‌ی به‌خصوصی از توابع تغییر می‌کند، که به عنوان هسته‌ها، در نظر گرفته می‌شوند. عبارت‌هایی از این دست پرسش‌های بسیاری را بر می‌انگیزاند، (به عنوان مثال قضیهٔ معکوس فوریه در فصل قبل) و قبلا در جلد ۱ بحث شده است.

مطابق با مفروضات اولیه‌مان این توابع را « هسته‌های خوب» می‌نامیم، اگر انتگرالپذیر باشند و شرایط زیر برای $\delta > 0$ برقرار باشد

۱. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)dx = 1$.

۲. $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx \leqslant A$.

---

۱. خواص اولیه‌ی پیچش‌ها در تمرین ۲۱ فصل قبل توصیف شده‌اند.

۳. به ازای هر $\eta > 0$

$$\text{وقتی که } \delta \to 0 \qquad \int_{|x|\geqslant\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0.$$

در اینجا A یک مقدار مستقل ثابت از δ است.

کاربرد اصلی این هسته‌ها برای f کراندار است، در این‌صورت در هر نقطه پیوستگی f، وقتی که $\delta \to 0$، $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$. برای دستیابی به نتیجهٔ مشابهی، برقراری در همه نقاط مجموعهٔ لبگ f، مجبوریم تا حدی مفروضات روی هسته‌های K_δ را تقویت کنیم. برای این‌که این شرایط را بیابیم، دیدگاه متفاوتی را می‌پذیریم و به رده‌ی کوچکتری از هسته‌ها مثل **تقریب‌های تابع همانی** اشاره می‌کنیم و در این مفروضات مجددا K_δ انتگرالپذیر و شرط ۱ برقرار است اما به جای ۲ و ۳، شرایط زیر را فرض می‌کنیم:

′۲ به ازای $\delta > 0$، $|K_\delta(x)| \leqslant A\delta^{-d}$

′۳ به ازای هر $\delta > 0$ و $x \in \mathbb{R}^d$، $|K_\delta(x)| \leqslant A\frac{\delta}{|x|^{d+1}}$، [۱]

ملاحظه می‌کنیم که این لزومات قوی‌ترند و شرایط تعریف هسته‌های

۱. گاهی شرط (′۳) با شرط $|K_\delta(x)| \leqslant A\frac{\delta^\varepsilon}{|x|^{d+\varepsilon}}$ به ازای ثابت $\varepsilon > 0$ جایگزین می‌شود. اگر چه، حالت خاص $\varepsilon = 1$ در بسیاری از شرایط کافی است.

خوب را نتیجه می‌دهند. در واقع اول ۲ را ثابت می‌کنیم. برای اثبات آن دومین نتیجه ۱۰.۲ در فصل ۲ را به کار می‌بریم که می گوید:

(۵.۳)

به ازای مقادیری از $C > 0$ و به ازای هر $\varepsilon > 0$ $\int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{dx}{|x|^{d+1}} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}$

در این‌صورت با استفاده از تقریبات ′۲ و ′۳ به ترتیب زمانی‌که $|x| < \delta$ و $|x| \geqslant \delta$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|dx &= \int_{|x|<\delta} |K_\delta(x)|dx + \int_{|x|\geqslant\delta} |K_\delta(x)|dx \\ &\leqslant A \int_{|x|<\eta} \frac{dx}{\delta^d} dx + A\delta \int_{|x|\geqslant\delta} \frac{1}{|x|^{d+1}} dx \\ &\leqslant A' + A'' < \infty.\end{aligned}$$

سرانجام شرط آخر یک هسته خوب نیز برقرار می‌شود، زیرا کاربرد دیگر ۵.۳ نتیجه می دهد

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant\eta} |K_\delta(x)|dx &\leqslant A\delta \int_{|x|\geqslant\eta} \frac{1}{|x|^{d+1}} dx \\ &\leqslant \frac{A'\delta}{\eta},\end{aligned}$$

و این عبارت پایانی زمانی که $\delta \to 0$، به ۰ میل می‌کند.

اصطلاح «تقریب از تابع همانی» از این حقیقت ناشی می‌شود که به معانی مختلفی، آن‌گونه که در زیر خواهیم دید، نگاشت $f \mapsto f * K_\delta$

وقتی که $\delta \to \circ$ به نگاشت همانی $f \mapsto f$ همگراست. این مطلب با نکته‌های زیر نیز مرتبط است. تصویر ۲.۳ یک تقریب نوعی به تابع همانی را نشان می‌دهد. به ازای $\delta > \circ$، هسته روی مجموعه $|x| < \delta$ تکیه می‌کند و ارتفاع $\frac{۱}{۲\delta}$ را دارد. وقتی که δ به ۰ می‌گراید این خانواده از هسته‌ها به جرم واحد در مبدا یا «تابع» **دلتای دیراک** همگراست. که مورد دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شود

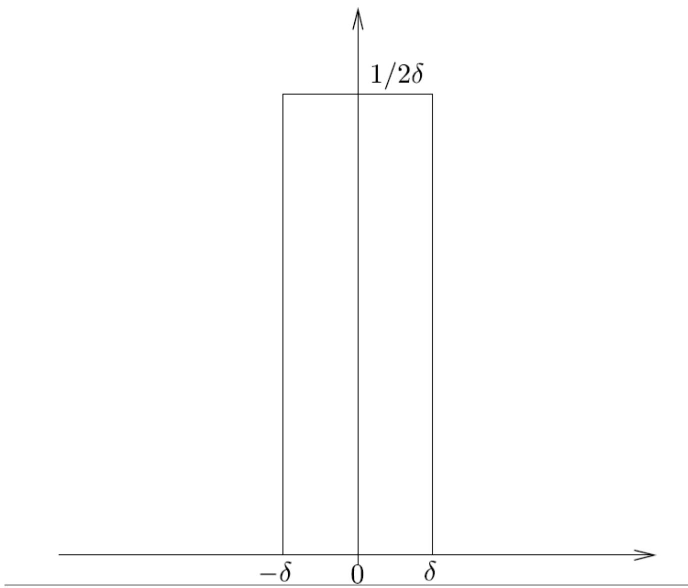
$$\int \mathcal{D}(x)dx = ۱$$

و

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} \infty & \text{اگر } x = \circ \\ \circ & \text{اگر } x \neq \circ \end{cases}.$$

از آنجا که هر K_δ، دارای انتگرال ۱ است، به بیان نادقیق می‌گوییم که

$$\text{وقتی که } \delta \to \circ \qquad K_\delta \to \mathcal{D}.$$



شکل ۲.۳: یک تقریب به تابع همانی

اگر به پیچش $f*\mathcal{D}$ به عنوان $\int f(x-y)\mathcal{D}(y)dy$ نگاه کنیم، حاصل‌ضرب $f(x-y)\mathcal{D}(y)$، ۰ است، به جز زمانی که $y=\circ$، و جرم $\mathcal{D}$ در $y=\circ$ متمرکز می‌شود، بنابراین موقتا انتظار داریم که

$$(f * D)(x) = f(x).$$

بنابراین $f*\mathcal{D}=f$ و $\mathcal{D}$ نقش تابع همانی را برای پیچش‌ها بازی می‌کنند. باید اشاره کنیم که این بحث می‌تواند فرموله و $\mathcal{D}$ می تواند

بر حسب اندازه‌های لبگ- اشتیلیس که در فصل ۶ به آن می‌پردازیم، یا از طریق «توابع تعمیم یافته» (که همان توزیع‌ها هستند) و مطالعه آن‌ها را تا جلد ۴ به تاخیر می‌اندازیم، ارائه شود.

اکنون به مثال‌هایی از تقریبات به تابع همانی اشاره می‌کنیم.

مثال ۸.۳. فرض کنید φ تابع کراندار نامنفی در $\mathbb{R}^d$ باشد که روی گوی واحد $|x| \leqslant ۱$ تکیه می‌کند، و به طوری که

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = ۱,$$

در این‌صورت، اگر قرار دهیم $K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(\delta^{-۱}x)$ خانواده‌ی $\{K_\delta\}_{\delta>۰}$، تقریبی از تابع همانی است. تحقیق ساده آن به خواننده واگذار می‌شود دو مثال زیر حالت‌های مهم ویژه‌ای هستند.

مثال ۹.۳. هسته‌ی پواسون برای نیم صفحه بالایی توسط

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{۱}{\pi}\frac{y}{x^۲ + y^۲} \qquad \text{و} \qquad x \in \mathbb{R}$$

داده می‌شود، که در آن پارامتر $\delta = y > ۰$ است.

مثال ۱۰.۳. هسته‌ی گرما در $\mathbb{R}^d$ به‌وسیلهٔ

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{۱}{(۴\pi t)^{\frac{d}{۲}}} e^{-|x|^۲/۴t},$$

تعریف می‌شود. که در آن $t > 0$ و داریم $\delta = t^{\frac{1}{2}}$. از طرف دیگر می توانیم قرار دهیم $\delta = 4\pi t$ تا به مفهومی سازگار با کاربرد بخصوص آن در فصل ۲ برسیم.

مثال ۱۱.۳. هسته‌ی پواسون برای قرص، عبارت است از

$$\frac{1}{2\pi}P_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} & \text{اگر } |x| \leqslant \pi \\ 0 & \text{اگر } |x| > \pi \end{cases}$$

که در آن داریم $0 < r < 1$ و $\delta = 1 - r$.

مثال ۱۲.۳. هسته‌ی فجر، به وسیله

$$\frac{1}{2\pi}F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(Nx/2)}{N\sin^2(x/2)} & \text{اگر } |x| \leqslant \pi \\ 0 & \text{اگر } |x| > \pi \end{cases}$$

تعریف می‌شود که در آن $\delta = 1/N$.

به یاد داریم که مثال‌های ۹.۳ و ۱۲.۳ قبلا در جلد ۱ دیده شده‌اند. اکنون به نتیجهٔ کلی در مورد تقریب‌های تابع همانی می پردازیم، که در آن نقش مجموعهٔ لبگ برجسته می‌شود.

قضیه ۱۳.۳. اگر $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ تقریبی از تابع همانی و f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه به ازای هر x در مجموعهٔ لبگ f

$$(f*K_\delta)(x)\to f(x) \qquad \delta\to 0 \text{ وقتی که}$$

به خصوص حد تقریبا به ازای هر x برقرار است.

از آنجایی که انتگرال هر هسته ی K_δ برابر با ۱ است می توانیم بنویسیم

$$(f*K_\delta)(x)-f(x)=\int[f(x-y)-f(x)]K_\delta(y)dy,$$

در نتیجه

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\leqslant\int|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy,$$

و اکنون کافی است ثابت کنیم طرف راست وقتی که δ به ۰ می‌رود، به ۰ همگراست. بحثی که ارائه می‌کنیم به یک نتیجهٔ ساده که در لم بعد مشخص می‌کنیم بستگی دارد.

لم ۱۴.۳. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر باشد و x نقطه‌ای در مجموعهٔ لبگ f باشد. فرض کنید

هرگاه $r > ۰$،
$$\mathcal{A}(r) = \frac{۱}{r^d}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|dy$$

آنگاه $A(r)$ تابع پیوسته‌ای از $r > ۰$ است، و

وقتی که $\delta \to ۰$
$$\mathcal{A}(r) \to ۰$$

به علاوه $A(r)$ کراندار است، به این معنا که به ازای یک $M > ۰$ و هر $r > ۰$ ، $\mathcal{A}(r) \leqslant M$.

برهان. پیوستگی $A(r)$ با به‌کاربردن پیوستگی مطلق در قضیه ۱۲.۲ فصل ۲ به‌دست می‌آید.

این حکم که $A(r)$ با میل کردن r به صفر، به صفر میل می‌کند، از این به‌دست می‌آید که x به مجموعهٔ لبگ f تعلق دارد و اندازه یک گوی به شعاع r، $v_d r^d$ است. این حکم و پیوستگی $A(r)$ به ازای $۰ < r \leq ۱$ نشان می‌دهد که $A(r)$ وقتی که $۰ < r \leq ۱$ کراندار است. برای اثبات این‌که $A(r)$ به ازای $r > ۱$ کراندارست، توجه کنید

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &\leqslant \frac{۱}{r^d}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)|dy + \frac{۱}{r^d}\int_{|y|\leqslant r} |f(x)|dy \\ &\leqslant r^{-d}\|f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)} + v_d|f(x)|.\end{aligned}$$

□

اکنون به برهان قضیه برمی‌گردیم. کلید حل آن شامل نوشتن انتگرال روی $\mathbb{R}^d$ به شکل مجموع انتگرال‌ها روی حلقه (یا طوق) است و در زیر به‌دست می‌آید:

$$\int |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy = \int_{|y|\leqslant\delta} + \sum_{k=۰}^{\infty}\int_{۲^k\delta<|y|\leqslant ۲^{k+۱}\delta}.$$

با به کار بردن خاصیت ($'۲$) از تقریب تابع همانی، عبارت اول به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$\begin{aligned}\int_{|y|\leqslant\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy &\leqslant \frac{c}{\delta^d}\int_{|y|\leqslant\delta}|f(x-y)-f(x)|dy\\ &\leqslant c\mathcal{A}(\delta).\end{aligned}$$

هر عبارت در مجموع به‌طور مشابه تقریب زده می‌شود، اما این بار با استفاده از خاصیت ($'۳$) از تقریب‌های تابع همانی داریم :

$$\begin{aligned}&\int_{۲^k\delta<|y|\leqslant ۲^{k+۱}\delta}|f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy\\ &\qquad\leqslant \frac{c\delta}{(۲^k\delta)^{d+۱}}\int_{|y|\leqslant ۲^{k+۱}\delta}|f(x-y)-f(x)|dy\\ &\qquad\leqslant \frac{c'}{۲^k(۲^{k+۱}\delta)^d}\int_{|y|\leqslant ۲^{k+۱}\delta}|f(x-y)-f(x)|dy\\ &\qquad\leqslant c'۲^{-k}\mathcal{A}(۲^{k+۱}\delta).\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تقریب‌ها در کنار هم، در میابیم که

$$|(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leqslant c\mathcal{A}(\delta) + c' \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\mathbb{A}(2^{k+1}\delta).$$

برای $\varepsilon > 0$ داده شده ابتدا N را به اندازه‌ای بزرگ انتخاب می کنیم، به طوری که $\sum 2^{-k} < \varepsilon$ باشد. با کوچک کردن δ به اندازه کافی، به کمک لم داریم

وقتی که $k = 0, 1, ..., N-1$ $\quad$ $\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{N}$.

بنابراین با یادآوری این نکته که $\mathcal{A}(r)$ کراندار است، در می‌یابیم

$$|(f * k_\delta)(x) - f(x)| \leqslant C\varepsilon,$$

و برای ε به اندازه کافی کوچک، قضیه ثابت می‌شود.

علاوه بر این نتیجهٔ نقطه به نقطه، پیچش‌های با تقریب‌های تابع همانی، همگرایی در نرم L^1 را میسر می‌کنند.

قضیه ۱۵.۳. فرض کنید f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر و $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ تقریبی از تابع همانی باشد، در این‌صورت به ازای هر $\delta > 0$ پیچش

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)dy,$$

انتگرالپذیر است و

وقتی که $\delta \to 0$، $\quad$ $\|(f * K_\delta) - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$.

برهان صرفا یک تکرار از یک بحث کلی‌تر در حالت خاص است که در آن

$$K_\delta = \delta^{-\frac{d}{۲}} e^{\frac{-\pi|x|^۲}{\delta}},$$

و در قسمت ۴ فصل ۲ داده شده، بنابراین تکرار نمی‌شود.

۳.۳ مشتقپذیری توابع

اکنون مایلیم تا به سؤال دوم که در ابتدای این فصل پرسیده شد بپردازیم، که در مورد یافتن یک شرط کلی روی تابع F است، به‌طوری که تساوی

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx \qquad (۶.۳)$$

را تضمین می‌کند. دو مورد وجود دارد که حالت کلی تساوی را مسأله دار می‌کند. اولا به دلیل وجود توابع مشتق‌ناپذیر[۱]، اگر صرفا فرض می‌کردیم F پیوسته است، طرف راست ۶.۳، ممکن است بی معنی شود. ثانیا، حتی اگر F' به ازای هر x موجود باشد، تابع F' لزوما انتگرالپذیر(لبگ) نیست (تمرین ۱۲ را ببینید.)

۱. به خصوص توابع پیوسته‌ای وجود دارند، که هیچ جا مشتقپذیر نیستند. فصل ۴ جلد ۱ یا فصل ۷ را ببینید.

با این مشکلات چه می‌کنیم؟ یک راه این است که خودمان را به توابع F که از انتگرال‌های نامعین (از توابع انتگرالپذیر) به وجود می‌آیند، محدود کنیم. این موضوع این مسأله را برمی‌انگیزاند که چطور چنین توابعی را مشخص کنیم و از طریق مطالعه‌ی رده‌ای بزرگتر، یعنی توابع با تغییر کراندار، به حل این مسأله نزدیک می‌شویم. این توابع با بحث منحنی‌های با طول متناهی ارتباط نزدیکی دارد، بحث را با در نظر گرفتن این ارتباط نزدیک آغاز می‌کنیم.

۱.۳.۳ توابع با تغییر کراندار

فرض کنید γ یک خم پارامتری در صفحه باشد که به ازای $a \leqslant t \leqslant b$ به وسیله

$$z(t) = (x(t), y(t))$$

داده می‌شود. در اینجا $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی مقدار پیوسته روی $[a,b]$ هستند. خم γ با طول متناهی است، هرگاه $M < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر افراز $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ از $[a,b]$،

$$\sum_{j=1}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-1})| \leqslant M. \qquad (۷.۳)$$

بنابر تعریف، طول خم $L(\gamma)$، سوپریمم روی همه افرازها از مجموع طرف راست رابطه است، به این معنا که

$$L(\gamma)=\sup_{a=t_\circ<t_۱<\ldots<t_N=b}\sum_{j=۱}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-۱})|,$$

از طرف دیگر، $L(\gamma)$ اینفیمم همه M هایی است که شرط ۷.۳ را برقرار می‌کند. به‌طور هندسی مقدار $L(\gamma)$ به وسیلهٔ تقریب زدن خم با خطوط چند ضلعی و گرفتن حد روی طول این خطوط چند ضلعی، به‌دست می‌آید زمانی که بازه $[a,b]$ به شکل ظریفی افراز می‌شود (شرح تصویر ۳.۳ را ببینید).

به طور طبیعی اکنون سؤال زیر را می‌پرسیم: چه شرط تحلیلی‌ای روی $x(t)$ و $y(t)$ تضمین می‌کند که خم γ با طول متناهی باشد؟ به خصوص آیا باید مشتق‌های $x(t)$ و $y(t)$ موجود باشد؟ اگر چنین است آیا فرمول زیر قابل قبول است

$$L(\gamma)=\int_a^b (x'(t)^۲+y'(t)^۲)^{\frac{۱}{۲}}dt?$$

پاسخ به پرسش اول به طور مستقیم به رده‌ی توابع با تغییر کراندار منجر می‌شود. رده‌ای که نقش کلیدی در نظریه‌ی مشتقپذیری بازی می‌کند.

فرض کنید F با ضابطه $F(t)$ یک تابع مختلط مقدار تعریف شده روی $[a,b]$ و

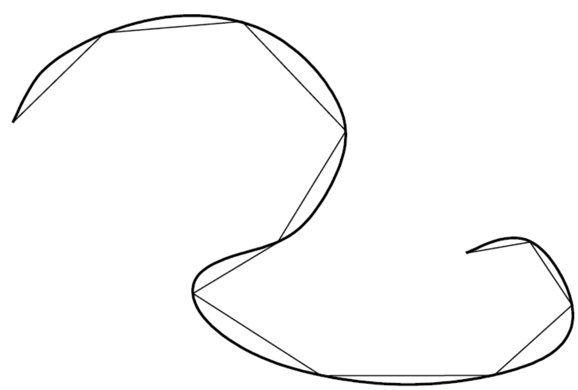
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$$

یک افراز از این بازه باشد.

تغییرات F روی این افراز به وسیلهٔ

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|,$$

تعریف می‌شود.



شکل ۳.۳: تقریب یک خم با طول متناهی به وسیلهٔ خطوط چند ضلعی

تابع F با تغییر کراندار نامیده می‌شود، هرگاه تغییرات F روی

همه افرازها کراندار باشد، به این معنا که $M < \infty$ وجود دارد، به طوری که به ازای همه افرازهای $a = t_۰ < t_۱ < ... < t_N = b,$ داشته باشیم

$$\sum_{j=۱}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-۱})| \leqslant M.$$

در این تعریف، فرض نمی‌کنیم که F پیوسته است، اگر چه هنگام به کار بردن آن برای خم‌ها، فرض می‌کنیم $F(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ پیوسته است.

توجه کنید اگر افراز $\tilde{\mathcal{P}}$ که به‌وسیلهٔ $a = \tilde{t_۰} < \tilde{t_۱} < ... < \tilde{t_N} = b$ داده می‌شود، تظریفی[1] از یک افراز $\mathcal{P}$، مانند $a = t_۰ < t_۱ < ... < t_N = b$ باشد، در این‌صورت تغییرات F روی $\tilde{\mathcal{P}}$ بزرگتر از، یا مساوی با تغییرات F روی $\mathcal{P}$ است.

قضیه ۱۶.۳. خم پارامتری $(x(t), y(t))$ که در آن $a \leqslant t \leqslant b$، از طول متناهی است، اگر و فقط اگر هر دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ با تغییر کراندار باشند.

برهان. برهان بلافاصله با توجه به این نکته که اگر $F(t) = x(t) + iy(t)$،

۱. می‌گوییم افراز $\tilde{\mathcal{P}}$ از $[a, b]$ تظریفی از یک افراز $\mathcal{P}$ از $[a, b]$ است، اگر هر نقطه در $\mathcal{P}$ به $\tilde{\mathcal{P}}$ نیز متعلق باشد.

آنگاه

$$F(t_j) - F(t_{j-۱}) = \big(x(t_j) - x(t_{j-۱})\big) + i\big(y(t_j) - y(t_{j-۱})\big),$$

و این‌که اگر a و b حقیقی باشند، آنگاه $|a+ib| \leqslant |a|+|b| \leqslant ۲|a+ib|$ حاصل می‌شود. □

یک تابع با تغییر کراندار نمی تواند با دامنه‌ی نوسانی خیلی بزرگ، نوسان کند. چند مثال به روشن کردن این گزاره کمک می‌کند. در ابتدا چند اصطلاح را بیان می‌کنیم. تابع حقیقی مقدار تعریف شده F روی $[a,b]$ **صعودی** است، اگر زمانی که $a \leqslant t_۱ \leqslant t_۲ \leqslant b$، آنگاه $F(t_۱) \leqslant F(t_۲)$. اگر نامساوی اکید باشد، می‌گوییم F **صعودی اکید** است.

مثال ۱۷.۳. اگر F تابعی حقیقی مقدار، یکنوا و کراندار باشد، آنگاه F با تغییرات کراندار است. در واقع اگر به‌عنوان مثال F صعودی و با کران M باشد، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum_{j=۱}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-۱})| &= \sum_{j=۱}^{N} F(t_j) - F(t_{j-۱}) \\ &= F(a) - F(b) \leqslant ۲M,\end{aligned}$$

مثال ۱۸.۳. اگر F در هر نقطه‌ای مشتقپذیر و F' کراندار باشد، آنگاه F با تغییر کراندار است. در واقع اگر $|F'| \leqslant M$ ، قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌دهد که

$$\text{به ازای هر } x, y \in [a,b]\text{،} \qquad |F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y|\text{،}$$

بنابراین $\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leqslant M(b-a)$. (تمرین۲۳را نیز ببینید).

مثال ۱۹.۳. فرض کنید

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & \text{به ازای هر } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

در این‌صورت F روی $[0,1]$ با تغییر کراندار است، اگر و فقط اگر $a > b$ (تمرین ۱۱ را ببینید). تصویر **۴.۳**، سه حالت $a > b$، $a = b$ و $a < b$ را نشان می‌دهد.

نتیجهٔ بعد نشان می‌دهد که، به عبارتی شرایط مثال اول، همه توابع با تغییر کراندار را می‌پوشانند. برای اثبات آن، به تعاریف زیر نیازمندیم. **تغییر کلی** F روی $[a,x]$ (که در آن $a \leqslant x \leqslant b$) به‌صورت

$$T_F(a,x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})|,$$

تعریف می‌شود. که سوپریمم روی همه افرازهای $[a,x]$ است. تعریف قبل در حالتی معنی‌دار است که F مختلط مقدار باشد. در تعاریف بعد نیاز است که F حقیقی مقدار باشد. با الهام از تعریف اول، **تغییرات مثبت** F روی $[a,x]$ عبارت است از

$$P_F(a,x) = \sup \sum_{(+)} |F(t_j) - F(t_{j-۱})|,$$

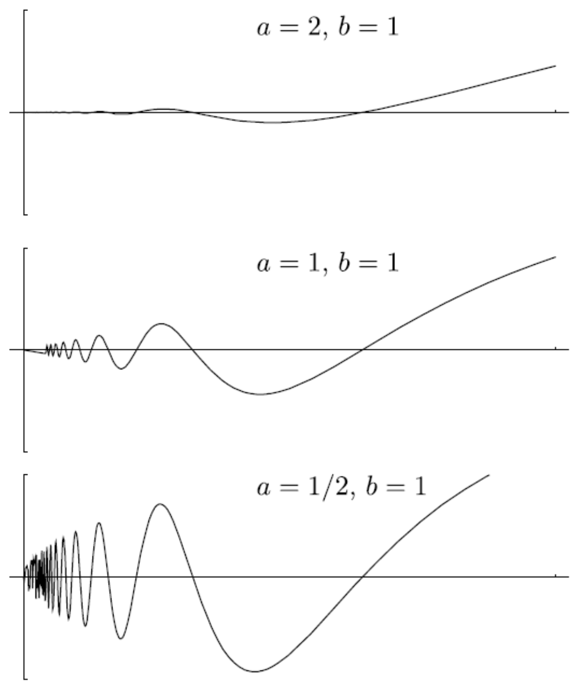
که در آن مجموع روی همه j هایی است که در آن $F(t_j) \geqslant F(t_{j-۱})$ و سوپریمم روی همه افرازهای $[a,x]$ اخذ می‌شود. سرانجام **تغییرات منفی** F روی $[a,x]$ به‌صورت

$$N_F(a,x) = \sup \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-۱})],$$

تعریف می‌شود، که در آن مجموع روی همه j هایی است که به ازای آن ها

$$F(t_j) \leqslant F(t_{j-۱}),$$

و سوپریمم روی همه افرازهای $[a,x]$ است.



شکل ۴.۳: نمودارهای متفاوت $x^a \sin(x^{-b})$ برای متغییرهای متفاوت a و b

لم ۲۰.۳. فرض کنید F حقیقی مقدار و روی $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. به ازای هر $a \leqslant x \leqslant b$ داریم

$$F(x) - F(a) = P_F(a, x) - N_F(a, x),$$

و

$$T_F(a, x) = P_F(a, x) + N_F(a, x).$$

برهان. برهان به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک افراز $a = t_0 < \ldots < t_N = x$ از $[a, x]$ وجود دارد، به طوری که

$$\left| P_F - \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) \right| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \left| N_F - \sum_{(-)} [F(t_j) - F(t_{j-1})] \right| < \varepsilon.$$

(برای دیدن این موضوع، کافی است، تعریف را به کار ببریم تا تقریب‌های مشابه برای P_F و N_F با افرازهای متفاوت احتمالی را به‌دست آوریم و سپس یک تظریف مشترک از این دو افراز در نظر بگیریم). همچنین از آنجا که

$$F(x) - F(a) = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) - \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

در می‌یابیم که $|F(x) - F(a) - [P_F - N_F]| < 2\varepsilon$، که اولین تساوی را ثابت می‌کند.

همچنین برای تساوی دوم، توجه می‌کنیم که برای هر افراز $a = t_0 < \ldots < t_N = x$ از $[a, x]$ داریم

$$\sum_{j=1}^{N} |F(t_j) - F(t_{j-1})| = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{(-)} [F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

بنابراین $T_F \leqslant P_F + N_F$. همچنین تساوی بالا نتیجه می‌دهد که

$$\sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \leqslant T_F,$$

یک‌بار دیگر می‌توان با استفاده از بحث در تظریف‌های مشترک افرازها در تعریف‌های P_F و N_F نامساوی $P_F + N_F \leqslant T_F$ را استخراج کرد. □

قضیه ۲۱.۳. تابع حقیقی مقدار F روی $[a,b]$ با تغییر کراندار است، اگر و فقط اگر F تفاضل دو تابع صعودی کراندار باشد.

برهان. به وضوح اگر $F = F_1 - F_2$، که در آن هر F_j کراندار و صعودی باشد، آنگاه F با تغییر کراندار است.

بر عکس، فرض کنید F با تغییر کراندار است. در این‌صورت، فرض می‌کنیم $F_1(x) = P_F(a,x) + F(a)$ و $F_2(x) = N_F(a,x)$. به وضوح، هر دو تابع F_1 و F_2 صعودی و با تغییر کراندار هستند، و بنابر لم

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

□

توجه کنید به‌عنوان یک نتیجه، هر تابع مختلط مقدار با تغییر کراندار یک ترکیب خطی (مختلط) از چهار تابع صعودی است.

به خم پارامتری γ با تابع پیوسته $z(t) = x(t) + iy(t)$ بر می‌گردیم، قصد داریم تا توضیحی در مورد تابع طول متناظر آن ارائه دهیم. با فرض این‌که این خم از طول متناهی است، $L(A, B)$ را به اندازه طول قطعه خط γ تعریف می‌کنیم که از تصویر t هایی به وجود آمده که $A \leqslant t \leqslant B$ و $a \leqslant A \leqslant B \leqslant b$. توجه کنید $L(A, B) = T_F(A, B)$ که در آن $F(t) = z(t)$. می‌بینیم

(۸.۳) اگر $A \leqslant C \leqslant B$ $\quad$ $L(A, C) + L(C, B) = L(A, B)$.

همچنین ملاحظه می‌کنیم که $L(A, B)$ تابع پیوسته‌ای از B (و از A) است. از آنجا که L یک تابع صعودی است، برای اثبات پیوستگی آن در B از سمت چپ، کافی است ببینیم که برای هر B و $\varepsilon > 0$، می‌توانیم $B_1 < B$ را بیابیم، به‌طوری که $L(A, B_1) \geqslant L(A, B) - \varepsilon$. اولین قدم اثبات را با یافتن افراز

$$A = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = B$$

انجام می‌دهیم، به طوری که طول خط شکسته متناظر ناکمتر از $L(A, B) - \frac{\varepsilon}{2}$ است. از پیوستگی $z(t)$، می‌توانیم یک B_1 را با $t_{N-1} < B_1 < B$ بیابیم به طوری که $|z(B) - z(B_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. اکنون برای افراز تظریف شده $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < B_1 < B$، طول خط شکسته

همچنان ناکمتر از $L(A,B)-\frac{\varepsilon}{2}$ است. بنابراین طول برای افراز $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} = B_1$، بزرگتر یا مساوی با $L(A,B)-\varepsilon$ است و بنابراین $L(A,B_1) \geqslant L(A,B)-\varepsilon$.

برای اثبات پیوستگی از سمت راست در B، فرض کنید $\varepsilon > 0$ حال یک $B < C$ را برداشته و یک افراز $B = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = C$ طوری انتخاب کنید که $L(B,C)-\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=0}^{N-1} |z(t_{j+1}(-z(t_j)|$. در صورت لزوم با در نظر گرفتن یک تظریف از این افراز، از آنجایی که z پیوسته است، می‌توانیم فرض کنیم که $\frac{\varepsilon}{2} > |z(t_1)-z(t_0)|$. اگر قرار دهیم $B_1 = z(t_1)$، آنگاه به‌دست می‌آوریم

$$L(B,C)-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + L(B_1,C).$$

از آنجایی که $L(B,B_1)+L(B_1,C) = L(B,C)$ داریم $L(B,B_1) < \varepsilon$ و لذا

$$L(A,B_1)-L(A,B) < \varepsilon.$$

توجه کنید آنچه که یافته‌ایم، می‌تواند به‌صورت زیر بازگو شود: اگر تابعی با تغییر کراندار باشد، در این‌صورت تابع تغییرات کلی آن نیز چنین است.

نتیجهٔ بعد در قلب نظریه‌ی مشتقپذیری قرار دارد.

قضیه ۲۲.۳. اگر F تابعی با تغییر کراندار روی $[a,b]$ باشد، آنگاه F تقریبا همه جا مشتقپذیر است.
به عبارت دیگر،

$$\lim_{h\to\circ} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

تقریبا به ازای هر $x \in [a,b]$ وجود دارد.

با توجه به نتیجهٔ قبل کافی است حالتی را در نظر بگیریم که F صعودی است. در واقع در ابتدا فرض می‌کنیم، F پیوسته است. این بحث را ساده‌تر می‌سازد. حالت کلی، را به بعد موکول می‌کنیم. (بخش ۱.۳.۳ را ببینید.) در این‌صورت، آموزنده خواهد بود که ماهیت ناپیوستگی‌های احتمالی یک تابع با تغییر کراندار را بیازماییم و مسائل را به حالت «توابع پرشی» تقلیل بدهیم.

با یک لم تکنیکی خوب از ریس[1] شروع می‌کنیم، که متأثر از یک بحث پوششی است.

لم ۲۳.۳. فرض کنید G یک تابع حقیقی مقدار و پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید E مجموعه‌ای از نقاط x باشد، به‌طوری که

به ازای یک $\circ < h_x = h$ $\qquad$ $G(x+h) > G(x)$.

1. Riesz

اگر E ناتهی باشد، آنگاه باید باز باشد و بنابراین می‌تواند به‌صورت اجتماع شمارا و مجزایی از بازه‌های باز $E = \cup(a_k, b_k)$ نوشته شود. اگر (a_k, b_k) بازه ای کراندار در این اجتماع باشد، آنگاه

$$G(b_k) - G(a_k) = \circ.$$

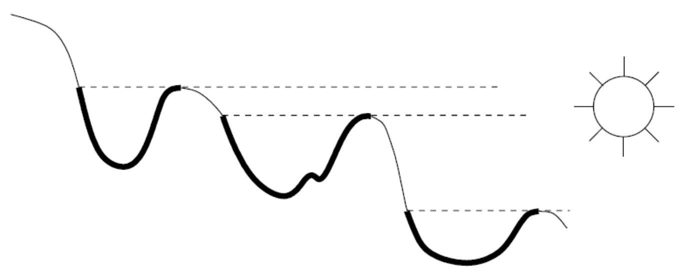
برهان. از آنجایی که G پیوسته است، واضح است که E هرگاه ناتهی باشد، باز است و بنابراین می‌تواند به‌صورت اجتماع شمارا و مجزا از بازه‌های باز نوشته شود (قضیه ۳.۱ فصل ۱). اگر (a_k, b_k) بازه کرانداری را در این تجزیه مشخص کند، آنگاه $a_k \notin E$ بنابراین نمی‌توانیم داشته باشیم $G(b_k) > G(a_k)$. اکنون فرض می‌کنیم که $G(b_k) < G(a_k)$ بنابر پیوستگی، $a_k < c < b_k$ وجود دارد به‌طوری که

$$G(c) = \frac{G(a_k) + G(b_k)}{۲},$$

و در واقع c را دورترین نقطه از راست در بازه (a_k, b_k) انتخاب می‌کنیم. از آنجایی که $c \in E$، $d > c$ وجود دارد به طوری که $G(d) > G(c)$ چون $b_k \notin E$ باید به ازای هر $b_k \leqslant x$ داشته باشیم $G(x) \leqslant G(b_k)$. بنابراین $d < b_k$. چون $G(d) > G(c)$ (بنابرپیوستگی) $c' > d$ و $c' < b_k$ و $G(c') = G(c)$ وجود دارد که متناقض با این حقیقت است که c از راست دورترین نقطه در (a_k, b_k) است. این نشان می‌دهد که باید

داشته باشیم $G(a_k) = G(b_k)$. □

توجه: گاهی این نتیجه به‌دلیل زیر، «لم طلوع خورشید» نامیده می‌شود. اگر فرض کنیم طلوع خورشید از شرق (در راست) با پرتوهای موازی با محور x ها اتفاق می‌افتد، آنگاه نقاط $(x, G(x))$ روی نمودار G با $x \in E$، دقیقا نقاطی هستند که در سایه قرار دارند، این نقاط به طور پر رنگ در تصویر ۵.۳ ظاهر می‌شوند.



شکل ۵.۳: لم طلوع خورشید

یک اصلاح کوچک در برهان لم ۲۳.۳ نتیجه می‌دهد:

نتیجه ۲۴.۳. فرض کنید G روی بازه بسته $[a, b]$ حقیقی مقدار و پیوسته باشد. اگر E مجموعه نقاطی از x را در (a, b) نشان دهد که به ازای یک

$$h > 0$$

، $G(x+h) > G(x)$، آنگاه E تهی یا باز است. در حالت دوم E، اجتماع شمارا و مجزای بازه (a_k, b_k) است و $G(a_k) = G(b_k)$ احتمالا به جز زمانی که $a = a_k$ در این حالت داریم $G(a_k) \leqslant G(b_k)$.

برای برهان قضیه، کمیت

$$\Delta_h(F)(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

را تعریف می‌کنیم.

همچنین **اعداد دینی**[1] در x، به‌صورت

$$D^+(F)(x) = \limsup_{\substack{h \to \circ \\ h > \circ}} \Delta_h(F)(x)$$

$$D_+(F)(x) = \liminf_{\substack{h \to \circ \\ h > \circ}} \Delta_h(F)(x)$$

$$D^-(F)(x) = \limsup_{\substack{h \to \circ \\ h > \circ}} \Delta_h(F)(x)$$

1. Dini Numbers

$$D_-(F)(x) = \liminf_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \Delta_h(F)(x)$$

را در نظر می‌گیریم. به وضوح $D_+ \leqslant D^+$، $D_- \leqslant D^-$ برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که

۱. تقریبا به ازای هر x، $D^+(F)(x) < \infty$.

۲. تقریبا به ازای هر x، $D^+(F)(x) \leqslant D_-(F)(x)$.

در واقع اگر این نتایج برقرار باشند، آنگاه با به‌کار بردن ۲ برای $-F(-x)$ به جای $F(x)$ تقریبا به ازای هر x، به‌دست می‌آوریم

$$D^-(F)(x) \leqslant D_+(F)(x)$$

. بنابراین

$$\text{تقریبا به ازای هر } x \qquad D^+ \leqslant D_- \leqslant D^- \leqslant D_+ \leqslant D^+ < \infty.$$

بنابراین هر چهار عدد دینی متناهی و تقریبا برابر هستند، بنابراین تقریبا به ازای هر x، $F'(x)$ وجود دارد.

یادآوری می‌کنیم که فرض می‌کنیم F صعودی، کراندار و روی $[a, b]$ پیوسته است. به ازای ثابت $\gamma > 0$ فرض کنید

$$E_\gamma = \{x : D^+(F)(x) > \gamma\}.$$

در ابتدا، نشان می‌دهیم که E_γ اندازه‌پذیر است. (برهان این حکم ساده در تمرین ۱۴ شرح داده می‌شود.) سپس نتیجه ۲۴۰۳ را برای تابع $G(x) = F(x) - \gamma x$ به کار می‌بریم، و توجه می‌کنیم که در این‌صورت داریم $E_\gamma \subset \cup_k (a_k, b_k)$، که در آن $F(b_k) - F(a_k) \geqslant \gamma(b_k - a_k)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} m(E_\gamma) &\leqslant \sum_k m((a_k, b_k)) \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma} \sum_k F(b_k) - F(a_k) \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma}(F(b) - F(a)). \end{aligned}$$

بنابراین وقتی که γ به بی‌نهایت میل می‌کند، $m(E_\gamma) \to 0$ و از آنجایی که به ازای هر γ داریم، $\{D^+F(x) < \infty\} \subset E_\gamma$، ثابت می‌شود که تقریبا همه جا

$$D^+F(x) < \infty$$

است.

اعداد حقیقی r و R را ثابت در نظر گرفته‌ایم، به‌طوری که $R > r$، فرض می‌کنیم

$$E = \{x \in [a, b] : D^+(F)(x) > R \quad \text{و} \quad r > D_-(F)(x)\}.$$

به محض این‌که ثابت کنیم $m(E) = 0$، نشان داده‌ایم تقریبا همه جا

$D^+(F)(x) \leqslant D_(F)(x)$ به این منظور کافی است، فرض کنیم R و r روی مجموعهٔ اعداد گویا با شرط $R > r$ تغییر می‌کنند.

برای اثبات این‌که $m(E) = \circ$، فرض می‌کنیم $m(E) > \circ$ و به تناقض می‌رسیم. چون $\frac{R}{r} > ۱$ می‌توانیم مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ را بیابیم به‌طوری که $E \subset \mathcal{O} \subset (a,b)$ و $m(\mathcal{O}) < m(E)\frac{R}{r}$.

اکنون می‌توانیم $\mathcal{O}$ را به‌صورت $\cup_n I_n$ با بازه‌های باز مجزای I_n بنویسیم. $n_\circ$ را ثابت بگیرید و نتیجهٔ ۲۴.۳ را برای تابع

$$G(x) = -F(-x) + rx$$

روی بازه $-I_n$ به‌کار ببرید. بازتاب نسبت به مبدا به یک مجموعهٔ باز $\bigcup_k (a_k, b_k)$ مشمول در I_n منجر می‌شود، که در آن بازه‌های (a_k, b_k) با شرط

$$F(b_k) - F(a_k) \leqslant r(b_k - a_k),$$

مجزا هستند. در این حالت روی هر بازه (a_k, b_k) نتیجه ۲۴.۳ را این‌بار با شرط

$$G(x) = F(x) - Rx$$

به‌کار می‌بریم. بنابراین یک مجموعهٔ باز $\mathcal{O}_n = \cup_{k,j}(a_{k,j}, b_{k,j})$ از بازه‌های باز مجزای $(a_{k,j}, b_{k,j})$ را به‌دست می‌آوریم که به ازای هر j، $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ و

$$F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \geqslant R(a_{k,j} - b_{k,j}).$$

سپس با استفاده از این حکم که F صعودی است، در می‌یابیم که

$$\begin{aligned} m(\mathcal{O}_n) &= \sum_{k,j}(a_{k,j} - b_{k,j}) \leqslant \frac{۱}{R}\sum_{k,j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \\ &\leqslant \frac{۱}{R}\sum_k F(b_k) - F(a_k) \leqslant \frac{r}{R}\sum_k (b_k - a_k) \\ &\leqslant \frac{r}{R} m(I_n). \end{aligned}$$

توجه کنید $\mathcal{O}_n \supset E \cap I_n$، از آنجا که به ازای هر $x \in E$، $D^+F(x) > R$ و $r > D_-F(x)$ یقینا $I_n \supset \mathcal{O}_n$. اکنون روی n مجموع می‌گیریم. بنابراین

$$m(E) = \sum_n m(E \cap I_n) \leqslant \sum_n m(\mathcal{O}_n) \leqslant \frac{r}{R}\sum m(I_n) = \frac{r}{R} m(\mathcal{O}) < m(E).$$

نامساوی اکید یک تناقض را نشان می‌دهد و قضیه ۲۲.۳ حداقل زمانی که F پیوسته است، ثابت می‌شود.

بیایید ببینیم اگر F تابعی یکنوا باشد آنگاه عبارت ۶.۳ تا چه حدی صادق است.

نتیجه ۲۵.۳. اگر F صعودی و پیوسته باشد، آنگاه F' تقریبا همه جا وجود دارد. به‌علاوه F' اندازه‌پذیر و نامنفی است و

$$\int_a^b F'(x) \leqslant F(b) - F(a).$$

به‌خصوص، اگر F روی $\mathbb{R}$ کراندار باشد، آنگاه F' روی $\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر است.

برهان. به ازای $n \geqslant ۱$ ، خارج قسمت زیر را در نظر می‌گیریم

$$G_n(x) = \frac{F(x+۱/n) - F(x)}{۱/n}.$$

با توجه به قضیه قبل، تقریبا به ازای هر x داریم $G_n(x) \to F'(x)$، که مخصوصا نشان می‌دهد که F' اندازه‌پذیر و نامنفی است.

اکنون F را به صورت یک تابع پیوسته به کل $\mathbb{R}$ توسیع می‌دهیم. با استفاده از لم فاتو (لم ۷.۲ فصل ۲) می‌دانیم که

$$\int_a^b F'(x)dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_a^b G_n(x)dx.$$

برای تکمیل برهان، کافی است توجه کنید که

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n(x)dx =& \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_a^b F(x+\frac{۱}{n})dx - \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_a^b F(x)dx\\ =& \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_{a+\frac{۱}{n}}^{b+\frac{۱}{n}} F(y)dy - \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_a^b F(x)dx\\ =& \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_a^{b+\frac{۱}{n}} F(x)dx - \frac{۱}{\frac{۱}{n}} \int_a^{b+\frac{۱}{n}} F(x)dx.\end{aligned}$$

از آنجایی که F پیوسته است، وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، عبارت‌های اول و دوم به ترتیب به $F(b)$ و $F(a)$ همگرا هستند. $\square$

همان‌گونه که به‌وسیلهٔ مثال مهم زیر نشان داده می‌شود، اگر فقط همه توابع صعودی پیوسته را مجاز بدانیم، نمی‌توانیم از نامساوی ذکر شده در نتیجه فراتر برویم.

تابع کانتور-لبگ

ساختار ساده زیر به تابع پیوسته $F:[0,1]\to[0,1]$ منجر می‌شود، که صعودی است $F(0)=0$ و $F(1)=1$ اما تقریبا همه جا $F'(x)=0$ بنابراین F با تغییر کراندار است، اما

$$\int_a^b F'(x)dx \neq F(b)-F(a).$$

مجموعهٔ کانتور سه سه‌ای استاندارد $\mathcal{C}\subset[0,1]$ را در نظر بگیرید که در پایان بخش اول در فصل ۱ شرح داده شد. به یاد داشته باشید که

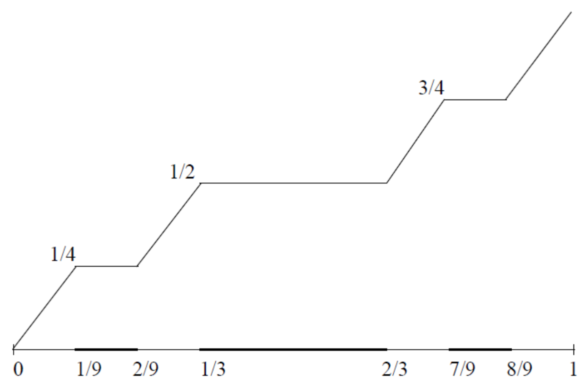
$$\mathcal{C}=\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k,$$

و در آن هر C_k اجتماع 2^k بازه‌ی مجزای بسته است. برای مثال، $C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. فرض کنید F_1 تابع صعودی پیوسته روی $[0,1]$ باشد، به طوری که $F_1(0)=0$ اگر $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$ آنگاه $F_1(x)=\frac{1}{2}$ و $F_1(1)=1$ و F_1 روی C_1 خطی است. به‌طور مشابه فرض کنید $F_2(x)$

صعودی و پیوسته باشد و

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ اگر} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant \frac{2}{9} \text{ اگر} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \text{ اگر} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{9} \leqslant x \leqslant \frac{8}{9} \text{ اگر} \\ 1 & x = 1 \text{ اگر}, \end{cases}$$

و F_2 روی C_2 خطی است. تصویر ۶.۳ را ببینید.

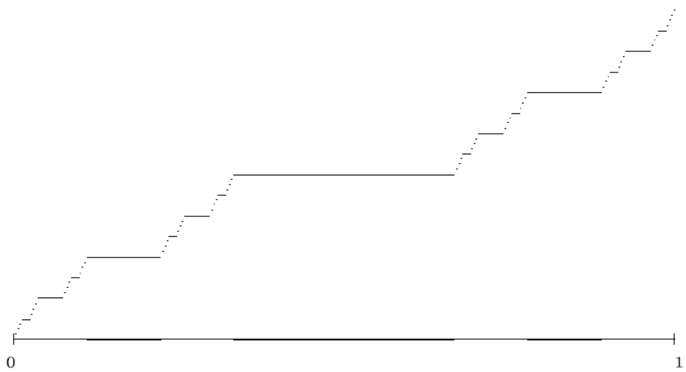


شکل ۶.۳: نحوه ساختن F_2

این فرایند منجر به دنباله‌ای از توابع صعودی $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌شود به‌طوری که به وضوح داریم

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leqslant 2^{-n-1}.$$

بنابراین $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به حد پیوستهٔ F همگراست، که **تابع لبگ- کانتور** (تصویر ۷.۳) [1] نامیده می‌شود.



شکل ۷.۳: تابع لبگ-کانتور

براساس نحوه ساخت، F صعودی است، $F(0) = 0$ و $F(1) = 1$ و می‌بینیم که F روی هر بازه از متمم مجموعهٔ کانتور ثابت است. از آنجایی که $m(\mathcal{C}) = 0$ در می‌یابیم که تقریبا همه جا $F'(x) = 0$ همانطور که انتظار داشتیم.

۱. خواننده می‌تواند بررسی کند که در واقع این تابع بر تابع ارائه شده در تمرین۲ فصل ۲ منطبق است.

مفروضات این بخش همان‌طور که در مثال قبل دیدیم، نشان می‌دهد که فرض با تغییر کرانداری وجود یک مشتق تقریبا همه جا و نه برقراری فرمول زیر

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$$

را تضمین می‌کند. در بخش بعد شرطی را روی تابع قرار می‌دهیم که مشکل برقراری تساوی بالا را کاملا حل می‌کند.

توابع پیوستهٔ مطلق

تابع F تعریف شده روی $[a,b]$ **پیوستهٔ مطلق** نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری که

$$\text{اگر } \sum_{k=۱}^{N}(b_k - a_k) < \delta \text{، آنگاه } \sum_{k=۱}^{N}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon \text{،}$$

و بازهای (a_k, b_k) که درآن $k = ۱, ..., N$ مجزا هستند. نکات کلی بدین ترتیب هستند.

- با توجه به تعریف، واضح است که توابع پیوستهٔ مطلق، پیوسته و در حقیقت پیوستهٔ یکنواخت هستند.

- اگر F روی یک بازه‌ی کراندار پیوستهٔ مطلق باشد، آنگاه روی همان بازه با تغییر کراندار نیز است. به‌علاوه، به آسانی دیده

می‌شود که تغییرات کلی آن پیوسته است (درواقع پیوستهٔ مطلق است). به‌عنوان نتیجه تجزیه چنین تابع F به صورت دو تابع یکنوا که در بخش ۱۶.۳ ارائه شده نشان می‌دهد، که هر یک از این توابع پیوسته هستند.

- اگر $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ که در آن f انتگرالپذیر است، آنگاه F پیوستهٔ مطلق است. این حکم بلافاصله از قسمت ۲ قضیه ۱۲.۲ فصل ۲ به‌دست می‌آید.

در واقع این نکته آخر نشان می‌دهد که اگر بخواهیم ثابت کنیم که $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a),$ پیوستگی مطلق یک شرط لازم قابل اعمال روی F است.

قضیه ۲۶.۳. اگر F روی $[a,b]$ پیوسته مطلق باشد، آنگاه تقریبا همه جا $F'(x)$ وجود دارد. به‌علاوه اگر تقریبا به ازای هر x، $F'(x) = 0$ آنگاه F ثابت است.

از آنجایی که یک تابع پیوستهٔ مطلق تفاضل دو تابع پیوستهٔ یکنوا است، همان‌طور که قبلا دیده‌ایم وجود $F'(x)$ تقریبا به ازای هر x، از آنچه که قبلا ثابت کرده‌ایم به‌دست می‌آید. برای اثبات این‌که تقریبا همه جا $F'(x) = 0$ این نتیجه را می‌دهد که F ثابت است، به یک

صورت قوی‌تری از بحث پوششی لم ۲.۳ نیاز است. در این لحظه، به حالت کلی بعد d برمی‌گردیم، تا این بحث را توصیف کنیم.

گردایه $\mathcal{B}$ از گوی‌های $\{B\}$ یک **پوشش ویتالی** از مجموعهٔ E نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x \in E$ و هر $\eta > 0$ یک گوی $B \in \mathcal{B}$ موجود باشد به طوری که $x \in B$ و $m(B) < \eta$. بنابراین هر نقطه به‌وسیله گوی‌هایی با اندازه به دلخواه کوچک پوشیده می‌شود.

لم ۲۷.۳. فرض کنید E مجموعه‌ای با اندازهٔ متناهی و $\mathcal{B}$ یک پوشش ویتالی از E باشد. برای هر $\delta > 0$ می‌توانیم تعداد متناهی از گوی‌های B_1، $\cdots$، B_N را در $\mathcal{B}$ بیابیم که مجزا هستند و

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \geqslant m(E) - \delta.$$

برهان. مکررا لم مقدماتی ۲.۳ را با هدف خالی کردن مجموعه E به کار می‌بریم. کافی است δ را به اندازهٔ کافی کوچک، مثل $\delta < m(E)$، در نظر بگیریم و با استفاده از تنها لم پوششی ذکر شده، می‌توانیم یک گردایه‌ی اولیه گوی‌های B_1، $\cdots$، B_N در $\mathcal{B}$ بیابیم، به‌طوری که $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geqslant \gamma^\delta$ (برای سهولت در نمادگذاری نوشته‌ایم $\delta = 3^{-d}$) در واقع اولا برای یک زیرمجموعهٔ فشرده‌ی مناسب E' از E داریم $m(E') \geqslant \delta.$ به‌دلیل فشردگی E' می‌توانیم آن را به‌وسیلهٔ تعداد متناهی

گوی از $\mathcal{B}$ بپوشانیم و آنگاه لم قبل به ما اجازه می‌دهد تا یک زیرگردایه‌ی مجزا از گوی‌های B_1، …، B_N را انتخاب کنیم به‌طوری که

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geqslant \gamma m(E') \geqslant \gamma_\delta,$$

با انتخاب B_1، …، B_N همانند دنباله‌ی اولیه‌مان از گوی‌ها، دو احتمال را در نظر می‌گیریم: $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geqslant m(E) - \delta$ و با $N = N_1$ به سرانجام می‌رسیم، و یا برعکس $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) < m(E) - \delta$. در حالت دوم، با $E_2 = E - \bigcup_{i=1}^{N_1} \bar{B}_i$ داریم $m(E_2) > \delta$ (به یاد آورید که $m(\bar{B}_i) = m(B_i)$) سپس دوباره این بحث را، با انتخاب زیر مجموعهٔ فشرده E' از E_2 با $m(E') \geqslant \delta$ و توجه به این‌که گوی‌ها، که در $\mathcal{B}$ از $\bigcup_{i=1}^{N_1} \bar{B}_i$ مجزا هستند، همچنان E_2 را می‌پوشانند و در واقع یک پوشش ویتالی برای E_2 و در نتیجه برای E'_2 هستند، تکرار می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم یک گردایه‌ی مجزای متناهی از گوی‌های B_i که در آن $N_1 \leqslant i \leqslant N_2$ است را انتخاب کنیم، به طوری که $\sum_{N_1 < i \leqslant N_2} m(B_i) \geqslant \gamma\delta$. بنابراین، $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geqslant 2\gamma\delta$ و گوی‌های B_i، که در آن $1 \leqslant i \leqslant N_2$ مجزا هستند.

دوباره، دو حالت دیگر را در نظر می‌گیریم. آیا

$$\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geqslant m(E) - \delta$$

یا نه. در حالت اول با $N_2 = N$ به سرانجام می‌رسیم و در حالت دوم مثل قبل عمل می‌کنیم. اگر با ادامه این روش به مرحله k ام رسیده و قبل از آن متوقف نشده بودیم، گردایه‌ای از گوی‌های مجزا با مجموع اندازه ناکمتر از $k\gamma\delta$ انتخاب کنیم. در هر صورت دستاوردهای این فرآیند اگر $k \geqslant \frac{m(E)-\delta}{\gamma\delta}$ در مرحله k ام ما را به هدف مورد انتظار می‌رساند، چون در این حالت

$$\sum_{i=1}^{N_k} m(B_i) \geqslant m(E) - \delta$$

. □

یک نتیجهٔ ساده در زیر می‌آید.

نتیجه ۲۸.۳. می‌توانیم انتخاب گوی‌ها را چنان مرتب کنیم که

$$m(E - \bigcup_{i=1}^{N} Bi) < 2\delta.$$

در واقع، فرض کنید $\mathcal{O}$ مجموعه‌ای باز باشد و

$$\mathcal{O} \supset E$$

و $m(\mathcal{O} \setminus E) < \delta$. از آنجایی که با یک پوشش ویتالی E سر و کار داریم می‌توانیم همه انتخاب‌های بالا را به گوی‌های مشمول در $\mathcal{O}$ محدود

کنیم. اگر این کار را انجام دهیم، آنگاه داریم $(E\setminus\bigcup_{i=1}^{N} B_i)\cup\bigcup_{i=1}^{N} B_i \subset \mathcal{O}$ که در آن اجتماع روی طرف چپ یک اجتماع مجزا است. بنابراین

$$m(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i) \leqslant m(\mathcal{O}) - m(\bigcup_{i=1}^{N} B_i) \leqslant m(E) + \delta - (m(E) - \delta) = 2\delta.$$

اکنون به وضعیت خط حقیقی برمی‌گردیم. برای تکمیل برهان قضیه کافی است نشان دهیم که تحت فرضیات قضیه داریم $F(b) = F(a)$ ، زیرا اگر این ثابت شود ما می‌توانیم بازه $[a, b]$ را با زیر بازه‌ها جایگزین کنیم. اکنون فرض کنید E مجموعه‌ای از نقاط $x \in (a, b)$ باشد به طوری که $F'(x)$ وجود دارد و صفر است. بنابر فرض $m(E) = b - a$، سپس برای لحظاتی $\varepsilon > 0$ را ثابت در نظر بگیرید. از آنجا که به ازای هر $x \in E$ داریم

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| = 0,$$

در این‌صورت به ازای هر $\eta > 0$ بازه باز $I = (a_x, b_x) \subset [a, b]$ شامل x را داریم و

$$b_x - a_x < \eta \qquad \text{و} \qquad |F(b_x) - F(a_x)| \leqslant \varepsilon(b_x - a_x).$$

گردایه‌ی این بازه‌ها یک پوشش ویتالی E را می‌سازد و در نتیجه با استفاده از لم برای $\delta > 0$، می‌توانیم تعداد متناهی بازه I که در آن

$1 \leqslant i \leqslant N$ ، $I_i = (a_i, b_i)$ را انتخاب کنیم که مجزا هستند و به طوری که

$$\sum_{i=1}^{N} m(I_i) \geqslant m(E) - \delta = (b-a) - \delta. \qquad (9.3)$$

در این حالت $|F(b_i) - F(a_i)| \leqslant \varepsilon(b-a)$ و با جمع کردن این نامساوی‌ها می‌رسیم به این‌که

$$\sum_{i=1}^{N} |F(b_i) - F(a_i)| \leqslant \varepsilon(b-a),$$

زیرا I_i ها مجزا هستند و در $[a,b]$ قرار دارند. سپس متمم $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ را در $[a,b]$ در نظر بگیرید. این مجموعه با توجه به ۹.۳ شامل تعداد متناهی بازه بسته $\bigcup_{k=1}^{M}[\alpha_k, \beta_k]$ با طول کلی نابیشتر از δ است. بنابراین با استفاده از پیوستگی مطلق F (اگر δ به‌طور مناسب برحسب ε انتخاب شده باشد) داریم

$$\sum_{k=1}^{M} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon$$

. در مجموع، آنگاه

$$|F(b) - F(a)| \leqslant \sum |F(b_i) - F(a_i)| + \sum_{k=1}^{M} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

از آنجایی که ε، یک مقدار مثبت و دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که $F(b) - F(a) = 0$. همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

حد اعلی تلاش‌هایمان در قضیه زیر گنجانده شده است. به خصوص مشکل دوممان در برقراری ارتباط متقابل بین مشتقپذیری و انتگرالگیری را حل می‌کند.

قضیه ۲۹.۳. فرض کنید F روی $[a,b]$ پیوستهٔ مطلق باشد. در این‌صورت F' تقریبا همه جا وجود دارد و انتگرالپذیر است. به‌علاوه

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy \qquad \text{به ازای هر } a \leqslant x \leqslant b،$$

. با انتخاب $x = b$ می‌رسیم به اینکه $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(y)dy$.

برعکس، اگر f روی $[a,b]$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه یک تابع پیوستهٔ مطلق F وجود دارد، به طوری که تقریبا همه جا $F'(x) = f(x)$، و در واقع، داریم $F(x) = \int_a^x f(y)dy$.

برهان. از آنجایی که می‌دانیم یک تابع پیوستهٔ مطلق حقیقی مقدار تفاضل دو تابع صعودی پیوسته است، نتیجه ۲۵.۳ نشان می‌دهد که F' روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است. اکنون فرض کنید $G(x) = \int_a^x F'(y)dy$. در این‌صورت G پیوستهٔ مطلق است، بنابراین تفاضل $G(x) - F(x)$ نیز چنین است. بنا بر قضیه مشتقگیری لبگ (قضیه ۳.۳) می‌دانیم

که تقریبا به ازای هر x، $G'(x) = F'(x)$ است. در نتیجه تفاضل $F - G$ تقریبا همه جا مشتق ۰ دارد. بنابر قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که $F - G$ ثابت است و محاسبه‌ی این عبارت در $x = a$ نتیجهٔ مورد انتظار را ارائه می‌دهد.

عکس آن، نتیجه‌ای است که پیش از این ساخته‌ایم، به عبارتی $\int_a^x f(y)dy$ پیوستهٔ مطلق است و قضیه مشتقپذیری لبگ نتیجه می‌دهد که تقریبا همه جا، $F'(x) = g(x)$. $\square$

مشتقپذیری توابع پرشی

اکنون توابع یکنوایی را می‌آزماییم که پیوسته فرض نشده‌اند. تحلیل پایانی به ما این اجازه را می‌دهد تا فرض پیوستگی را که پیش از این در برهان قضیه (۲۲.۳) مطرح شد، حذف کنیم.

همانند گذشته، فرض می‌کنیم که F صعودی و کراندار است. به خصوص این دو شرط تضمین می‌کنند که حدود

$$F(x^+) = \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} F(y) \qquad \text{و} \qquad F(x^-) = \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F(y)،$$

وجود دارند. البته در این‌صورت $F(x^-) \leqslant F(x) \leqslant F(x^+)$ و اگر

$$F(x^-) = F(x^+)$$

تابع F در x پیوسته است. در غیر این‌صورت می‌گوییم که ناپیوستگی جهشی دارد. خوشبختانه ارتباط با این ناپیوستگی‌ها قابل مدیریت است، چرا که تنها تعداد شمارایی از آن‌ها می تواند موجود باشد.

لم ۳.۳۰. تابع صعودی کراندار F روی $[a,b]$ حداکثر تعداد شمارایی ناپیوستگی دارد.

برهان. اگر F در x ناپیوسته باشد، عدد گویای r_x را طوری انتخاب می‌کنیم، که

$$F(x^-) < r_x < F(x^+)$$

. اگر f در x ناپیوسته و $x < z$ باشد، باید داشته باشیم

$$F(x^+) \leqslant F(z^-)$$

. بنابراین $r_x < r_z$. در نتیجه هر عدد گویا حداکثر متناظر با یک نقطه‌ی ناپیوستگی از F است. بنابراین F حداکثر شمارا نقطه ناپیوستگی دارد. □

اکنون فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نشانگر نقاطی باشد که F در آن‌ها ناپیوسته است و فرض کنید α_n جهش F در x_n را نشان دهد، به عبارتی $\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$. در این‌صورت

$$F(x_n^+) = F(x_n^-) + \alpha_n,$$

و به ازای یک θ_n با شرط $\circ \leqslant \theta_h \leqslant ۱$

$$F(x_n) = F(x_n^-) + \theta_n \alpha_n.$$

اگر فرض کنیم

$$j_n(x) = \begin{cases} \circ & \text{اگر } x < x_n \\ \theta_n & \text{اگر } x = x_n \\ ۱ & \text{اگر } x > x_n, \end{cases},$$

آنگاه **تابع جهش** متناظر با F را به صورت

$$J_F(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n j_n(x),$$

تعریف می‌کنیم. برای سهولت و هنگامی‌که ابهامی نباشد، J را به جای J_F می‌نویسیم. ملاحظهٔ اولمان این است که اگر F کراندار باشد، آنگاه باید داشته باشیم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n \leqslant F(b) - F(a) < \infty$$

و بنابراین سری معرف J به طور یکنواخت و به‌طور مطلق همگرا است.

لم ۳۱.۳. اگر F روی $[a,b]$ صعودی و کراندار باشد، آنگاه:

۱. $J(x)$ دقیقا در نقاط $\{x_n\}$ ناپیوسته است، و در x_n یک جهش برابر با جهش F دارد.

۲. تفاضل $F(x) - J(x)$ صعودی و پیوسته است.

برهان. اگر به ازای تمام n ها داشته باشیم $x \neq x_n$، هر j_n در x پیوسته خواهد بود و از آنجایی که سری به طور یکنواخت همگراست، J باید در x پیوسته باشد. اگر برای یک N، $x = x_N$ آنگاه می‌نویسیم

$$J(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n j_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

مطابق بحث فوق، سری طرف راست در x پیوسته است. به وضوح، مجموع متناهی در x_N ناپیوستگی جهشی با پرش به اندازه α_N، دارد.

برای ۲ توجه می‌کنیم که ۱ بلافاصله نتیجه می‌دهد که $F-J$ پیوسته است. سرانجام اگر $y > x$ داریم

$$J(y) - J(x) \leq \sum_{x \leq x_n \leq y} \alpha_n \leq F(y) - F(x),$$

که در آن نامساوی پایانی از اینکه F صعودی است، به دست می‌آید. بنابراین

$$F(x) - J(x) \leq F(y) - J(y),$$

و تفاضل $F-J$ صعودی است. $\square$

از آنجایی که می‌توانیم بنویسیم $F(x)=[F(x)-J(x)]+J(x)$، وظیفه‌ی نهایی ما اثبات این حکم است که J تقریبا همه جا مشتق‌پذیر است.

قضیه ۳.۳۲. اگر J تابع پرشی در نظر گرفته شده در بالا باشد، آنگاه $J'(x)$ تقریبا همه جا وجود دارد و صفر می‌شود.

برهان. به ازای هر $\varepsilon>0$ داده شده، توجه می‌کنیم مجموعهٔ E از x هایی که

$$\limsup_{x\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}>\varepsilon, \tag{۳.۱۰}$$

مجموعه اندازه‌پذیر است. (برهان این حکم کوچک درتمرین ۱۴ شرح داده می‌شود.) فرض کنید $\delta=m(E)$. باید نشان دهیم $\delta=0$. اکنون توجه کنید از آنجایی که سری $\sum\alpha_n$ در تعریف J همگراست، بنابراین به ازای هر η، که بعدا انتخاب می‌شود، می‌توانیم یک N، به قدر کافی بزرگ بیابیم که $\sum_{n>N}\alpha_n<\eta$. در این صورت می‌نویسیم

$$J_0(x)=\sum_{n>N}\alpha_n j_n(x),$$

و بنابر نوع انتخاب‌ما از N داریم

$$J_0(b)-J_0(a)<\eta. \tag{۳.۱۱}$$

در این حالت $J - J_\circ$ مجموعی متناهی از عبارت‌های $\alpha_n j_n(x)$ است و بنابراین مجموعه‌ای از نقاطی که در شرط ۱۰.۳ صدق می‌کند، با جایگزینی J به وسیله $J_\circ$، و از مجموعهٔ E در حداکثر یک مجموعهٔ متناهی، از نقاط $\{x_1, ..., x_N\}$ متمایز می‌شود. بنابراین می‌توانیم یک مجموعه فشرده K با شرط $m(K) \geq \frac{\delta}{2}$ بیابیم، به طوری که به ازای هر $x \in K$، $\limsup\limits_{h \to \circ} \frac{J_\circ(x+h) - J_\circ}{h} > \varepsilon$.

بنابراین بازه‌های (a_x, b_x) شامل x که، $x \in K$ وجود دارند و بنابراین $J_\circ(b_x) - J_\circ(a_x) > \varepsilon(b_x - a_x)$ ابتدا می‌توانیم گردایه‌ای متناهی از این بازه‌ها که K را می‌پوشاند، انتخاب کنیم و سپس لم ۲.۳ را به کار بریم تا بازه‌های $I_n, ..., I_1$ را انتخاب کنیم که مجزایند و برای آن‌ها $\sum_{j=1}^{n} \geq m(I_j) \geq \frac{m(K)}{3}$. بازه‌های $I_j = (a_j, b_j)$ البته در شرط

$$J_\circ(b_j) - J_\circ(a_j) > \varepsilon(b_j - a_j)$$

صدق می کنند.

اکنون

$$J_\circ(b) - J_\circ(a) \geq \sum_{j=1}^{N} J_\circ(b_j) - J_\circ(a_j) > \varepsilon \sum (b_j - a_j) \geq \frac{\varepsilon}{3} m(K) \geq \frac{\varepsilon}{6}\delta,$$

و لذا با توجه به ۱۱.۳، $\epsilon\frac{\delta}{6} < \eta$ و چون انتخاب η دلخواه است، به دست می‌آید $\delta = \circ$. □

۴.۳ خم‌های با طول متناهی و نامساوی ایزوپریمتری

به مطالعهٔ بیشتر خم‌های با طول متناهی می‌پردازیم و ابتدا برقراری فرمول

$$L = \int_a^b (x'(t)^۲ + y'(t)^۲)^{\frac{۱}{۲}} dt, \qquad (۱۲.۳)$$

را برای طول L از خم پارامتری شده به وسیله $(x(t), y(t))$ اثبات می‌کنیم.

قبلا دیده‌ایم که خم‌های با طول متناهی دقیقا خم‌هایی هستند که در آن‌ها علاوه براینکه، $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته فرض می‌شوند، بلکه این توابع با تغییر کراندار نیز هستند. هرچند، یک مثال ساده نشان می‌دهد که فرمول ۱۲.۳ در این مبحث همیشه برقرار نیست. در واقع فرض کنید $x(t) = F(t)$ و $y(t) = F(t)$ که در آن F تابع کانتور–لبگ است و $۰ \leq t \leq ۱$. در این صورت اثر این خم پارامتری خط راست از $(۰, ۰)$ به $(۱, ۱)$ است و طول $\sqrt{۲}$ دارد. در حالی‌که تقریبا همه جا به ازای هر t، $x'(t) = y'(t) = ۰$.

در واقع فرمول انتگرال بیان کننده طول L برقرار است اگر فرض کنیم توابع مختصاتی صورت پارامتری، پیوسته مطلق نیز هستند.

قضیه ۳۳.۳. فرض کنید $(x(t), y(t))$ یک خم تعریف شده برای $a \leq t \leq b$ باشد. اگر هردو تابع $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته مطلق باشند، در این صورت خم با طول متناهی است و اگر L، نمایشگر طولش باشد، داریم

$$L = \int_a^b (x'(t)^۲ + y'(t)^۲)^{\frac{۱}{۲}} dt,$$

توجه کنید اگر $F(t) = x(t) + iy(t)$ پیوسته مطلق باشد، آنگاه به طور خودکار با تغییر کراندار است و بنابراین خم با طول متناهی است. تساوی ۱۲.۳ نتیجه‌ای بلافصل از قضیه زیر است که می‌تواند به‌عنوان صورت دقیق‌تری از نتیجه ۲۵.۳ برای توابع پیوستهٔ مطلق دیده شود.

قضیه ۳۴.۳. فرض کنید F روی $[a, b]$ مختلط مقدار و پیوسته مطلق باشد. در این صورت

$$T_F(a, b) = \int_a^b |F'(t)| dt.$$

در واقع به‌دلیل برقراری قضیه ۲۹.۳، به ازای هر افراز

$$a = t_۰ < t_۱ < ... < t_n = b$$

از $[a,b]$ داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=۱}^{N}|F(t_j)-f(t_{j-۱})| &= \sum_{j=۱}^{N}\left|\int_{t_{j-۱}}^{t_j}F'(t)dt\right| \\ &\le \sum_{j=۱}^{N}\int_{t_{j-۱}}^{t_j}|F'(t)|dt \\ &= \int_a^b|F'(t)|dt.\end{aligned}$$

لذا این ثابت می‌کند که

$$T_F(a,b)\le\int_a^b|F'(t)|dt. \qquad (۱۳.۳)$$

برای اثبات عکس نامساوی، $\varepsilon>۰$ را ثابت در نظر بگیرید و با استفاده از قضیه ۱۷.۲ فصل ۲ یک تابع پله‌ای g روی $[a,b]$ بیابید، به طوری که $F'=g+h$ و $\int_a^b|h(t)|dt\le\varepsilon$. قرار دهید $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ و $H(x)=\int_a^x h(t)dt$. در این صورت $F=G+H$ و بدین صورت به آسانی مشاهده می‌شود که

$$T_F(a,b)\ge T_G(a,b)-T_H(a,b).$$

در این حالت، با توجه به ۱۳.۳، $T_H(a,b)<\varepsilon$ و بنابراین

$$T_F(a,b)\ge T_G(a,b)-\varepsilon.$$

اکنون بازه $[a,b]$ را به صورت $a=t_{\circ}<...<t_N=b$ افرازکنید، به‌طوری که تابع پله‌ای g روی هر بازهٔ $(t_{j-۱},t_j)$ که در آن $j=۱,۲,\ldots,N$ ثابت است. در این صورت

$$\begin{aligned}T_G(a,b) &\geq \sum_{j=۱}^{N}\left|G(t_j)-G(t_{j-۱})\right|\\&=\sum_{j=۱}^{N}\left|\int_{t_{j-۱}}^{t_j} g(t)dt\right|\\&=\sum\int_{t_{j-۱}}^{t_j}|g(t)|dt\\&=\int_a^b|g(t)|dt,\end{aligned}$$

از آنجایی که، $\int_a^b|g(t)|dt \geq \int_a^b|F'(t)|dt$، به‌عنوان یک نتیجه به این می‌رسیم که

$$T_F(a,b)\geq\int_a^b|F'(t)|dt-۲\varepsilon,$$

و با فرض $\varepsilon\to\circ$، حکم و نیز قضیه ثابت می‌شود.

اکنون هر خم (تصویر نگاشت $t\to z(t)$) در واقع می‌تواند به شکل‌های بسیار متفاوتی پارامتری می‌شود. با این وجود یک خم با طول متناهی به یک پارامتری‌سازی یکتای طبیعی، پارامتری‌سازی طول قوس، متناظر شده است. در واقع فرض کنید $L(A,B)$ تابع

طول را نشان می‌دهد (بخش ۳,۱ را ببینید.) و به ازای متغیر t در $[a,b]$ فرض کنید $s = s(t) = L(a,t)$. در این صورت $s(t)$، طول قوس، یک تابع صعودی پیوسته است که $[a,b]$ را به $[0,L]$ می‌نگارد، که در آن L طول منحنی است. پارامتری‌سازی طول قوس منحنی اکنون به وسیله زوج $\tilde{z}(s) = \tilde{x}(s) + i\tilde{y}(s)$ داده می‌شود که در آن به ازای $s = s(t)$، $\tilde{z}(s) = z(t)$. توجه کنید در این روش تابع $\tilde{z}$ روی $[0,L]$ خوش تعریف است، زیرا اگر $s(t_1) = s(t_2)$ و $t_1 < t_2$ ، در واقع $z(t)$ در بازه $[t_1,t_2]$ تغییرنمی‌کند و بنابراین $z(t_1) = z(t_2)$. به علاوه به ازای هر زوج $s_1, s_2 \in [0,L]$ داریم، $|\tilde{z}(s_1) - \tilde{z}(s_1)| \geq |s_1 - s_2|$، زیرا طرف چپ نامساوی فاصله بین دو نقطه روی منحنی است، در حالی‌که طرف راست قسمتی از منحنی متصل با این نقاط است. همچنین وقتی s از 0 تا L تغییر می‌یابد $\tilde{z}(s)$ همان نقاط (با همان ترتیب) را که وقتی t از a تا b تغییرمی‌کند $z(t)$ می‌پیماید، رسم می‌کند.

قضیه ۳.۳۵. فرض کنید که $(x(t), y(t))$، $a \leq t \leq b$، یک خم با طول متناهی است که طول L دارد. پارامتری‌سازی طول قوس

$$\tilde{z}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$$

توصیف شده در بالا را درنظر بگیرید. در این‌صورت تقریبا به ازای

هر $s \in [0, L]$، $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ پیوسته مطلق هستند، $|\tilde{z}'(s)| = 1$ و داریم

$$L = \int_0^L (\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2)^{\frac{1}{2}} ds.$$

برهان. توجه کنید که $|\tilde{z}(s_1) - \tilde{z}(s_2)| \leq |s_1 - s_2|$ بنابراین بلافاصله به‌دست می‌آید که $\tilde{z}(s)$ پیوسته مطلق است، پس تقریبا همه‌جا مشتقپذیر است. به علاوه این نامساوی ثابت می‌کند که تقریبا به ازای هر s، $|\tilde{z}'(s)| \leq 1$. با توجه به تعریف، تغییرات کلی $\tilde{z}$ برابر L و همچنین با توجه به قضیه قبل باید داشته باشیم

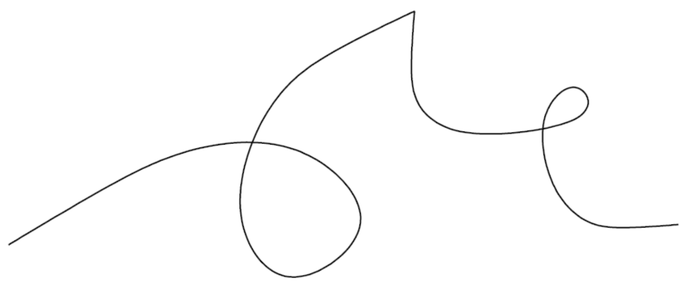
$$L = \int_0^L |\tilde{z}'(s)| ds$$

. سرانجام توجه می‌کنیم که این تساوی تنها زمانی که تقریبا همه جا $|\tilde{z}(s)| = 1$ امکان پذیر است. □

محتوای مینکوفسکی یک خم*

برهانی که در زیر از نامساوی ایزوپریمتری ارائه می‌دهیم به یک روش کلیدی بر ارائه مفهوم محتوای مینکوفسکی بستگی دارد. با وجودی که ایده این محتوا به خودی خود جذابیت دارد، به طور خاص در اینجا به ما مربوط است. و این به دلیل با طول متناهی بودن یک خم است که با داشتن محتوای مینکوفسکی (متناهی) با کمیتی هم‌اندازه با طول منحنی، همپایه است.

بحث راجع به این مطلب را با چند تعریف شروع می‌کنیم. یک خم پارامتری شده به وسیله $z(t) = (x(t), y(t))$ که در آن $a \leq t \leq b$ **ساده** خوانده می‌شود، اگر نگاشت $t \mapsto z(t)$ به ازای $t \in [a, b]$ یک به یک باشد و **خم ساده بسته** گفته می‌شود، هرگاه نگاشت $t \mapsto z(t)$ به ازای هر t در $[a, b)$ یک به یک باشد و $z(a) = z(b)$. به طور کلی تر، یک خم **شبه ساده** است، هرگاه نگاشت به ازای هر t در متمم تعداد متناهی از نقاط $[a, b]$ یک به یک باشد.



شکل ۸.۳: یک خم کشی ساده

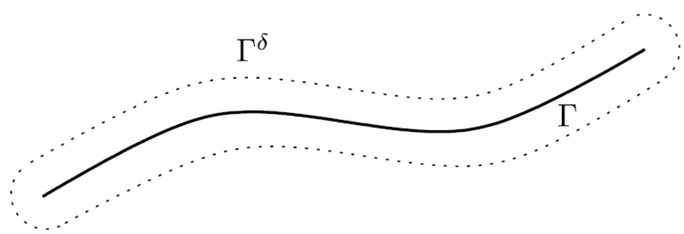
این‌که مجموعه نقاط اثر یک خم $z(t)$ را هنگامی که t در $[a, b]$ **تغییر** می‌کند با Γ مشخص کنیم مناسب است، به عبارتی

$$\Gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$$

. به ازای هر مجموعه فشرده $K \subset \mathbb{R}^2$ (در ادامه می‌گیریم $K = \Gamma$) K^δ

را مجموعه بازی در نظر می‌گیریم، که شامل همه نقاطی در فاصله (اکیدا) کمتر از δ از K را شامل می‌شود،

$$K^\delta = \{x \in \mathbb{R}^۲ : d(x, K) < \delta\}.$$



شکل ۹.۳: خم Γ و مجموعه Γ^δ

در این صورت می‌گوییم مجموعه K **محتوای مینکوفسکی**[۱] دارد اگر حد

$$\lim_{\delta \to ۰} \frac{m(K^\delta)}{۲\delta},$$

موجود باشد. زمانی که این حد وجود داشته باشد آن را با $\mathcal{M}(K)$ مشخص می‌کنیم.

۱. این تعریف محتوای مینکوفسکی یک بعدی است، صورت های دیگر در تمرین ۲۸ و نیز در ادامه در فصل هفت می‌آیند.

قضیه ۳۶.۳. فرض کنید $\Gamma = \{z(t), a \le t \le b\}$، یک خم شبه ساده باشد. محتوای مینکوفسکی Γ موجود است، اگر و فقط اگر Γ با طول متناهی باشد. در این حالت اگر L طول خم باشد، آنگاه $\mathcal{M}(\Gamma) = L$.

برای اثبات قضیه، به ازای هر مجموعه فشردهٔ K، در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{M}^*(K) = \limsup_{\delta \to ۰} \frac{m(K^\delta)}{۲\delta} \quad \text{و} \quad \mathcal{M}_*(K) = \liminf_{\delta \to ۰} \frac{m(K^\delta)}{۲\delta}$$

(هر دو به‌عنوان اعداد مثبت توسعه یافته در نظر گرفته می‌شوند). البته

$$\mathcal{M}_*(K) \le \mathcal{M}^*(K)$$

وجود محتوای مینکوفسکی ، مانند این است که $\mathcal{M}^*(K) < \infty$ و $\mathcal{M}_*(K) = \mathcal{M}^*(K)$. در این صورت مقدار مشترک آن نیز $\mathcal{M}(K)$ است.

قضیه دقیقا به عنوان نتیجه‌ای از گزاره‌هایی راجع به $\mathcal{M}_*(K)$ و $\mathcal{M}^*(K)$ بیان می‌شود و اولین آن در ادامه است.

قضیه ۳۷.۳. فرض کنید $\Gamma = \{z(t), a \le t \le b\}$ یک خم شبه ساده است. اگر $\mathcal{M}_*(\Gamma) < \infty$ آنگاه خم با طول متناهی است. اگر L طول آن را مشخص کند، آنگاه

$$L \le \mathcal{M}_*(\Gamma).$$

برهان به نکته ساده زیر وابسته است.

لم ۳۸.۳. اگر $\Gamma = \{z(t),\ a \le t \le b\}$ یک خم و $\Delta = |z(b) - z(a)|$ فاصله بین نقاط پایانی‌اش باشد، آنگاه $m(\Gamma^\delta) \ge 2\delta\Delta$.

برهان. از آنجایی که تابع فاصله و اندازه لبگ، تحت انتقال‌ها و دوران‌ها پایا هستند، (بخش سوم از فصل یک و مسأله ۴ فصل دو را ببینید.) این موقعیت را به وسیله یک ترکیب مناسب از این حرکات تغییرمی‌دهیم. بنابراین فرض می‌کنیم که نقاط پایانی خم روی محور x قرار گرفته‌اند و بنابراین فرض می‌کنیم که $z(a) = (A, 0)$ و $z(b) = (B, 0)$ و $A < B$ و $\Delta = B - A$ (در حالت $A = B$ نتیجه به طور خودکار برقرار می‌شود).

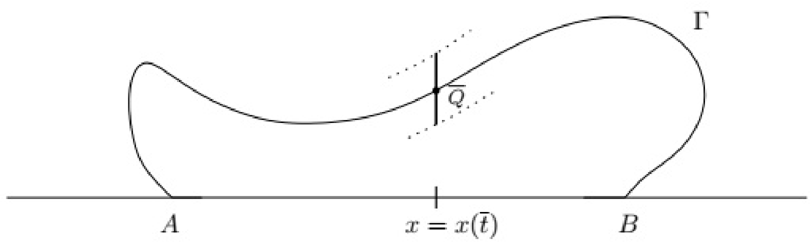
با توجه به پیوستگی تابع $x(t)$، به ازای هر x در $[A, B]$ یک مقدار $\bar{t}$ در $[a, b]$ وجود دارد، به طوری که $x = x(\bar{t})$. از آنجایی که

$$\bar{Q} = (x(\bar{t}), y(\bar{t})) \in \Gamma$$

، مجموعه Γ^δ شامل یک قطعه خط موازی با محور y، با طول 2δ با مرکزیت $\bar{Q}$ بالای x می‌شود (تصویر ۱۰.۳ را ببینید). به عبارت دیگر برش $(\Gamma^\delta)_x$ شامل بازهٔ $(y(\bar{t}) - \delta, y(\bar{t}) + \delta)$ است بنابراین $m_1((\Gamma^\delta)x) \ge 2\delta$ (که در آن m_1 اندازه لبگ یک بعدی است). در این حالت با توجه

به قضیه فوبینی

$$m(\Gamma^\delta) = \int_{\mathbb{R}} m_۱((\Gamma^\delta)x)dx \geq \int_A^B m_۱((\Gamma^\delta)x)dx \geq ۲\delta(B-A) = ۲\delta\Delta.$$



شکل ۱۰.۳: موقعیت لم ۳۸.۳

□

اکنون به اثبات قضیه می‌پردازیم. در ابتدا بیایید فرض کنیم خم ساده است. فرض کنید P یک افراز $a = t_۰ < t_۱ < ... < t_N = b$ از بازه $[a,b]$ باشد و فرض کنید L_P طول خطوط شکسته متناظر را مشخص کند، به این معنا که،

$$L_P = \sum_{j=۱}^{N} |z(t_j) - z(t_{j-۱})|.$$

به ازای هر $\varepsilon > \circ$، پیوستگی $t \mapsto z(t)$ وجود N زیر بازه $I_j = [a_j, b_j]$ از $(t_{j-۱}, t_j)$ راتضمین می‌کند، به طوری که

$$\sum_{j=۱}^{N} |z(b_j) - z(a_j)| \geq L_P - \varepsilon.$$

فرض کنید Γ_j، قطعه‌ای از خم که به صورت $\Gamma_j = \{z(t); t \in I_j\}$ داده می‌شود را مشخص کند. از آنجا که زیر بازه‌های بسته $I_۱, \ldots, I_N$ مجزا هستند، به همین دلیل از سادگی منحنی به‌دست می‌آید که مجموعه‌های $\Gamma_۱, \ldots, \Gamma_N$ از هم جدا هستند. اما $\Gamma \supset \bigcup_{j=۱}^{N} \Gamma_j$ و $\Gamma^\delta \supset \bigcup_{j=۱}^{N} (\Gamma_j)^\delta$.

به‌علاوه از مجزا بودن Γ_j ها، به ازای عدد به اندازه کافی کوچکδ، مجموعه‌های $(\Gamma_j)^\delta$ مجزا هستند. بنابراین برای آن δ، با به کار بردن لم قبل برای هر Γ_j، داریم

$$m(\Gamma^\delta) \geq \sum_{j=۱}^{N} m((\Gamma_j)^\delta) \geq ۲\delta \sum |z(b_j) - z(a_j)|.$$

در نتیجه داریم $m(\Gamma^\delta)/۲\delta \geq L_P - \varepsilon$ و باگذار به حد داریم $\mathcal{M}_*(\Gamma) \geq L_P - \varepsilon$. از آنجایی که این نامساوی برای همه افرازهای P و هر $\varepsilon > \circ$ صحیح است، از آن به‌دست می‌آید که خم از طول متناهی است و طول آن از $\mathcal{M}_*(\Gamma)$ بیشتر نمی‌شود.

برهان هنگامی که خم صرفا شبه ساده است، مشابه است به جز این که افراز P در نظر گرفته شده، باید دوباره تظریف شود، تا P به عنوان افراز نقاطی (تعداد متناهی) از $[a,b]$ را در بر گیرد، به طوری که نگاشت $z \longrightarrow z(t)$ روی متمم آن نقاط در $[a,b]$ یک به یک شود. جزئیات به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره دوم در جهت معکوس است.

گزاره ۳.۳۹. فرض کنید $\Gamma = \{z(t), a \leq t \leq b\}$ خم با طول متناهی و با طول Γ باشد. در این صورت

$$\mathcal{M}^*(\Gamma) \leq L.$$

البته مقادیر $\mathcal{M}^*(\Gamma)$ و L از پارامتری سازی استفاده شده مستقل هستند. چون منحنی از طول متناهی است، استفاده از پارامتری سازی طول قوس راحت خواهد بود. بنابراین، ما منحنی را به صورت $z(s) = (x(s), y(s))$، با $\circ \leq s \leq L$، می‌نویسیم و یادآوری می‌کنیم که $z(s)$ پیوسته مطلق است و برای تقریبا هر $s \in [\circ, ۱]$، $|z'(s)| = ۱$.

ابتدا $\circ < \varepsilon < ۱$ را دلخواه و ثابت می‌گیریم و یک مجموعه اندازه‌پذیر $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ و یک عدد مثبت r_ε را طوری به‌دست می‌آوریم که $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ و

$$\sup_{\circ < |h| < r_\varepsilon} \left| \frac{z(s+h) - z(s)}{h} - z'(s) \right| < \varepsilon \quad \forall \;\; s \in [\circ, L] - E_\varepsilon. \qquad (۳.۱۴)$$

در واقع برای هر عدد صحیح n، قرار دهید

$$F_n(s) = \sup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left| \frac{z(s+h)-z(s)}{h} - z'(s) \right|$$

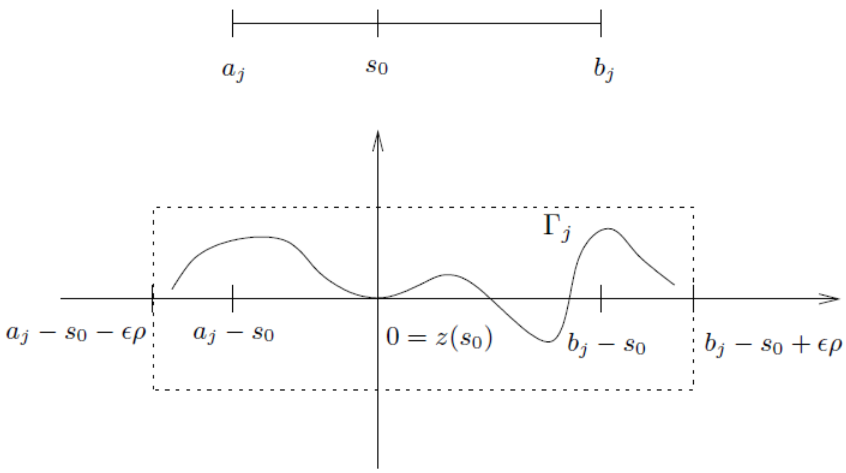
(که در آن $z(s)$ به خارج $[0, L]$ توسیع یافته است، به طوری که $z(s) = z(0)$، زمانی که $\delta > 0$ و $z(s) = z(L)$ زمانی که $s > L$). چون $z(s)$ پیوسته است، سوپریمم روی h در تعریف $F_n(s)$ می‌تواند با سوپریمم تعداد شمارا از توابع اندازه‌پذیر جایگزین شود و بنابراین هر F_n اندازه‌پذیر است. اگر چه زمانی که $n \longrightarrow \infty$، برای تقریبا هر $s \in [a, b]$، $F_n(s) \longrightarrow 0$. بنابر قضیه ایگوروف، همگرایی خارج مجموعه E_ε با $m(E_\varepsilon) < \varepsilon$ همگرای یکنواخت است و بنابراین ما تنها باید برای n به اندازه کافی بزرگ $r_\varepsilon = \frac{1}{n}$ را برای اثبات (۱۴.۳)، انتخاب کنیم. در زیر، چنانچه مقدور باشد، بهتر است فرض کنیم، برای هر $s \notin E_\varepsilon$، $z'(s)$ موجود است و $|z'(s)| = 1$.

اکنون برای هر $0 < \rho < r_\varepsilon$ (و $\rho < 1$) بازه $[., L]$ را به زیربازه‌های بسته به طول ρ افراز می‌کنیم (به‌جز بازه آخر که طولی نابیشتر از ρ می‌گیرد) در این صورت طول کلی $L/\rho + 1 \geqslant N$ برای چنین بازه‌هایی وجود دارد. این بازه‌ها را $I_1, \dots, I_N$ می‌نامیم و آن‌ها را به دو رده تقسیم می‌کنیم. رده اول، آن بازه‌های I_j هستند که ما «خوب» می‌نامیم، آن بازه‌هایی هستند که خاصیت $I_j \nsubseteq E_\varepsilon$ را دارد. رده دوم «بد» هستند

که خاصیت $I_j \subset E_\varepsilon$ را دارد. در نتیجه $I_j \subset I_\varepsilon$ بدل $\bigcup_{I_j}$، بنابراین اجتماع اندازه‌ای کمتر از ε دارد.

البته داریم $[\circ, L] \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$ و اگر پاره خط Γ داده شده با $\{z(s) : s \in I_j\}$ را با Γ_j مشخص کنیم، آنگاه $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$ و در نتیجه $\Gamma^\delta = \bigcup_{j=1}^N (\Gamma_j)^\delta$ و $m(\Gamma^\delta) \leq \sum_{j=1}^N m((\Gamma_j)^\delta)$. ابتدا زمانی‌که I_j بازه خوب باشد، بخش $m((\Gamma_j)^\delta)$ را در نظر می‌گیریم.

به یاد آورید که برای $I_j = [a_j, b_j]$، $s_\circ \in I_j$ موجود است که در E_ε نیست. و بنابراین (۱۴.۳) برای $s = s_\circ$ برقرار است. اکنون Γ_j را با معرفی یک سیستم مختصات به‌طوری که $z(s_\circ) = \circ$ و $z'(s_\circ) = 1$ (که بعد از یک انتقال و چرخش مناسب می‌توانیم فرض کنیم) تصور کنید. علائم $z(s)$ و Γ_j را برای پاره خط انتقال یافته از منحنی حفظ می‌کنیم.



شکل ۱۱.۳: تقریب $m((\Gamma_j)^\delta)$ برای بازه خوب I_j

توجه کنید از آنجا که h روی بازه $[a_j - s_\circ, b_j - s_\circ]$ و $s_\circ + h$ روی $I_j = [a_j, b_j]$ تغییر می‌کند، بنابراین Γ_j مشمول در مستطیل

$$[a_j - s_\circ - \varepsilon\rho, b_j - s_\circ + \varepsilon\rho] \times [-\varepsilon\rho, \varepsilon\rho],$$

است، زیرا $|h| \leq \rho < r_\varepsilon$ و از نوع ساختن و بنابر (۱۴.۳) و این که $|z(s_\circ + h) - h| < \varepsilon|h|$. تصویر (۱۱.۳) را ببینید. بنابراین $(\Gamma_j)^\delta$ مشمول در مستطیل

$$[a_j - s_\circ - \varepsilon\rho - \delta, b_j - s_\circ + \varepsilon\rho + \delta] \times [-\varepsilon\rho - \delta, \varepsilon\rho + \delta],$$

است، که اندازه‌ای نا بیشتر از $(\rho + ۲\varepsilon\rho + ۲\delta)(۲\varepsilon\rho + ۲\delta)$ دارد. بنابراین از آنجایی که $\varepsilon \leq ۱$ داریم

$$m((\Gamma_j)^\delta) \leq ۲\delta\rho + O(\varepsilon\delta\rho + \delta^۲ + \varepsilon\rho^۲), \tag{۱۵.۳}$$

که در آن کران اعلام شده در O، از ε، δ و ρ مستقل است. این تقریب مطلوب برای بازه‌های خوب است.

با گذار به بازه‌های باقیمانده، برای هر s و s'، رابطه $|z(s)-z(s')| \leq |s-s'|$ را به‌کار می‌بریم. بنابراین در هر حالت، Γ_j مشمول در گوی(دیسک) به شعاع ρ است و بنابراین $(\Gamma_j)^\delta$ مشمول در گوی به شعاع $\rho + \delta$ است. بنابراین تقریب اولیه زیر را داریم

$$m((\Gamma_j)^\delta) = O(\delta^۲ + \rho^۲). \tag{۱۶.۳}$$

اکنون از رابطه (۱۵.۳) روی بازه‌های خوب (که حداکثر $L/\rho + ۱$ هستند) و در رابطه (۱۶.۳) روی بازه‌های بد مجموع می‌گیریم. حداکثر $\varepsilon/\rho+۱$ از نوع اخیر موجود هستند، زیرا اجتماع‌شان مشمول در E_ε است و این مجموعه اندازه‌ای کمتر از ε دارد. در مجموع، در این صورت

$$m(\Gamma^\delta) \leq ۲\delta L + ۲\delta\rho + O(\varepsilon\delta + \delta^۲/\rho + \varepsilon\rho) + O((\varepsilon/\rho + ۱)(\delta^۲ + \rho^۲)),$$

که به نامساوی‌های زیر ساده می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{m(\Gamma^\delta)}{۲\delta} &\leq L+O(\rho+\varepsilon+\frac{\delta}{\rho}+\frac{\varepsilon\rho}{\delta}+\frac{\varepsilon\delta}{\rho}+\delta+\frac{\rho^۲}{\delta})\\ &\leq L+O(\rho+\varepsilon+\frac{\delta}{\rho}+\frac{\varepsilon\rho}{\delta}+\frac{\rho^۲}{\delta}),\end{aligned}$$

که در آن در آخرین خط از $\varepsilon < ۱$ و $\rho < ۱$ استفاده کرده‌ایم. برای به‌دست آوردن یک تقریب مناسب از این، زمانی که $\delta \longrightarrow ۰$، باید ρ (طول زیر بازه‌ها) را تقریبا به همان اندازه δ انتخاب کنیم. یک انتخاب مؤثر، $\rho = \delta/\varepsilon^{\frac{۱}{۲}}$ است. اگر ما این را انتخاب کنیم و توجه خود را به δ معطوف کنیم، به‌طوری که $۰ < \delta < \varepsilon^{\frac{۱}{۲}} r_\varepsilon$، آنگاه بنابر (۱۴.۳)، به‌طور خودکار $\rho < r_\varepsilon$. با جای‌گذاری $p = \delta/\varepsilon^{\frac{۱}{۲}}$ در نامساوی بالا داریم

$$\frac{m(\Gamma^\delta)}{۲\delta} \leq L+O(\frac{\delta}{\varepsilon^{۱/۲}}+\varepsilon+\varepsilon^{۱/۲}+\frac{\delta}{\varepsilon}),$$

و بنابراین

$$\limsup_{\delta\longrightarrow ۰}\frac{m(\Gamma^\delta)}{۲\delta} \leq L+O(\varepsilon+\varepsilon^{۱/۲}).$$

اکنون می‌توانیم فرض کنیم $\varepsilon \longrightarrow ۰$ و نتیجه مورد نظر $\mathcal{M}^*(\Gamma) \leq L$ را به‌دست آوریم و برهان‌های گزاره و قضیه کامل می‌شود. **نامساوی‌های ایزوپریمتری*** نامساوی ایزوپریمتری در صفحه بیان می‌کند که در

میان همه منحنی‌های داده شده با طول معین، این دایره است که حداکثر مساحت را محصور می‌کند. یک شکل ساده از این قضیه قبلا در جلد ۱ ظاهر شد. در حالی که اثبات داده شده در آنجا این نقطه قوت را داشت که مختصر و ظریف باشد، اما چندین کاستی را به دنبال داشت. در میان آن‌ها « مساحت » غیر مستقیم و به صورت تکنیکی تعریف می‌شود، و دامنه نتیجه‌گیری محدود است زیرا فقط منحنی‌های نسبتا هموار در نظر گرفته می‌شوند. در اینجا می‌خواهیم آن نواقص را برطرف کنیم و یک صورت کلی نتیجه را مطالعه کنیم.

فرض کنیم که Ω یک زیرمجموعه باز کراندار از $\mathbb{R}^۲$ و مرز آن $\overline{\Omega}\setminus\Omega$، یک خم از طول متناهی Γ، با طول $\ell(\Gamma)$ باشد. انتظار نداریم که Γ خم بسته ساده باشد. قضیه ایزوپریمتری به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۴۰.۳. $۴\pi m(\Omega) \leq \ell(\Gamma)^۲$.

برهان. برای هر $\delta > ۰$ مجموعه خارجی

$$\Omega_{+}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^۲ : d(x, \overline{\Omega}) < \delta\},$$

و مجموعه داخلی

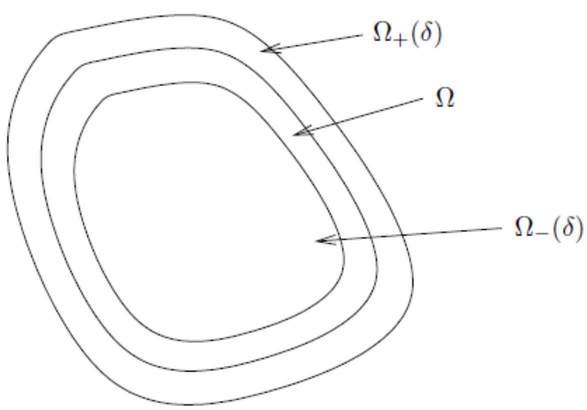
$$\Omega_{-}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^۲ : d(x, \Omega^c) \geq \delta\},$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین $\Omega_-(\delta) \subset \Omega \subset \Omega_+(\delta)$.
توجه می‌کنیم که برای $\Gamma^\delta = \{x : d(x, \Gamma) < \delta\}$ داریم

$$\Omega_+(\delta) = \Omega_-(\delta) \cup \Gamma^\delta, \tag{۱۷.۳}$$

و این اجتماع مجزا است. به‌علاوه اگر $D(\delta)$ گوی(دیسک) باز به شعاع δ و به مرکز مبدأ باشد، $D(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^۲ : |x| < \delta\}$، آنگاه به‌وضوح

$$\begin{cases} \Omega_+(\delta) & \supset \Omega + D(\delta) \\ \Omega & \supset \Omega_-(\delta) + D(\delta). \end{cases} \tag{۱۸.۳}$$



شکل ۱۲.۳: مجموعه‌های Ω، $\Omega_-(\delta)$ و $\Omega_+(\delta)$

اکنون نامساوی برون-مینکوفسکی (قضیه (۴۱.۱) در فصل

اول) را برای شمول اول به کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$m(\Omega_+(\delta)) \geq (m(\Omega)^{۱/۲} + m(D(\Omega))^{۱/۲})^{۲}.$$

از آنجایی که $m(D(\delta)) = \pi\delta^{۲}$ (این فرمول استاندارد در تمرین ۱۴ از فصل قبل ثابت شد) و اینکه هرگاه A و B مثبت باشند،

$$(A+B)^{۲} \geq A^{۲} + B^{۲}$$

، در می‌یابیم

$$m(\Omega_+(\delta)) \geq m(\Omega) + ۲\pi^{\frac{۱}{۲}}\delta m(\Omega)^{\frac{۱}{۲}}.$$

به طور مشابه $m(\Omega) \geq m(\Omega_-(\delta)) + ۲\pi^{\frac{۱}{۲}}\delta m(\Omega_-(\delta))^{\frac{۱}{۲}}$. بنابر دومین شمول در (۱۸.۳) داریم،

$$-m(\Omega_-(\delta)) \geq -m(\Omega) + ۲\pi^{۱/۲}\delta m(\Omega_-(\delta))^{۱/۲}$$

و بنابر (۱۷.۳)

$$m(\Gamma^{\delta}) = m(\Omega_+(\delta)) - m(\Omega_-(\delta))$$

و بنابر نامساوی‌های بالا داریم

$$m(\Gamma^{\delta}) \geq ۲\pi^{۱/۲}\delta(m(\Omega)^{۱/۲} + m(\Omega_-(\delta))^{۱/۲}).$$

اکنون هر دو طرف را بر 2δ تقسیم می‌کنیم و وقتی که $\delta \to 0$، حد بالایی می‌گیریم. این نتیجه می‌دهد

$$\mathcal{M}^*(\Gamma) \geq \pi^{1/2}(2m(\Omega)^{1/2})$$

زیرا $\Omega_-(\delta) \nearrow \Omega$ وقتی که $\delta \to 0$. با این وجود بنابر گزاره (۳۹.۳)، $\ell(\Gamma) \geq \mathcal{M}^*(\Gamma)$. بنابراین

$$\ell(\Gamma) \geq 2\pi^{1/2} m(\Omega)^{1/2}.$$

□

تبصره نتیجه مناسبی حتی بدون در نظر گرفتن این‌که مرز، یک منحنی (از طول متناهی) است، برقرار است. در حقیقت برهان نشان می‌دهد که برای هر مجموعه باز کراندار Ω که مرز آن Γ است، داریم

$$4\pi m(\Omega) \leq \mathcal{M}^*(\Gamma)^2.$$

۵.۳ تمرین‌ها

۱. فرض کنید φ، تابعی انتگرالپذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشد و $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$. قرار دهید $K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/\delta)$ و $\delta > 0$.
الف) ثابت کنید $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ خانواده‌ای با هسته‌های خوب است.
ب) به‌علاوه فرض کنید که φ کراندار باشد و تکیه‌گاهی روی

یک مجموعه کراندار داشته باشد. ثابت کنید $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ یک تقریب از همانی است.
ج) نشان دهید که قضیه (۱۶.۲) (همگرایی در نرم L^1) برای هسته‌های خوب نیز برقرار است.

۲. فرض کنید $\{K_\delta\}$ خانواده‌ای از هسته‌ها است که در موارد زیر صادق است:
الف) برای هر $\delta > 0$، $|K_\delta(x)| \leq A\delta^{-d}$.
ب) برای هر $\delta > 0$، $|K_\delta(x)| \leq A\delta/|x|^{d+1}$.
ج) برای هر $\delta > 0$، $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)dx = 0$.
بنابراین K_δ شرط (الف) و (ب) از تقریب همانی را برقرار می‌کند. اما مقدار میانگین K_δ به‌جای ۱، صفر است. نشان دهید که اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$(f * K_\delta)(x) \longrightarrow 0, \quad \text{برای تقریبا هر } x \text{ وقتی که } \delta \longrightarrow 0$$

۳. فرض کنید صفر یک نقطه از چگالی (لبگ) از مجموعه $E \subset \mathbb{R}$ باشد. نشان دهید دنباله‌ای نامتناهی از نقاط $0 \neq x_n \in E$ موجود است که فقط در یکی از شرایط ویژه زیر صدق می کند و وقتی $n \longrightarrow \infty$, $x_n \longrightarrow 0$.
الف)دنباله برای هر n، در شرط $-x_n \in E$ نیز صدق می‌کند.

ب) به‌علاوه $2x_n$ برای هر n، به E متعلق است.

۴. ثابت کنید اگر f روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر باشد و f متحد با صفر نباشد، آنگاه $c > 0$ موجود است به‌طوری که برای هر x که ، $|x| \geq 1$ داریم

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d}$$

از اینجا نتیجه بگیرید که f^* روی $\mathbb{R}^d$ انتگرال‌پذیر نیست. در این صورت نشان دهید که برای هر $\alpha > 0$ هرگاه $\int |f| = 1$، تقریب از نوع ضعیف آن به‌صورت زیر

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq c/\alpha$$

به معنای زیر بهترین امکان است: اگر f تکیه‌گاهی روی گوی یکه داشته باشد و $\int |f| = 1$، آنگاه برای یک $c' > 0$ و هر α به اندازه کافی کوچک

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq c'/\alpha$$

راهنمایی : برای قسمت اول، این حکم را به‌کار می‌بریم که برای یک گوی مانند B، $\int_B |f| > 0$.

۵. تابع روی $\mathbb{R}$ را که به‌صورت زیر زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} & \text{اگر } |x|\leq 1/2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

الف)ثابت کنید که f انتگرالپذیر است.
ب) نامساوی زیر را ثابت کنید، $c>0$ موجود است به طوری که برای هر x که، $|x|\leq 1/2$ داریم

$$f^*(x)\geq\frac{c}{|x|(\log 1/|x|)}$$

تا نتیجه بگیرید که تابع ماکسیمال f^* انتگرالپذیر موضعی نیست.

۶. در بعد یک نوعی از نامساوی اساسی (۱۰۳) برای تابع ماکسیمال به‌صورت یک اتحاد موجود است. تابع ماکسیمال «یک-طرفه» را تعریف می‌کنیم

$$f_+^*(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(y)|dy.$$

اگر $E_\alpha^+=\{x\in\mathbb{R}:f_+^*(x)>\alpha\}$، آنگاه

$$m(E_\alpha^+)=\frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha^+}|f(y)|dy.$$

راهنمایی: لم (۲۳.۳) را برای $F(x) = \int_0^x |f(y)|dy - \alpha x$ به‌کار ببرید. آنگاه E_α^+ اجتماعی از بازه‌های مجزای (a_k, b_k) است و $\int_{a_k}^{b_k} |f(y)|dy = \alpha(a_k - b_k)$.

۷. نتیجه (۵.۳) را به‌کار ببرید و ثابت کنید که اگر برای یک زیر مجموعه اندازه‌پذیر E از $[0,1]$ و برای یک $\alpha > 0$ و هر بازه I در $[0,1]$، نامساوی

$$m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$$

برقرار باشد، آنگاه E، اندازه‌ی ۱ دارد. تمرین ۲۸ را در فصل ۱ ببینید.

۸. فرض کنید A یک مجموعه اندازه‌پذیر لبگ باشد و $m(A) > 0$. آیا دنباله $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ موجود است، به‌طوری که متمم $\bigcup_{n=1}^\infty (A + s_n)$ در $\mathbb{R}$ اندازه صفر داشته باشد؟ راهنمایی: برای هر $\varepsilon > 0$ یک بازه I_ε به طول ℓ_ε را بیابید به‌طوری که $m(A \cap I_\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon)m(I_\varepsilon)$. برای $t_k = k\ell_\varepsilon$، $\bigcup_{k=-\infty}^\infty (A + t_k)$ را در نظر بگیرید. آنگاه ε را تغییر دهید.

۹. فرض کنید F زیر مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ ، و $\delta(x)$ فاصله x تا F باشد به‌طوری که

$$\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}.$$

به‌وضوح، هرگاه $x \in F$، $\delta(x+y) \le |y|$. تقریب ظریفتر زیر را ثابت کنید

$$\delta(x+y) = o(|y|), \quad x \in F \text{ هر برای تقریبا }$$

به این معنا که برای تقریبا هر $x \in F$، $\delta(x+y)/|y| \longrightarrow 0$.

راهنمایی: فرض کنید که x یک نقطه چگالی F باشد.

۱۰. تابع صعودی روی $\mathbb{R}$ بسازید که مجموعه نقاط ناپیوستگی‌های آن دقیقا $\mathbb{Q}$ باشد.

۱۱. اگر $a, b > 0$، قرار دهید

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & 0 < x \le 1 \text{ اگر } \\ 0 & x = 0 \text{ اگر } \end{cases}$$

ثابت کنید که f در $[0,1]$ با تغییر کراندار است، اگر و فقط اگر $a > b$. آنگاه با قرار دادن $a = b$، (برای هر $0 < \alpha < 1$) تابعی بسازید که در شرط لیپ شیتس از توان α

$$|f(x) - f(y)| \le A|x-y|^\alpha$$

صدق کند اما با تغییر کراندار نباشد.

راهنمایی: توجه کنید که بنا به قضیه مقدار میانگین، اگر $h > 0$، تفاضل $|f(x+h) - f(x)|$ به صورت $C(x+h)^\alpha$، یا $C'h/x$ تقریب

زده می‌شود. آنگاه دو حالت را در نظر بگیرید که آیا $h \geq x^{\alpha+1}$ یا $h < x^{\alpha+1}$. رابطه بین α و a چیست؟

۱۲. تابع $F(x) = x^{2}\sin(1/x^{2})$، اگر $x \neq 0$ و $F(0) = 0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که برای هر x، $F'(x)$ موجود است. اما F' روی $[-1,1]$ انتگرالپذیر نیست.

۱۳. مستقیما از تعریف نشان دهید که تابع لبگ-کانتور پیوسته مطلق نیست.

۱۴. شرایط اندازه‌پذیری زیر در ارتباط با مشتقپذیری توابع به‌دست می‌آید.

الف) فرض کنید F روی $[a,b]$ پیوسته است. نشان دهید که

$$D^{+}(F)(x) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

اندازه‌پذیر است.

ب) فرض کنید که $J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x)$، تابع پرشی به معنای بخش (۱.۳.۳) باشد. نشان دهید که

$$\limsup_{h\to 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$$

اندازه‌پذیر است.

راهنمایی: برای (الف) پیوستگی F این اجازه را به ما می‌دهد تا در گرفتن حد بالایی به تعداد شمارایی از h محدود شویم. برای (ب) $k > m$ داده شده قرار می‌دهیم، $F^N_{k,m} = \sup_{1/k<|h|\leq 1/m} |\frac{J_N(x+h)-J_N(x)}{h}|$ که در آن

$$J_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n j_n(x)$$

. توجه کنید که هر $F^N_{k,m}$ اندازه‌پذیر است. در این صورت متوالیا فرض کنید $N \longrightarrow \infty$، $k \longrightarrow \infty$ و سرانجام $m \longrightarrow \infty$.

۱۵. فرض کنید F با تغییر کراندار و پیوسته باشد. ثابت کنید $F = F_1 - F_2$ که هر دو F_1 و F_2 یکنوا و پیوسته هستند.

۱۶. نشان دهید که اگر F روی $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه
الف) $\int_a^b |F'(x)|dx \leq T_F(a, b)$.
ب) $\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a, b)$، اگر و فقط اگر F پیوسته مطلق باشد.
به‌عنوان نتیجه‌ای از (ب)، رابطه $L = \int_a^b |z'(t)|dt$ برای طول یک خم از طول متناهی پارامتری شده با z برقرار است، اگر و فقط اگر z پیوسته مطلق باشد.

۱۷. ثابت کنید که اگر $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ خانواده‌ای از تقریب‌های همانی باشد، آنگاه برای یک $c>0$ و همه توابع انتگرال‌پذیر f،

$$\sup_{\varepsilon>0}|(f*K_\varepsilon)(x)|\le cf^*(x).$$

۱۸. تطابق دو تعریف ارائه شده برای تابع لبگ-کانتور تمرین (۲)، فصل ۱ و در بخش (۱۶.۳) از این فصل را بررسی کنید.

۱۹. نشان دهید که اگر $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته مطلق باشد، آنگاه
الف) f مجموعه‌های با اندازه صفر را به مجموعه‌هایی با اندازه صفر می‌نگارد.
ب) f مجموعه‌های اندازه‌پذیر را به مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نگارد.

۲۰. این تمرین با توابع F که روی $[a,b]$ پیوسته مطلق و صعودی هستند، سر و کار دارد. قرار دهید $A=F(a)$ و $B=F(b)$.

الف) تابعی مثل F موجود است که به‌علاوه صعودی اکید است، اما روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت $F'(x)=0$.

ب) F در (الف) می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود به‌طوری که زیر مجموعه‌ای اندازه‌پذیر $E\subset[A,B]$ با $m(E)=0$ موجود باشد، چنان که $F^{-1}(E)$ اندازه‌پذیر نیست.

ج) ثابت کنید، در این حالت، برای هر تابع پیوسته مطلق صعودی F، و یک زیر مجموعه اندازه‌پذیر E از $[A, B]$، مجموعهٔ

$$F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$$

اندازه‌پذیر است.

راهنمایی: الف) قرار دهید $F(x) = \int_a^x \chi_{K(x)} dx$، که K متمم یک مجموعهٔ شبه-کانتور C از اندازه مثبت است. برای (ب)، توجه کنید که $F(C)$ مجموعه‌ای از اندازه صفر است. سرانجام برای (ج)، ابتدا ثابت کنید که برای هر مجموعه باز $\mathcal{O}$، $m(\mathcal{O}) = \int_{F^{-1}(\mathcal{O})} F'(x) dx$.

۲۱. فرض کنید F یک تابع پیوسته مطلق و صعودی روی بازه $[a, b]$ باشد، به‌طوری که $F(a) = A$ و $F(b) = B$. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر روی $[A, B]$ باشد.

الف) نشان دهید که $f(F(x))F'(x)$ روی $[a, b]$ اندازه‌پذیر است. توجه: بنا بر تمرین (۲۰) قسمت (ب)، $f(F(x))$ لزومی ندارد اندازه‌پذیر باشد.

ب) فرمول تغییر متغیر را ثابت کنید: اگر f روی $[A, B]$ انتگرال‌پذیر

باشد، آنگاه $f(F(x))F'(x)$ نیز چنین است، و

$$\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx.$$

راهنمایی: با تساوی $m(\mathcal{O}) = \int_{F^{-1}(\mathcal{O})} F'(x)dx$ مورد استفاده در تمرین (۲۰) قسمت (ج) شروع کنید.

۲۲. فرض کنید F و G روی $[a,b]$ پیوسته مطلق هستند. نشان دهید که حاصلضرب FG نیز پیوسته مطلق است. این حکم، نتایج زیر را در بر دارد.

الف) هرگاه F و G روی $[a,b]$ پیوسته مطلق باشند،

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = -\int_a^b F(x)G'(x)dx + [F(x)G(x)]_a^b.$$

ب) فرض کنید F روی $[-\pi,\pi]$ پیوسته باشد و $F(\pi) = F(-\pi)$. نشان دهید که اگر

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx,$$

به‌طوری که $F(x) \sim \sum a_n e^{inx}$، آنگاه

$$F'(x) \sim \sum ina_n e^{inx}.$$

ج) اگر $F(-\pi) \neq F(\pi)$ چه اتفاقی می‌افتد؟ راهنمایی: $F(x) = x$ را در نظر بگیرید.

۲۳. فرض کنید F روی $[a,b]$ پیوسته باشد، موارد زیر را نشان دهید.

الف) فرض کنید برای هر $x \in [a,b]$، $(D^+F)(x) \geq 0$. آنگاه F روی $[a,b]$ صعودی است.

ب) اگر $F'(x)$ برای هر $x \in (a,b)$ موجود باشد و $|F'(x)| \leq m$، آنگاه $|F(x) - F(y)| \leq m|x-y|$ و F پیوسته مطلق است.

راهنمایی: برای (الف) کافی است نشان دهیم که

$$F(b) - F(a) \geq 0$$

. خلاف آن را فرض کنید. بنابراین با

$$G_\varepsilon(x) = F(x) - F(a) + \varepsilon(x-a)$$

برای $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، داریم $G_\varepsilon(a) = 0$، اما $G_\varepsilon(b) < 0$. اکنون فرض کنید $x_0 \in [a,b)$ بزرگترین مقداری از x_0 باشد، به‌طوری که $G_\varepsilon(x_0) \geq 0$. در این‌صورت $(D^+G_\varepsilon)(x_0) > 0$.

۲۴. فرض کنید F تابعی صعودی روی $[a,b]$ باشد.

الف) ثابت کنید که می‌توانیم بنویسیم

$$F = F_A + F_C + F_J,$$

که هر یک از توابع F_A، F_C و F_J صعودی هست و:

(۱) F_A پیوسته مطلق است.

(۲) F_C پیوسته است، اما برای تقریبا هر x، $F'_C(x) = 0$.

(۳) F_J یک تابع پرشی است.

ب) به‌علاوه، هر مؤلفه F_A، F_C و F_J با تقریب یک ثابت جمعی منحصر به فرد هستند.

مطالب بالا **تجزیه لبگ** F را بیان می‌کند. تجزیه متناظری برای هر F با تغییر کراندار موجود است.

۲۵. مفاهیم زیر لزوم به‌کار بردن مجموعه‌های استثنایی با اندازه صفر در قضیه‌های مشتقگیری (۴.۳) (۲۲.۳) و (۲۹.۳) را نشان می‌دهد. فرض کنید E مجموعه‌ای با اندازه صفر در $\mathbb{R}^d$ باشد. نشان دهید:

الف) تابع انتگرالپذیر نامنفی f در $\mathbb{R}^d$ موجود است، به‌طوری که

$$\liminf_{m(B)\xrightarrow{x\in B} 0} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = \infty \qquad x \in E \text{ هر برای}$$

ب) زمانی که $d = ۱$، این حکم به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود. تابع پیوسته مطلق صعودی F موجود است، به‌طوری که

$$\text{هر برای } x \in E \quad D_+(F)(x) = D_-(F)(x) = \infty.$$

راهنمایی: مجموعه‌های باز $\mathcal{O}_n \supset E$، با $m(\mathcal{O}_n) < ۲^{-n}$، رابیابید و قرار دهید $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_n}(x)$.

۲۶. روش دیگری از تعریف اندازه خارجی $m_*(E)$ برای یک مجموعه دلخواه E که در بخش ۲ از فصل ۱ آمده، تا پوشش‌های E از مکعب‌ها را با پوشش‌هایی از گوی‌ها جایگزین کنیم. بدین صورت، فرض کنید که $m_*^{\mathcal{B}}(E)$ را به‌صورت $\inf \sum_{j=۱}^{\infty} m(B_j)$ تعریف کنیم، که در آن اینفیمم روی همه پوشش‌های $E \subset \bigcup_{j=۱}^{\infty} B_j$ از گوی‌های باز گرفته می‌شود. در این صورت $m_*(E) = m_*^{\mathcal{B}}(E)$. (ملاحظه کنید که این نتیجه به برهان دیگری از پایایی اندازه لبگ قسمت دوران‌ها منجر می‌شود.)
به‌وضوح $m_*(E) \leq m_*^{\mathcal{B}}(E)$. ثابت کنید عکس نامساوی به‌صورت زیر نشان داده می‌شود. برای هر $\varepsilon > ۰$ یک گردایه از گوی‌های $\{B_j\}$ موجود است، به‌طوری که $E \subset \bigcup_j B_j$، در حالی که

$$\sum_j m(B_j) \leq m_*(E) + \varepsilon$$

• همچنین توجه کنید که برای هر δ از پیش تعیین شده، می‌توانیم گوی‌هایی را انتخاب کنیم که قطری کمتر از δ دارد.

راهنمایی: ابتدا فرض کنید که E اندازه‌پذیر است و گوی باز $\mathcal{O}$ را طوری در نظر بگیرید که $\mathcal{O} \supset E$ و $m(\mathcal{O}\backslash E) < \varepsilon'$. سپس با به‌کار بردن نتیجه (۲۸.۳)، گوی‌های $B_1, \ldots, B_N$ را بیابید به‌طوری که

$$m(E - \bigcup_{j=1}^{N} B_j) \leq 3\varepsilon' \text{ و } \sum_{j=1}^{N} m(B_j) \leq m(E) + 2\varepsilon'.$$

سرانجام، $E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ را با اجتماعی از مکعب‌ها، بپوشانید که مجموع اندازه‌های آن نا کمتر از $4\varepsilon'$ و این مکعب‌ها را به‌وسیلهٔ گوی‌هایی که شامل آن‌ها هستند، جایگزین کنید. برای E دلخواه، مفاهیم بالا را زمانی که E یک مکعب است به‌کار ببرید.

۲۷. یک منحنی با طول متناهی تقریبا در هر نقطه یک خط مماس دارد. این عبارت را به شکل دقیق بیان کنید.

۲۸. یک منحنی در $\mathbb{R}^d$ یک نگاشت پیوسته $t \longmapsto z(t)$ از یک بازه $[a, b]$ به $\mathbb{R}^d$ است.

الف) صورت‌هایی از شرایطی که با متناهی بودن طول منحنی‌ها

و طول آن‌ها که در قضیه (۱۶.۳)، (۳۰.۷) و (۳۲.۷) ارائه می‌شود، را بیان و ثابت کنید.

ب) محتوای مینکوفسکی (یک بعدی) $\mathcal{M}(K)$ از یک مجموعه فشرده در $\mathbb{R}^d$ را به صورت حد

$$\frac{m(K^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))}, \quad \delta \longrightarrow 0 \text{ وقتی که}$$

(در صورت وجود)تعریف کنید، که در آن $m_{d-1}(B(\delta))$ اندازه(در $\mathbb{R}^{d-1}$) از گوی تعریف شده به صورت

$$B(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^{d-1}, |x| < \delta\}$$

است. صورتی از گزاره‌های (۳۷.۳) و (۳۹.۳) برای منحنی‌ها در $\mathbb{R}^d$ را بیان و ثابت کنید.

۲۹. فرض کنید $\Gamma = \{z(t), a \le t \le b\}$ یک منحنی باشد و فرض کنید در یک شرط لیپ شیتس با توان α، $1/2 \le \alpha \le 1$، صدق کند، به این معنا که

$$|z(t) - z(t')| \le A|t - t'|^\alpha, \quad t, t' \in [a, b] \text{ هر برای}.$$

نشان دهید که برای $0 < \delta \le 1$، $m(\Gamma^\delta) = O(\delta^{2-1/\alpha})$.

۳۰. تابع کراندار F، روی $\mathbb{R}$ با تغییر کراندار نامیده می‌شود، هرگاه F روی هر زیر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد و $\sup_{a,b} T_F(a, b) < \infty$.
ثابت کنید که تابع F دو خاصیت زیر را برقرار می‌کند:

الف) برای یک ثابت A و هر $h \in \mathbb{R}$، $\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|dx \leq A|h|$.

ب) $|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)dx| \leq A$، که φ در آن روی همه توابع C^1 با تکیه‌گاه کراندار و $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq 1$، تغییر می‌کند.

در جهت عکس، و به‌طور مشابه در $\mathbb{R}^d$، مسأله 6^* در زیر ببینید.

راهنمایی: برای (الف)، بنویسید $F = F_1 - F_2$ که در آن هر F_j یکنوا و کراندار است. برای (ب)، آن‌را به حالت (الف) بکاهید.

۳۱. فرض کنید F تابع شبه کانتوری باشد که در بخش (۱۶.۳) شرح داده شد. منحنی‌ای را درنظر بگیرید که نمودار F است، به این معنا که منحنی به‌وسیله $x(t) = t$ و $y(t) = F(t)$ و $0 \leq t \leq 1$ داده می‌شود. ثابت کنید که طول $L(\overline{x})$ از پاره خط $0 \leq t \leq \overline{x}$ از منحنی به‌وسیله $L(\overline{x}) = \overline{x} + F(\overline{x})$ داده می‌شود. بنابراین طول کلی منحنی، ۲ است.

۳۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. ثابت کنید که f در شرط لیپ شیتس

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$

برای یک M و هر $x,y\in\mathbb{R}$ صدق می کند، اگر و فقط اگر f در دو شرط زیر صدق کند:

الف) f پیوسته مطلق است.

ب) برای تقریبا هر x، $|f'(x)|\leq M$.

۶.۳ مسائل

۱. نوعی از **لم پوششی ویتالی** را در زیر ثابت کنید: اگر E به معنای ویتالی به‌وسیلهٔ خانواده $\mathcal{B}$ از گوی‌ها پوشانده شود و $0<m_*(E)<\infty$، آنگاه برای هر $\eta>0$، یک گردایه مجزا از گوی‌ها $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $\mathcal{B}$ موجود است، به‌طوری که

$$m_*(E\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j)=0 \qquad \text{و} \qquad \sum_{j=1}^{\infty}|B_j|\leq(1+\eta)m_*(E).$$

۲. لم پوششی یک بعدی ساده‌ی زیر در بسیاری از موقعیت‌های مختلف می‌تواند به‌کار برده شود.
فرض کنید $I_1,\ldots,I_N$ به‌عنوان یک گردایه متناهی از بازه‌های

باز در $\mathbb{R}$، داده شده باشد. آنگاه دو زیر گردایه $I'_1, I'_2, \ldots, I'_k$ و $I''_1, I''_2, \ldots, I''_L$ موجود هستند، به‌طوری که هر زیر گردایه شامل بازه‌های مجزا است و

$$\bigcup_{j=1}^{N} I_j = \bigcup_{k=1}^{K} I'_k \cup \bigcup_{\ell=1}^{L} I''_\ell.$$

توجه کنید برعکس لم ۲.۰۲، کل اجتماع و نه صرفا بخشی از آن پوشانده می شود.

راهنمایی: I'_1 را انتخاب کنید تا بازه‌ای باشد که نقطه پایانی چپ آن تا حد ممکن دورترین باشد. تمام بازه‌های موجود در I'_1 را کنار بگذارید. اگر بازه‌های باقی مانده از I'_1 جدا باشند، باز هم، دورترین بازه سمت چپ را انتخاب کنید و آن را I'_2 بنامید. در غیر این صورت بازه‌ای را انتخاب کنید که با I'_1 اشتراک دارد اما تا حد امکان از سمت راست دور از دسترس است و این بازه را I''_1 بنامید. این فرایند را تکرار کنید.

۳*. در ابعاد بالاتر هیچ صورت مستقیمی از مسأله ۲ وجود ندارد. با این حال، پوشش کامل به‌وسیله لم پوششی بسیکویچ[1] تأمین می‌شود. نسخه‌ای از این لم بیان می‌کند، که یک عدد صحیح N (تنها وابسته به بعد d) با خاصیت زیر وجود دارد. فرض کنید E مجموعه‌ای کراندار در $\mathbb{R}^d$ باشد که به‌وسیله گردایه $\mathcal{B}$ از گوی‌ها به این معنا (قوی) پوشانده می‌شود، که برای هر $x \in E$ ، $B \in \mathcal{B}$ به مرکز x موجود است. در این صورت، N زیر گردایهٔ $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N$ از گردایه اصلی $\mathcal{B}$ موجودند، به‌طوری که هر $\mathcal{B}_j$ یک گردایه از گوی‌های مجزا است و به علاوه

$$E \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \quad \text{که در آن} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_N.$$

۴. تابع حقیقی-مقدار φ تعریف شده روی بازه (a, b) **محدب** است، اگر ناحیه قرارگرفته در بالای نمودار،

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \varphi(x), a \leq x \leq b\}$$

یک مجموعه محدب باشد. همان‌طورکه در بخش ۱-۵، فصل ۱ تعریف شده است، به طور معادل φ محدب است اگر

$$\varphi(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta\varphi(x_1) + (1 - \theta)\varphi(x_2)$$

1. Besicovtch

برای هر $x_1, x_2 \in (a,b)$ و $0 \leq \theta \leq 1$. همچنین می‌توانیم به عنوان یک نتیجه ملاحظه کنیم که نامساوی زیر از شیب‌ها را داریم:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(y-h)}{h},$$

که در آن $x < y$، $h > 0$ و $x + h < y$.
موارد زیر می‌تواند ثابت شود.

الف) φ روی (a,b) پیوسته است.

ب) φ در شرط لیپ شیتس از توان ۱ بر هر زیر بازه بسته مناسب $[a', b']$ از (a,b) صدق می‌کند. بنابراین φ بر هر زیر بازه پیوسته مطلق است.

ج) φ' همه جا، به غیر از حداکثر در تعداد شمارایی از نقاط موجود است و $\varphi' = D^+\varphi$ یک تابع صعودی است و

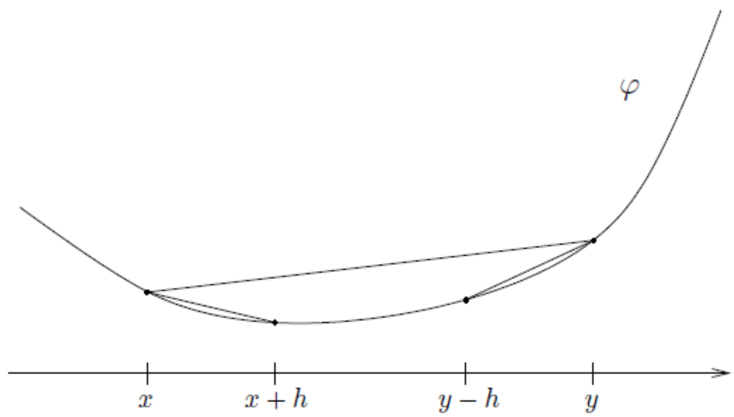
$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y \varphi'(t)dt.$$

د) برعکس، اگر ψ تابعی صعودی روی (a,b) باشد، آنگاه $\varphi(x) = \int_c^x \psi(t)dt$ یک تابع محدب در (a,b) (برای $c \in (a,b)$) است.

۵. فرض کنید که F روی $[a,b]$ پیوسته است، $F'(x)$ برای هر $x \in (a,b)$ موجود است و $F'(x)$ انتگرال‌پذیر است. آنگاه F پیوسته مطلق

است و

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$



شکل ۱۳.۳: یک تابع محدب

راهنمایی: فرض کنید برای تقریبا هر x، $F'(x) \geq 0$. می‌خواهیم نتیجه بگیریم که $F(b) \geq F(a)$. فرض کنید E مجموعه‌ای با اندازه صفر از x هایی باشد که $F'(x) < 0$. آنگاه بنابر تمرین ۲۵، تابع Φ موجود است به‌طوری که صعودی و پیوسته مطلق است و برای هر $x \in E$، $D^+\Phi(x) = \infty$. برای هر δ، $F + \delta\Phi$ را در نظر بگیرید و نتیجه (الف) در تمرین ۲۳، را به‌کار ببرید.

*۶. در ادامه عکس تمرین ۳۰، توابع با تغییر کراندار را مشخص می‌کند.
فرض کنید F تابعی اندازه‌پذیر و کراندار روی $\mathbb{R}$ است. اگر F در یکی از شرایط (الف) یا (ب) در آن تمرین صدق کند، آنگاه F با تغییر روی مجموعه با اندازه صفر ، می تواند به تابعی با تغییر کراندار روی $\mathbb{R}$ تبدیل شود.

به‌علاوه، روی $\mathbb{R}^d$ شرایط زیر را داریم. فرض کنید F تابعی اندازه‌پذیرو کراندار روی $\mathbb{R}^d$ باشد. آنگاه دو شرط زیر روی F معادل هستند

(الف) برای هر $h \in \mathbb{R}^d$، $\int_{\mathbb{R}^d}|F(x+h)-F(x)|dx \leq A|h|$.

(ب) برای هر $j = 1, \cdots, d$، $|\int_{\mathbb{R}^d} F(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx| \leq A$.

برای هر $\varphi \in C^1$ که تکیه‌گاه کراندار دارد و برای آن

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\varphi(x)| \leq 1$$

.

رده توابعی که در (الف) یا (ب) صدق می‌کند، توسیعی از رده توابع با تغییر کراندار به $\mathbb{R}^d$ است.

۷. تابع زیر را درنظر بگیرید

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}e^{2\pi i 2^n x}.$$

(الف) ثابت کنید که برای هر $0<\alpha<1$، f_1 شرط

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leq A_\alpha|x-y|^\alpha$$

را برقرار می‌کند.

* (ب) با این حال، f_1 هیچ جا مشتقپذیر نیست، بنابراین با تغییر کراندار نیست.

۸*. فرض کنید $\mathcal{R}$ مجموعه‌ای از همه مستطیل‌ها در $\mathbb{R}^2$ باشد، که شامل مبدا هستند و اضلاع آن با محورهای مختصات موازی هستند. عملگر ماکسیمال متناظر با این خانواده را در نظر بگیرید، برای مثال

$$f_{\mathcal{R}}^*(x)=\sup_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{m(R)}\int_R|f(x-y)|dy.$$

الف) در این صورت $f\longmapsto f_{\mathcal{R}}^*$ در نامساوی از نوع ضعیف

$$m(\{x:f_{\mathcal{R}}^*(x)>\alpha\})\leq\frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

به ازای هر $\alpha>0$ و هر f انتگرالپذیر و عدد مثبت A صدق نمی‌کند.

ب) با به کار بردن این موارد می‌توان نشان داد که $f \in L^1(\mathbb{R})$ موجود است، به‌طوری که برای $R \in \mathcal{R}$،

$$\limsup_{\operatorname{diam}(R)\to 0} \frac{1}{m(R)} \int_R f(x-y)dy = \infty \qquad \text{هر تقریبا برای } x.$$

در اینجا $\operatorname{diam}(R) = \sup_{x,y\in R}|x-y|$ با قطر مستطیل معادل است.
راهنمایی: برای قسمت (الف) فرض کنید B گوی یکه باشد، و تابع

$$\varphi(x) = \chi_B(x)/m(B)$$

را در نظر بگیرید. برای $\delta > 0$، قرار دهید $\varphi_\delta(x) = \delta^{-2}\varphi(x/\delta)$. در این صورت برای هر (x_1, x_2) با $x_1x_2 \neq 0$،

$$(\varphi_\delta)^*_{\mathcal{R}}(x) \longrightarrow \frac{1}{|x_1||x_2|} \qquad \text{که وقتی } \delta \longrightarrow 0.$$

اگر نوع ضعیف نامساوی برقرار باشد، آنگاه

$$m(\{|x| \leq 1 : |x_1x_2|^{-1} > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha}.$$

که این یک تناقض است، زیرا وقتی که α به بی‌نهایت میل می‌کند، سمت چپ از مرتبه $\frac{(\log \alpha)}{\alpha}$ است.

فصل ۴

فضاهای هیلبرت: مقدمه

نظریه معادلات انتگرال، که در همین ۱۰ سال اخیر متولد شده است؛ به‌دلیل کاربردهای مهم آن توجه وسیعی را به خود معطوف کرده است. بسیاری از نتایج آن همچنان کلاسیک هستند، و هیچ شکی نیست در مدت زمان کوتاهی در تمام دوره های آنالیز بخشی به این مبحث اختصاص داده خواهد شد.

ام. پلانشرل، ۱۹۱۲.

اهمیت فضاهای هیلبرت به دو علت است. اولا این فضاها به‌عنوان تعمیم طبیعی نامتناهی بعد از فضاهای اقلیدسی به وجود می‌آیند و مانند آن‌ها از خواص آشنای تعامد و ویژگی مهم کامل بودن بهره‌مند هستند. ثانیا نظریه فضاهای هیلبرت هم به‌عنوان یک چارچوب مفهومی و هم یک زبان به کار می‌رود که مباحث اولیه آنالیز را با تنظیمات انتزاعی‌تر فرمول‌بندی می‌کند.

به خاطر مثالی از فضای لبگ $L^۲(\mathbb{R}^d)$، پیوند بلافصل این نظریه با نظریه انتگرال گیری پدید می آید. مثال مربوط به $L^۲([-\pi,\pi])$ است که فضاهای هیلبرت را به سری‌های فوریه مرتبط می‌سازد. همچنین فضای هیلبرت اخیر می‌تواند به شکل ظریفی برای تحلیل کرانداری توابع تحلیلی کراندار روی دیسک واحد به کار رود.

یکی از جنبه‌های اساسی نظریه فضاهای هیلبرت، در حالت آشنای متناهی بعد، مطالعه تبدیلات خطی است. با توجه به ماهیت مقدماتی ارائه شده در این فصل، ما خود را به بحث‌های کوتاهی از چندین رده از عملگرها محدود می‌کنیم: عملگرهای یکانی، تصویرها، تابعک‌های خطی و عملگرهای فشرده.

۱.۴ فضای هیلبرت L^2

اولین مثال از یک فضای هیلبرت، گردایه توابع مربعی انتگرالپذیر روی $\mathbb{R}^d$ است که با $L^2(\mathbb{R}^d)$ نشان داده می‌شود. و شامل همه توابع اندازه‌پذیر مختلط-مقدار f است، به‌طوری که در شرط

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

صدق می کنند.

نرم تابع f در فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ به‌صورت

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف می‌شود.

خواننده باید این تعاریف را با تعاریف فضای $L^1(\mathbb{R}^d)$ از توابع انتگرالپذیر و نرم آن که در بخش ۲.۲ فصل ۲ توصیف شده‌اند، مقایسه کند. یک تفاوت اساسی این است که L^2 حاصلضرب داخلی دارد ولی L^1 چنین نیست. بعضی قضایای شمول نسبی بین فضاها در تمرین ۵ به‌دست خواهد آمد.

فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ به طور طبیعی به حاصلضرب داخلی زیر مجهز می‌شود: هرگاه

$$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

و

$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

که بسیار به نرم L^2 نزدیک است، زیرا

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

مشابه با توابع انتگرالپذیر $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=0$ نتیجه می‌دهد که تقریبا همه جا

$$f(x)=0$$

. بنابراین، در حقیقت توابعی را مشخص می‌کنیم که تقریبا همه جا برابرند، و $L^2(\mathbb{R}^d)$ را به‌عنوان فضای کلاس‌های تحت این رابطه‌ی هم ارزی تعریف می‌کنیم. با این حال در عمل اغلب بهتر است تا عناصر در $L^2(\mathbb{R}^d)$ به‌عنوان توابع، نه به‌عنوان کلاس‌های هم ارزی توابع در نظر گرفته شوند.

برای این‌که تعریف ضرب داخلی (f,g) معنا یابد، باید بدانیم که هرگاه f و g متعلق به $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشند، آنگاه $f\bar{g}$ روی $\mathbb{R}^d$ انتگرالپذیر است. این و دیگر خواص اولیه‌ی فضای توابع مربعی انتگرالپذیر در قضیه بعد تجمیع می‌یابد.

در ادامه این فصل نرم L^2 را با $\|.\|$ نشان می‌دهیم (با حذف اندیس $L^2(\mathbb{R}^d)$) مگر درجایی که غیر ازاین ذکر شود.

قضیه ۱.۴. فضای $L^۲(\mathbb{R}^d)$ خواص زیر را دارد:

الف) $L^۲(\mathbb{R}^d)$ یک فضای برداری است.

ب) $f(x)\overline{g(x)}$ انتگرالپذیر است، هرگاه

$$f, g \in L^۲(\mathbb{R}^d)$$

و نامساوی کشی ـ شوارتس $|(f,g)| \leq \|f\|\|g\|$ برقرار است.

پ) اگر $g \in L^۲(\mathbb{R}^d)$ ثابت باشد، نگاشت $f \mapsto (f,g)$ در f خطی است، و نیز $(f,g) = \overline{(g,f)}$.

ت) نامساوی مثلثی برقرار است: $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

برهان. اگر $f, g \in L^۲(\mathbb{R}^d)$، آنگاه از آنجایی که $|f(x)+g(x)| \leq ۲\max(|f(x)|, |g(x)|)$ داریم

$$|f(x)+g(x)|^۲ \leq ۴(|f(x)|^۲ + |g(x)|^۲),$$

بنابراین

$$\int |f+g|^۲ \leq ۴\int |f|^۲ + ۴\int |g|^۲ < \infty,$$

بنابراین $f+g \in L^۲(\mathbb{R}^d)$. همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ به وضوح داریم $\lambda f \in L^۲(\mathbb{R}^d)$، و قسمت (الف) ثابت می‌شود.

برای مشاهده این‌که هرگاه f و g متعلق به $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشند، آنگاه $f\bar{g}$ انتگرالپذیر است، کافی است یادآوری کنیم که برای هر $A, B \geq 0$، داریم $2AB \leq A^2 + B^2$، بنابراین

$$\int |f\bar{g}| \leq \frac{1}{2}\Big[\|f\|^2 + \|g\|^2\Big], \qquad (۱۰.۴)$$

برای اثبات نامساوی کشی ـ شوارتس، نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر $\|f\| = 0$ یا $\|g\| = 0$ آنگاه، تقریبا همه جا $fg = 0$، بنابراین $(f, g) = 0$ و نامساوی به‌وضوح برقرار است. سپس اگر فرض کنیم که $\|f\| = \|g\| = 1$، آنگاه نامساوی مورد انتظار $|(f, g)| \leq 1$ به‌دست می‌آید. و این نامساوی از $|(f, g)| \leq \int |f\bar{g}|$، و نامساوی (۱۰.۴) به‌دست می‌آید. سر انجام در حالتی که هر دو مقدار $\|f\|$ و $\|g\|$ نا صفر هستند، f و g را با قرار دادن

$$\tilde{f} = f/\|f\| \quad \text{و} \quad \tilde{g} = g/\|g\|$$

نرمال می‌کنیم، به این معنا که به‌دست می‌آوریم $\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = 1$. با ملاحظات قبل در می‌یابیم که

$$|(\tilde{f}, \tilde{g})| \leq 1.$$

با ضرب $\|f\|\|g\|$ در طرفین نامساوی فوق، نامساوی کشی شوارتس به‌دست می‌آید.

قسمت (پ) از خطی بودن انتگرال به‌دست می‌آید.

سرانجام، برای اثبات نامساوی مثلثی، نامساوی کشی- شوارتس را به‌صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}\|f+g\|^{۲} &= (f+g, f+g)\\ &= \|f\|^{۲} + (f,g) + (g,f) + \|g\|^{۲}\\ &\leq \|f\|^{۲} + ۲|(f,g)| + \|g\|^{۲}\\ &\leq \|f\|^{۲} + ۲\|f\|\|g\| + \|g\|^{۲}\\ &= (\|f\| + \|g\|)^{۲},\end{aligned}$$

و با گرفتن ریشه دوم اثبات تکمیل می‌شود. □

توجه خویش را به مفهوم حد در فضای $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ معطوف می‌کنیم. نرم روی $L^{۲}$، بدین صورت به متر d منجر می‌شود که : اگر $f, g \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$، آنگاه

$$d(f,g) = \|f-g\|_{L^{۲}(\mathbb{R}^d)}.$$

دنباله $\{f_n\} \subset L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ کشی نامیده می‌شود، هرگاه $d(f_n, f_m) \to ۰$ وقتی‌که $n, m \to \infty$. به‌علاوه این دنباله به $f \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ همگراست، اگر $d(f_n, f) \to ۰$ وقتی‌که $n \to \infty$.

قضیه ۲.۴. فضای $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ با متر خود کامل است.

به عبارت دیگر، هر دنباله کشی در $L^{2}(\mathbb{R}^d)$ به تابعی در $L^{2}(\mathbb{R}^d)$ همگراست این قضیه، که آشکارا با موقعیت مشابه در فضای توابع انتگرالپذیر ریمان متفاوت است، مثالی تصویری از کاربرد مفید انتگرالپذیری لبگ است. جزئیات این نکته و ارتباط آن با سری‌های فوریه را در بخش ۳.۴ بررسی می‌کنیم.

برهان. بحث ارائه شده در این قسمت با برهان کامل بودن L^{1} در فصل ۲ ارتباط نزدیکی دارد. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله کشی در L^{2} باشد، و زیر دنباله $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{f_n\}$ را با ویژگی زیر در نظر بگیرید:

$$\text{به‌ازای هر } k \geq 1 \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

اگر اکنون سری‌هایی را که همگرایی شان در زیر دیده خواهد شد در نظر بگیریم،

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

و

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))|$$

به‌علاوه مجموع جزیی

$$S_K(f)(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

و

$$S_K(g)(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{K}|(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))|,$$

در این صورت نامساوی مثلثی نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\|S_K(g)\| &\leq \|f_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{K}\|(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\| \\ &\leq \|f_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{K} 2^{-k}.\end{aligned}$$

فرض کنید K به بی‌نهایت میل کند و با به کاربردن قضیه همگرایی یکنوا ثابت می‌شود که

$$\int |g|^2 < \infty$$

و از آنجایی که $|f| \leq g$، باید داشته باشیم که $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. به خصوص، سری که f را تعریف می‌کند، تقریبا همه‌جا همگراست و از آنجایی که (با ساختن سری تلسکوپی) مجموع جزیی $k-1$ام این سری دقیقا f_{n_k} است، داریم

تقریبا همه جا به‌ازای هر x، $\qquad f_{n_k}(x) \to f(x)$.

همین طور، برای اثبات این‌که در $L^2(\mathbb{R}^d)$، $f_{n_k} \to f$ به آسانی ملاحظه می‌کنیم که برای هر K، $|f - S_K(f)|^2 \leq (2g)^2$ و قضیه همگرایی تسلطی را به کار می‌بریم و زمانی که K به بی‌نهایت میل می‌کند به‌دست می‌آوریم $\|f_{n_k} - f\| \to 0$.

سرانجام، مرحله پایانی برهان شامل یادآوری کشی بودن f_n می‌شود. به‌ازای ε داده شده، N وجود دارد که به‌ازای هر $n, m > N$ داریم $\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. اگر n_k به گونه‌ای انتخاب شود که $n_k > N$، و $\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ آنگاه نامساوی مثلثی زمانی که $n > N$ نتیجه می‌دهد که

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon.$$

□

ویژگی سودمند مضاعفی از $L^2(\mathbb{R}^d)$ در قضیه زیر گنجانده شده است.

قضیه ۳.۴. فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ جدایی پذیر است، به این معنا که گردایه شمارای $\{f_k\}$ از اعضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ موجود است، به‌طوری که ترکیبات خطی اش در $L^2(\mathbb{R}^d)$ چگال باشند.

برهان. خانواده‌ای از توابع را به‌صورت $r\chi_R(x)$ در نظر بگیرید، که r عددی مختلط با قسمت‌های حقیقی و موهومی گویا و R مستطیلی

در $\mathbb{R}^d$ با مختصات گویا است. ادعا می‌کنیم که ترکیبات خطی این نوع توابع در $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ چگال هستند.

فرض کنید $f \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ و قرار دهید $\varepsilon > ۰$. برای هر $n > ۱$ تابع g_n تعریف شده به‌صورت

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } |f(x)| \leq n,\ |x| \leq n \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. آنگاه $|f - g_n|^{۲} \leq ۴|f|^{۲}$ و تقریبا همه جا $g_n(x) \to f(x)$ [۱]. قضیه همگرایی تسلطی نتیجه می‌دهد که وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند،

$$\|f - g_n\|^{۲}_{L^{۲}(\mathbb{R}^d)} \to ۰$$

بنابراین داریم

$$\|f - g_N\|_{L^{۲}(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{۲}. \qquad \text{برای هر } N\text{،}$$

فرض کنید $g = g_N$، و توجه کنید g یک تابع کراندار با تکیه گاه کراندار است. بنابراین $g \in L^{۱}(\mathbb{R}^d)$. اکنون تابع پله‌ای ϕ را به گونه‌ای می‌یابیم به‌طوری‌که $|\phi| \leq N$ و $\int |g - \phi| < \frac{\varepsilon^{۲}}{۱۶N}$ (قضیه ۱۷.۲ فصل

---

۱. تعریف $f \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ نتیجه می‌دهد که $|f|^{۲}$ انتگرالپذیر است، بنابراین $f(x)$ تقریبا همه‌جا به‌ازای هر x، متناهی است.

۲) با جایگزینی ضرایب و مستطیل‌هایی که در شکل کانونی ϕ با اعداد مختلط با قسمت‌های حقیقی و موهومی گویا و مستطیل‌ها با ضرایب گویا ظاهر می‌شوند، یک تابع ψ با $|\psi| \leq N$ و $\int |g-\psi| < \frac{\varepsilon^۲}{۸N}$ می‌یابیم. سرانجام توجه می‌کنیم که

$$\int |g-\psi|^۲ \leq ۲N \qquad \int |g-\psi| \leq \frac{\varepsilon^۲}{۴}.$$

در نتیجه $\|g-\psi\| < \frac{\varepsilon}{۲}$، بنابراین $\|f-\psi\| < \varepsilon$. □

مثال $L^۲(\mathbb{R}^d)$ همه ویژگی‌های مشخصه یک فضای هیلبرت را دارد و لزوم تعریف فرم انتزاعی این مفهوم را برمی‌انگیزاند.

۲.۴ فضاهای هیلبرت

مجموعه $\mathcal{H}$ یک **فضای هیلبرت** نامیده می‌شود ، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) [1] باشد.

[1] در این مرحله، هر دو حالت را درنظر می‌گیریم، که میدان اسکالر می‌تواند $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد با این وجود، در موارد زیادی به‌عنوان مثال مفاهیم آنالیز فوریه، مقدمات آن با فضاهای هیلبرت روی $\mathbb{C}$ سرو کار دارد.

ب) $\mathcal{H}$ به یک ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ تجهیز شده باشد، به‌طوری‌که

- $f \longmapsto (f,g)$ روی $\mathcal{H}$ به‌ازای هر تابع ثابت $g \in \mathcal{H}$ خطی است.
- $(f,g) = \overline{(g,f)}$
- به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $(f,f) \geq 0$.

قرار می‌دهیم $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}$.

پ) $\|f\| = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$.

ت) به‌ازای هر $f,g \in \mathcal{H}$ نامساوی‌های کشی-شوارتس و مثلثی

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\| \qquad \text{و} \qquad \|f-g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

برقرار هستند.

ث) $\mathcal{H}$ با متر $d(f,g) = \|f-g\|$ کامل است.

ج) $\mathcal{H}$ جدایی‌پذیر است.

به دو نکته در مورد تعریف فضاهای هیلبرت اشاره می‌کنیم. اولا نامساوی‌های کشی-شوارتس و نامساوی مثلثی در حالت (ت) در حقیقت نتایج ساده‌ای از مفروضات (الف) و (ب) هستند. (تمرین ۱ را ببینید). ثانیا این شرط را ارائه می‌دهیم که $\mathcal{H}$ جدایی‌پذیر باشد

زیرا این حالت کاربردی تر است. این گونه نیست که هیچ مثال جدا نشدنی جالبی وجود ندارد. چنین مثالی در مسأله ۲ توصیف شده است.

همچنین، به این نکته توجه می‌دهیم که در مقوله فضاهای هیلبرت می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

یا $f_n \to f$ تا این معنی را بدهد که $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ و این یعنی همان $d(f_n, f)\to 0$.

بعضی از مثال‌های فضاهای هیلبرت را ارائه می‌دهیم.

مثال ۴.۴. فرض کنید E زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ با $m(E) > 0$ باشد، فضای توابع مربعی انتگرالپذیر را که دارای تکیه‌گاه E هستند با $L^2(E)$ نشان می‌دهیم.

$$L^2(E) = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_E |f(x)|^2 dx < \infty \qquad \text{روی } E \text{ می‌کند تکیه } f \right\}$$

ضرب داخلی و نرم روی $L^2(E)$ به‌صورت زیر هستند.

$$(f, g) = \int_E f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad \|f\| = \left(\int_E |f(x)|^2 dx\right)^2.$$

یک بار دیگر دو عنصر از $L^{۲}(E)$ را در نظر می‌گیریم اگر این دو فقط روی یک مجموعه با اندازه صفر اختلاف داشته باشند هم ارز هستند. این تضمین می‌کند که $\|f\| = ۰$ نتیجه مي‌دهد تقريبا همه جا $f = ۰$. ویژگی‌های (الف) و نیز (ج) در مورد $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ ثابت می‌شود.

مثال ۵.۴. یک مثال ساده، فضای مختلط متناهی بعد فضای اقلیدسی است. در واقع،

$$\mathbb{C}^N = \{(a_{۱}, ..., a_N) : a_k \in \mathbb{C}\},$$

زمانی که با ضرب داخلی

$$\sum_{k=۱}^{N} a_k \bar{b}_k,$$

تجهیز می‌شود، یک فضای هیلبرت است که در آن $a = (a_{۱}, ..., a_N)$ و $b = (b_{۱}, ..., b_N)$ در $\mathbb{C}^N$ قرار دارند. در این صورت نرم آن

$$\|a\| = \left(\sum_{k=۱}^{N} |a_k|^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

است.

می‌توان به همان روش، فضای هیلبرت حقیقی $\mathbb{R}^N$ را تعریف کرد.

مثال ۶.۴. یک صورت نامتناهی بعد از مثال بالا فضای $\ell^2(\mathbb{Z})$ است. بنابر تعریف

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : a_i \in \mathbb{C},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}.$$

اگر دنباله‌های نامتناهی را با a و b نشان دهیم، ضرب داخلی و نرم روی $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$(a,b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \qquad \text{و} \qquad \|b\| = \left(\sum_{k=-infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

هستند.

برهان فضای هیلبرت بودن $\ell^2(\mathbb{Z})$ را در تمرین ۴ باقی می‌گذاریم.

در حالی که این مثال بسیار ساده است، ولی ثابت می‌شود که تمام فضاهای هیلبرت نامتناهی جدایی‌پذیر، در اصل $L^2(\mathbb{Z})$ هستند.

همچنین یک برشی از این فضا $\ell^2(\mathbb{N})$ است، که در آن فقط دنباله‌های یک طرفه را در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{C},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}$$

بنابراین به همین روش ضرب داخلی و نرم با مجموع‌گیری از $n = 1$ تا ∞ تعریف می‌شوند.

یک ویژگی مشخصه فضای هیلبرت مفهوم تعامد است. این وجه از آن با نتایج هندسی و تحلیلی غنی‌اش، فضاهای هیلبرت را از فضاهای برداری نرم‌دار متمایز می‌سازد. در ادامه بعضی از این ویژگی‌ها را توصیف می‌کنیم.

۳.۴ تعامد

دو عضو f و g در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ متعامد یا قائم هستند، هرگاه $(f,g)=۰$ در این صورت می‌نویسیم $f\perp g$.

ملاحظات اولیه نشان می‌دهد که قضیه فیثاغورث در شرایط فضاهای هیلبرت نیز برقرار است:

قضیه ۷.۴. اگر $f\perp g$، آنگاه $\|f+g\|^۲=\|f\|^۲+\|g\|^۲$.

برهان. کافی است توجه کنیم که $(f,g)=۰$ نتیجه می‌دهد $(g,f)=۰$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\|f+g\|^۲ &= (f+g,f+g)=\|f\|^۲+(f,g)+(g,f)+\|g\|^۲\\ &=\|f\|^۲+\|g\|^۲,\end{aligned}$$

□

زیرمجموعه نامتناهی شمارا یا متناهی $\{e_1, e_2, \ldots\}$ از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ **متعامد یکه** نامیده می‌شود، هرگاه

$$(e_k, e_\ell) = \begin{cases} 1, & k = \ell \text{ هرگاه} \\ 0, & k \neq \ell \text{ هرگاه} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، هر e_k نرم واحد دارد و هرگاه $k \neq \ell$، بر e_ℓ **متعامد** است.

قضیه ۸.۴. اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ متعامد یکه باشد، و $f = \sum a_k e_k \in \mathcal{H}$ که یک مجموع متناهی است، آنگاه

$$\|f\|^2 = \sum |a_k|^2.$$

این برهان، کاربرد ساده‌ای از قضیه فیثاغورث است.

برای زیر مجموعه یکه ارائه شده $\{e_1, e_2, \ldots\} = (e_k)_{k=1}^{\infty}$ از $\mathcal{H}$ یک سؤال طبیعی این است که آیا این زیرمجموعه همه $\mathcal{H}$ را تولید می‌کند، و این یعنی آیا ترکیبات خطی متناهی عناصر در $\{e_1, e_2, \ldots\}$ همگی در $\mathcal{H}$ چگال هستند؟ اگر این حالت برقرار باشد، می‌گوییم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ **پایه متعامد یکه** برای $\mathcal{H}$ است. اگر پایه متعامد یکه موجود باشد، انتظار داریم که هر $f \in \mathcal{H}$، فرم

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

را به‌ازای مقادیری چون $a_k \in \mathbb{C}$ اختیار کند و در حقیقت با ضرب طرفین در e_j و یادآوری این‌که $\{e_k\}$ متعامد یکه است (به‌طور نمادین) نتیجه می‌دهد

$$(f, e_j) = a_j.$$

این سؤال به وسیله سری‌های فوریه برانگیخته می‌شود. در حقیقت، در حالتی که $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت $L^۲([-\pi,\pi])$ با ضرب داخلی

$$(f, g) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

، است و مجموعهٔ متعامد یکه $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ صرفا یک برچسب‌گذاری مجدد از توابع نمایی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ است، بینش خوبی از قضیه زیر ارائه می‌شود.

با یکسان‌سازی نماد گذاری‌ها با سری‌های فوریه می‌نویسیم

$$f \sim \sum_{k=۱}^{\infty} a_k e_k$$

که در آن به‌ازای هر j، $a_j = (f, e_j)$.

در قضیه بعد، چهار مشخصه هم‌ارز را برای این‌که $\{e_k\}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ باشد، ارائه می‌کنیم.

قضیه ۹.۴. خواص زیر از یک مجموعه متعامد یکه $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ هم‌ارز هستند.

الف) ترکیبات خطی متناهی از عناصر $\{e_k\}$ در $\mathcal{H}$ چگال هستند.

ب) اگر $f \in \mathcal{H}$ و به‌ازای هر j، $(f, e_j) = 0$، آنگاه $f = 0$.

پ) اگر $f \in \mathcal{H}$ و $S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k$، که $a_k = (f, e_k)$، آنگاه زمانی که $N \longrightarrow \infty$، (در نرم) $S_N(f) \longrightarrow f$.

ت) اگر $a_k = (f, e_k)$، آنگاه $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

برهان. ثابت می‌کنیم هر کدام از ویژگی‌ها، منجر به ویژگی بعدی خود می‌شوند و از ویژگی آخر، ویژگی اول به‌دست می‌آید. با فرض (الف) شروع می‌کنیم. با ارائه‌ی $f \in \mathcal{H}$ به‌ازای هر j، $(f, e_j) = 0$، می‌خواهیم ثابت کنیم $f = 0$. با این فرض، دنباله‌ای $\{g_n\}$ از عناصر $\mathcal{H}$ موجود است که ترکیبات خطی متناهی از عناصر $\{e_k\}$ هستند، به‌طوری‌که هرگاه n به بی‌نهایت می‌رود، $\|f - g_n\|$ به صفر میل می‌کند. از آنجایی که به‌ازای هر j، $(f, e_j) = 0$، به‌ازای هر n، خواهیم داشت $(f, g_n) = 0$، بنابراین کاربرد نامساوی کشی-شوارتس نتیجه می‌دهد که

$$\text{به‌ازای هر } n، \qquad \|f\|^2 = (f, f) = (f, f - g_n) \leq \|f\| \|f - g_n\|.$$

با قرار دادن $n \to \infty$ ثابت می‌شود که $\|f\|^2 = 0$، بنابراین $f = 0$ و (الف)، (ب) را نتیجه می‌دهد. اکنون فرض کنید (ب) برقرار باشد.

به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ تعریف می‌کنیم $a_k = (f, e_k)$ و

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k$$

. و ابتدا ثابت کنیم که S_N به عنصر $g \in \mathcal{H}$ همگراست. در واقع، باید توجه کرد که تعریف a_k به این نکته منجر می‌شود که

$$(f - S_N(f)) \perp S_N(f)$$

. بنابراین قضیه فیثاغورث و قضیه ۱۵.۲ این را به‌دست می‌دهند که

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2. \quad (2.4)$$

بنابراین $\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2$، اگر فرض کنید N به بی‌نهایت میل می‌کند، **نامساوی بسل** به‌دست می‌آید،

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|^2,$$

که نتیجه می‌دهد سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ همگرایند. بنابراین، $\{S_N(f)\}_{N=1}^{\infty}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{H}$ است. زیرا

هرگاه $N > M$، $\qquad \|S_N(f) - S_M(f)\|^2 = \sum_{k=M+1}^{N} |a_k|^2$.

از آنجایی که $\mathcal{H}$ کامل است، $g \in \mathcal{H}$ وجود دارد به‌طوری‌که هرگاه N به بی‌نهایت میل کند، $S_N(f) \to g$.

j را ثابت نگه‌دارید، و دقت کنید که به‌ازای مقادیر به قدر کافی بزرگ N،

$$(f - S_N(f), e_j) = a_j - a_j = \circ.$$

از آنجایی که $S_N(f)$ به g میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم

به‌ازای هر j، $(f - g, e_j) = \circ$.

بنابراین با توجه به فرض (ب) $f = g$ است، و ثابت کرده‌ایم که $f = \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} a_k e_k$.

اکنون فرض کنید (پ) برقرار است. از ۲.۴ ملاحظه می‌کنیم، وقتی که N به سمت بی‌نهایت می‌رود، بلا فاصله حد مطلوب را به‌دست می‌آوریم

$$\|f\|^{\text{۲}} = \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} |a_k|^{\text{۲}}.$$

سرانجام، اگر (ت) برقرار باشد، آنگاه دیگر بار از ۲.۴ می‌بینیم که $\|f - S_N(f)\|$ به صفر می‌گراید. از آنجایی که هر $S_N(f)$ یک ترکیب خطی متناهی از عناصر $\{e_k\}$ است، ما دایره ملزومات را کامل کرده‌ایم. $\square$

به طور خاص، نگاهی دقیق‌تر به برهان نشان می‌دهد که نامساوی بسل برای هر خانواده متعامد $\{e_k\}$ برقرار است. متقابلا، تساوی

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{که در آن} \quad a_k = (f, e_k)،$$

که **اتحاد پارسوال** نامیده می‌شود، برقرار است اگر و فقط اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز یک پایه متعامد یکه باشد. اکنون توجه را به وجود پایه معطوف می‌کنیم.

قضیه ۴.۱۰. هر فضای هیلبرت یک پایه متعامد یکه دارد.

مرحله اول برهان یادآوری این حقیقت است که (طبق تعریف) فضای $\mathcal{H}$ جدایی‌پذیر است. بنابراین می‌توانیم گردایه‌ای از عناصر $F = \{h_k\}$ در $\mathcal{H}$ را انتخاب کنیم، به‌طوری‌که ترکیبات خطی متناهی عناصر F در $\mathcal{H}$ چگال باشند.
با یادآوری تعریف قبلی به کار برده شده در حالت فضاهای برداری متناهی بعد آغاز می‌کنیم. تعداد متناهی از عناصر $g_1, ..., g_N$ **مستقل خطی** نامیده می‌شود، هرگاه برای اعداد مختلط a_i، اگر

$$a_1 g_1 + ... + a_N g_N = 0.$$

آنگاه $a_1 = ... = a_N = 0$. به عبارت دیگر، هیچ عضو g_i یک ترکیب خطی از دیگر اعضا نیست. به خصوص، دقت می‌کنیم که هیچ

یک از g_i ها، نمی‌تواند صفر باشد. می‌گوییم یک خانواده شمارا از اعضا، **مستقل خطی** است، اگر همه زیر مجموعه‌های متناهی از این خانواده، مستقل خطی باشند.
اگر به‌صورت متوالی، از عناصر h_k که با اعضای $h_1,...,h_{k-1}$ وابسته خطی هستند، صرف‌نظر کنیم، آنگاه گردایه پایانی $h_1 = f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ شامل ترکیبات خطی از عناصر می‌شود که ترکیبات خطی متناهی آن‌ها به همان صورت هستند که به‌وسیله $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$ به‌دست می‌آید و این ترکیبات خطی نیز در $\mathcal{H}$ چگال هستند.
برهان قضیه حاضر از کاربرد یک ساختار آشنا که **فرایند گرام-اشمیت** نامیده می‌شود، می‌آید. خانواده متناهی از عناصر $\{f_1, ..., f_k\}$ داده شده است فضای تولید شده توسط این خانواده مجموعه ترکیبات خطی متناهی از عناصر

$$\{f_1, ..., f_k\}$$

است. فضای تولید شده توسط خانواده $\{f_1, ..., f_k\}$ را به‌وسیله $span(\{f_1, ...f_k\})$ نشان می‌دهیم.
اکنون یک دنباله از بردارهای متعامد یکه $e_1, e_2...$ را می‌سازیم که به‌ازای هر $n \geq 1$،

$$span(\{e_1, ..., e_n\}) = span(\{f_1, ..., f_n\}).$$

این کار را به روش استقرا انجام می‌دهیم.

بنابر فرض مستقل خطی بودن، $f_1 \neq 0$.

بنابراین قرار می‌دهیم $e_1 = f_1/\|f_1\|$ سپس فرض کنید بردارهای متعامد یکه، $e_1, ..., e_k$ پیدا شده باشند، به‌طوری‌که برای k داده شده $span(\{e_1, ..., e_k\}) = span(\{f_1, ..., f_k\})$. اکنون e'_{k+1} را به‌صورت

$$f_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} a_j e_j$$

امتحان می‌کنیم. برای برقراری $(e'_{k+1}, e_j) = 0$ به

$$a_j = -(f_{k+1}, e_j)$$

نیاز داریم، و این انتخاب a_j به‌ازای $1 \leq j \leq k$ ایجاب می‌کند e'_{k+1} با $e_1, ..., e_k$ متعامد باشد. به‌علاوه فرض مستقل خطی بودن، تضمین می‌کند که $e'_{k+1} \neq 0$. بنابراین تنها به «نرمال سازی مجدد» نیاز داریم و قرار می‌دهیم $e_{k+1} = e'_{k+1}/\|e'_{k+1}\|$ تا مرحله استقرا تکمیل شود. با این مرحله پایه متعامد یکه $\mathcal{H}$ را می‌یابیم.

توجه کنید که ما تلویحا فرض کرده‌ایم که تعداد اعضای مستقل خطی $f_1, f_2, ...$ نامتناهی است. در حالتی که تنها N بردار مستقل خطی $f_1, ..., f_N$ موجود هستند آنگاه $e_1, ..., e_N$ که به همان روش ساخته شده است، یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ فراهم می‌کند. اگر $\mathcal{H}$ یک

فضای با پایه متعامد یکه شامل تعداد متناهی اعضا باشد، آنگاه می‌گوییم $\mathcal{H}$ متناهی بعد است. در غیر این صورت $\mathcal{H}$ نامتناهی بعد گفته می‌شود.

۴.۴ نگاشت‌های یکانی

یک تناظر بین دو فضای هیلبرت که ساختار آن‌ها را حفظ می‌کند یک تبدیل خطی یکانی است. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید دو فضای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ به ترتیب با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ و $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}'}$ و نرم‌های $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{H}'}$ به ما داده شده اند. نگاشت

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$$

بین این فضاها یکانی نامیده می‌شود، هرگاه

الف) U خطی باشد، یعنی $U(\alpha f + \beta g) = \alpha U(f) + \beta U(g)$.

ب) U دوسویی است.

پ) به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ $\|Uf\|_{\mathcal{H}'} = \|f\|_{\mathcal{H}}$.

بدین ترتیب نتایجی ارائه می‌شود. اولا، از آنجایی که U دوسویی است، معکوس $U^{-1} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ موجود است که آن نیز یکانی است.

قسمت (پ) نیز نتیجه می‌دهد که اگر U یکانی باشد، آن‌گاه

$$(Uf, Ug)_{\mathcal{H}'} = (f, g)_{\mathcal{H}} \qquad \text{به‌ازای هر } f, g \in \mathcal{H}$$

برای دیدن این موضوع، کافی است به روش «قطبی» عمل کنیم، به این معنا که، برای هر فضای برداری (مثلا روی $\mathbb{C}$) با ضرب داخلی $(\circ, \circ)$ و نرم $\|.\|$ داریم

$$(F, G) = \frac{۱}{۴}\Big[\|F + G\|^۲ - \|F - G\|^۲ + i(\|\frac{F}{i} + G\|^۲ - \|\frac{F}{i} - G\|^۲)\Big].$$

که F و G عناصر فضا هستند.

مفاهیم فوق به این منجر می‌شود که بگوییم دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ **هم‌ارز یکانی** یا **یکریخت یکانی** هستند، هرگاه یک نگاشت یکانی $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ موجود باشد. به وضوح، یکریختی یکانی فضاهای هیلبرت یک رابطه هم‌ارزی است.

با توجه به این تعریف اکنون به این مرحله می‌رسیم که برای گزاره‌ای که پیش‌تر ذکر کردیم، معنایی دقیق ارائه دهیم به این صورت که تمام فضاهای هیلبرت نامتناهی بعد یکی و در اصل $\ell^۲(\mathbb{Z})$ هستند.

نتیجه ۱۱.۴. هر دو فضای هلبرت نامتناهی بعد هم‌ارز یکانی هستند.

برهان. اگر $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ دو فضای هیلبرت نامتناهی بعد باشند، برای هر کدام یک پایه متعامد یکه انتخاب می‌کنیم، مثل

$$\{e_1, e_2, ...\} \subset \mathcal{H} \quad \text{و} \quad \{e'_1, e'_2, ...\} \subset \mathcal{H}'.$$

حال نگاشت تعریف شده را که در ادامه می‌آید در نظر بگیرید: اگر $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$، آنگاه

$$U(f) = g \quad \text{که در آن} \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e'_k.$$

به وضوح، نگاشت U هم خطی و هم وارون‌پذیر است. به‌علاوه، بنابر تساوی پارسوال، داریم

$$\|Uf\|_{\mathcal{H}'}^2 = \|g\|_{\mathcal{H}'}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

سرانجام، همه فضاهای هیلبرت نامتناهی بعد با $\ell^2(\mathbb{N})$ هم ارز یکانی هستند و با برچسب گذاری مجدد، با $\ell^2(\mathbb{Z})$ هم‌ارزند. با استدلال مشابه نیز نتایج زیر را داریم:

نتیجه ۱۲.۴. هر دو فضای هیلبرت متناهی بعد هم‌ارز یکانی هستند، اگر و فقط اگر هم بعد باشند.

بنابراین هر فضای هیلبرت متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ (یا روی $\mathbb{R}$) با $\mathbb{C}^d$ (یا $\mathbb{R}^d$) برای یک d، هم‌ارز است.

فضاهای پیش-هیلبرت

اگرچه فضاهای هیلبرت به‌طور طبیعی به‌وجود می‌آیند، اغلب شروع با یک فضای پیش-هیلبرت نیز مرسوم است، که یک فضای $\mathcal{H}_\circ$ است که همه ویژگی‌های یک فضای هیلبرت به جز (ث) را دارد به عبارت دیگر $\mathcal{H}_\circ$ کامل فرض نمی‌شود. یک مثال اولیه از این دست، به طور غیر صریح، در اوایل مطالعه سری‌های فوریه با فضای $\mathcal{H}_\circ = \mathcal{R}$ از توابع انتگرالپذیر ریمان روی $[-\pi,\pi]$ با ضرب داخلی معمولی را به‌دست آمد. در ادامه به آن بر می‌گردیم. مثال‌های دیگر در فصل بعد در مطالعه‌ی حل معادلات دیفرانسیل جزئی ظاهر می‌شوند.

خوشبختانه، هر فضای پیش-هیلبرت $\mathcal{H}_\circ$ می‌تواند کامل بشود.

قضیه ۱۳.۴. فرض کنید فضای پیش-هیلبرت $\mathcal{H}_\circ$ با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)_\circ$ داده شده است. آنگاه می‌توانیم فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ بیابیم به‌طوری‌که

الف) $\mathcal{H}_\circ \subset \mathcal{H}$

ب) هرگاه $f,g\in\mathcal{H}_\circ$، $(f,g)_\circ=(f,g)$.

پ) $\mathcal{H}_\circ$ در $\mathcal{H}$ چگال است.

یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ که ویژگی‌هایی مورد انتظار موجود در قضیه بالا را دارد، یک کامل سازی $\mathcal{H}_\circ$ نامیده می‌شود.به ارائه طرحی از نحوه ساختن $\mathcal{H}$ اکتفا می‌کنیم، زیرا از روش آشنای کانتور برای به‌دست آوردن اعداد حقیقی از عنوان اعداد گویا از طریق دنباله‌های کشی گویا پیروی می‌کند.

در واقع گردایهٔ همه دنباله‌های کشی $\{f_n\}$ با $f_n\in\mathcal{H}_\circ$ و $\text{۱}\le n<\infty$ را درنظر بگیرید. یک رابطه هم‌ارزی در این گردایه با هم‌ارز گرفتن $\{f_n\}$ با $\{f'_n\}$ به این صورت تعریف می‌شود که وقتی $n\to\infty$ و $f_n-f'_n$ به صفر میل کند. گردایه کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. به آسانی ثابت می‌شود که $\mathcal{H}$ دارای یک ساختار فضای برداری و ضرب داخلی است که برای f و g در $\mathcal{H}$ به‌صورت $\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)$ تعریف می‌شود که در آن $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌های کشی در $\mathcal{H}_\circ$ و به ترتیب نمایشگر عناصر f و g در $\mathcal{H}$ هستند.

سپس اگر $f\in\mathcal{H}_\circ$ دنباله $\{f_n\}$ را چنان می گیریم که به‌ازای هر n، $f_n=f$ تا f به‌عنوان عنصر $\mathcal{H}$ شناخته شود و $\mathcal{H}_\circ\subset\mathcal{H}$. برای دیدن این‌که $\mathcal{H}$ کامل است، فرض کنید $\{F^k\}_{k=\text{۱}}^{\infty}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{H}$ باشد که در آن هر F^k نمایشی به‌صورت $\{f_n^k\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ و $f_n^k\in\mathcal{H}_\circ$ دارد. اگر F

در $\mathcal{H}$ را به‌صورت دنباله $\{f_n\}$ تعریف کنیم به‌طوری‌که $f_n = f^n_{N(n)}$ که در آن $N(n)$ به گونه‌ای است که برای $j \geq N(n)$ داریم $|f^n_{N(n)} - f^n_j| \leq \frac{۱}{n}$، آنگاه داریم $F^k \to F$ در $\mathcal{H}$.

همچنین می‌توانیم ملاحظه کنیم که کامل سازی $\mathcal{H}$ از $\mathcal{H}_۰$ در حد یکریختی منحصر بفرد است. (تمرین ۱۴ را ببینید.)

۵.۴ سری‌های فوریه و قضیه فاتو

پیش از این ارتباط جالبی را بین فضاهای هیلبرت و خواص مقدماتی سری‌های فوریه دیده‌ایم. اینک می‌خواهیم این ایده را دنبال کنیم و به آنالیز مختلط نیز مرتبط سازیم.

زمانی‌که سری‌های فوریه را درنظر می‌گیریم، طبیعی است که از رده وسیع توابع انتگرالپذیر روی $[-\pi, \pi]$ آغاز کنیم. توجه کنید که از آنجا که بازه $[-\pi, \pi]$ اندازه متناهی دارد و با توجه به نامساوی کشی شوارتس $L^۲([-\pi, \pi]) \subset L^۱([-\pi, \pi])$، بنابراین اگر $f \in L^۱([-\pi, \pi])$ و $n \in \mathbb{Z}$، n امین ضریب فوریه را با

$$a_n = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

تعریف می‌کنیم.

سری‌های فوریه f به‌طور نمادین به‌صورت $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$ هستند و می‌نویسیم

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},$$

برای آنکه نشان دهیم مجموع طرف راست، سری‌های فوریه تابع سمت چپ است. این نظریه توسعه یافته تا یک تعمیم طبیعی از نتایج قدیمی‌تر به‌دست آمده درجلد ۱ را فراهم کند.

قضیه ۱۴.۴. فرض کنید f روی $[-\pi, \pi]$ انتگرالپذیر باشد.

الف) اگر به‌ازای هر n، $a_n = ۰$، آنگاه تقریبا به‌ازای هر x، $f(x) = ۰$.

ب) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{inx}$ تقریبا به‌ازای هر x، وقتی که $r \to ۱$ و $r < ۱$، به $f(x)$ میل می‌کند.

نتیجه دوم، تقریبا همه جا «جمعپذیری آبل» تابع f از سری فوریه‌اش است. توجه کنید از آنجایی که $|a_n| \leq \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$، سری‌های $\sum a_n r^{|n|} e^{inx}$ برای هر r، $۰ \leq r \leq ۱$ به طور مطلق و یکنواخت همگرا هستند.

برهان. استنباط اول نتیجه فوری از دومی است. برای اثبات دومی

یادآوری می‌کنیم که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{iny} = P_r(y) = \frac{۱ - r^۲}{۱ - ۲r\cos y + r^۲}$$

برای هسته پواسون، فصل دوم جلد ۱ را ببینید. با $f \in L^۱([-\pi, \pi])$ داده شده شروع می‌کنیم و آن‌را به‌عنوان تابع روی $\mathbb{R}$ با دوره‌ی ۲π توسیع می‌دهیم [۱] . سپس ادعا می‌کنیم برای هر x

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|}e^{inx} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)dy. \qquad (۳.۴)$$

با توجه به قضیه همگرایی تسلطی، طرف راست با

$$\sum r^{|n|}\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{iny}dy,$$

برابر است. به‌علاوه برای هر x و y

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{iny}dy &= \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(y)e^{in(x-y)}dy \\ &= e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy = e^{inx}۲\pi a_n.\end{aligned}$$

---

۱. توجه کنید که بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم $f(\pi) = f(-\pi)$ تا توسیع تناوبی بدون ابهام ساخته شود.

تساوی اول از پایایی انتقال به‌دست می‌آید (بخش ۳.۲، فصل ۲).
از آنجا که هرگاه F متناوب با دوره تناوب 2π و I بازه‌ای به طول 2π باشد، رابطه

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(y)dy = \int_I F(y)dy$$

برقرار است، تساوی دوم حاصل می‌شود. (تمرین ۳، فصل ۲) با توجه به این ملاحظات، تساوی ۳.۴ ثابت می‌شود. حال می‌توانیم به قضایای تقریب یکه استناد کنیم (قضیه ۱۴.۲ و مثال ۳.۴، فصل ۳) تا نتیجه بگیریم که سمت چپ ۳.۴ در هر نقطه از مجموعه لبگی f به $f(x)$ میل می‌کند، بنابراین همگرایی تقریبا ،همه جا برقرار است. (برای درست بودن، فرض قضیه نیازمند این است که f روی کل $\mathbb{R}$ انتگرالپذیر باشد. این فرض را می‌توانیم برای تابع متناوب با تعریف کردن f برابر صفر خارج از $[-2\pi, 2\pi]$ به‌دست آوریم و بنابراین ۳.۴ برای این f اصلاح شده برقرار است، هرگاه $x \in [-\pi, \pi]$). $\square$

به تنظیمات محدود کننده‌تر L^2 بر می‌گردیم. نتایج مهم قضیه ۹.۴ در زمینه سری‌های فوریه را بیان می‌کنیم. برای $f \in L^2([-\pi, \pi])$ همانند گذشته می‌نویسیم

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

قضیه ۱۵.۴. فرض کنید $f \in L^۲([-\pi,\pi])$، آنگاه:

الف) رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^۲ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^۲ dx$$

برقرار است.

ب) نگاشت $f \longmapsto \{a_n\}$ یک تناظر یکانی بین $L^۲([-\pi,\pi])$ و $\ell^۲(\mathbb{Z})$ است.

پ) سری‌های فوریه f در نرم- $L^۲$ به f همگرا هستند، یعنی

که وقتی $N \longrightarrow \infty$ ، $\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^۲ dx \longrightarrow ۰$.

که در آن $S_N(f) = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{inx}$.

با استفاده از نتایج قبل، قرار می‌دهیم $\mathcal{H} = L^۲([-\pi,\pi])$ با ضرب داخلی

$$(f,g) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

و مجموعه متعامد یکه $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را به‌عنوان توابع نمایی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ با $k = ۱$ برای $n = ۰$ و $k = ۲n$ برای $n > ۰$ و $k = ۲|n| - ۱$ برای $n < ۰$ اختیار می‌کنیم.

با نتایج قبل، قسمت (ب) از قضیه ۱۵.۴ برقرار است. بنابراین همه نتایج برقرار است. بنابراین رابطه پارسوال را داریم و از (ت) نتیجه می‌گیریم که وقتی $N \longrightarrow \infty$ داریم $\|f-S_N(f)\|^۲ = \sum_{|n|>N} |a_n|^۲ \longrightarrow$ ۰. به‌طور مشابه اگر $\{a_n\} \in \ell^۲(\mathbb{Z})$ داده شده باشد، آنگاه وقتی که $N, M \to \infty$، داریم $\|S_N(f) - S_M(f)\|^۲ \to ۰$. بنابراین کامل بودن $L^۲$، تضمین می‌کند که یک تابع $f \in L^۲$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\|f - S_N(f)\| \to ۰$. و مستقیما می‌توان تأیید کرد که f، $\{a_n\}$ را به‌عنوان ضرایب فوریه‌اش دارد. با این حساب نتیجه می‌گیریم که نگاشت $\{a_n\} \longmapsto f$ پوشا و بنابراین یکانی است. و این یک نتیجه کلیدی است که روی ساختار فضای $L^۲$ برقرار است و روی توابع انتگرالپذیر ریمان برقرار نیست. در حقیقت فضای $\mathcal{R}$ از توابع انتگرالپذیر ریمان روی $[-\pi, \pi]$ با نرم کامل نیست، حاوی توابع پیوسته است البته $\mathcal{R}$ خودش به توابع کراندار محدود است.

۶.۴ قضیه فاتو

قضیه فاتو یک نتیجه مهم در آنالیز مختلط است. برهانش از اجزایی از فضاهای هیلبرت، سری‌های فوریه و ایده‌های عمیق تری از نظریه

دیفرانسیل تشکیل می شود ولی هیچ یک از این مفاهیم در صورت آن دیده نمی شوند. سوالی که قضیه فاتو به آن جواب می دهد، به سادگی به‌صورت زیر مطرح می شود.

> فرض کنید $F(z)$ روی دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ یک تابع تحلیلی باشد. چه شرایطی روی F تضمین می‌کند که $F(z)$ به معنای مناسبی به مقادیر مرزی $F(e^{i\theta})$ روی دایره واحد همگرا باشد؟

به طور کلی یک تابع تحلیلی روی دیسک واحد می تواند در نزدیکی مرز رفتار کاملا متفاوتی از خود نشان دهد. با وجود این می‌بینیم که اعمال یک شرط کرانداری ساده کافی است تا با آن نتیجه‌ای قوی بگیریم.

اگر F یک تابع تعریف شده روی دیسک واحد $\mathbb{D}$ باشد، می‌گوییم که F یک **حد شعاعی** در نقطه $-\pi \le \theta \le \pi$ روی دایره دارد، اگر حد

$$\lim_{\substack{r \to ۱ \\ r < ۱}} F(re^{i\theta}),$$

وجود داشته باشد.

قضیه ۱۶.۴. یک تابع تحلیلی کراندار $F(re^{i\theta})$ روی دیسک واحد تقریبا همه جا حدود شعاعی دارد.

برهان. می‌دانیم که $F(z)$ یک بسط سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ روی $\mathbb{D}$ دارد که هرگاه $z = re^{i\theta}$ و $r < 1$ مطلقا و یکنواخت همگراست. در حقیقت برای $r < 1$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ سری فوریه تابع $F(re^{i\theta})$ است، به این معنا که

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \qquad \text{هرگاه } n \geq 0$$

و هرگاه $n < 0$ انتگرال به صفر می‌گراید. (فصل ۳ از بخش ۷ کتاب II را ببینید.) M را به گونه ای اختیار می‌کنیم که برای هر $z \in \mathbb{D}$ داشته باشیم $|F(z)| \leq M$. بنابر نامساوی پارسوال

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^n r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta\text{،} \qquad \text{برای هر} \quad 0 \leq r < 1.$$

با فرض $r \to 1$، دیده می‌شود که $\sum |a_n|^2$ همگرا (و نا بیشتر از M^2) است. اکنون فرض می کنیم $F(re^{i\theta})$ تابعی متعلق به L^2 باشد که ضرایب فوریه‌اش a_n هستند هرگاه که $n \geq 0$ و صفر است هرگاه که $n < 0$. بنابراین با توجه به نتیجه (ب) در قضیه ۱۴.۴

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \to F(e^{i\theta}), \qquad \text{تقریبا به‌ازای هر } \theta.$$

□

اگر بحث ارائه شده در بالا را بیازماییم، می‌بینیم که همان نتیجه برای رده بزرگتری از توابع نیز برقرار است. در این رابطه، **فضای هاردی** $H^2(\mathbb{D})$ متشکل از همه توابع تحلیلی F روی گوی یکه $\mathbb{D}$ که در شرط زیر صادق باشند را تعریف می کنیم،

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

همچنین «نرم» را برای توابع F در این رده، $\|F\|_{H^2(\mathbb{D})}$، جذر کمیت معرفی شده در بالا تعریف می کنیم.

دقت می‌کنیم که اگر F کراندار باشد، آنگاه $F \in H^2(\mathbb{D})$ و علاوه بر آن، حدود شعاعی تقریبا همه جا برای هر $F \in H^2(\mathbb{D})$ به‌طور مشابه با بحث ارائه شده برای توابع کراندار موجود است. [1] سرانجام، توجه می‌کنیم که $F \in H^2(\mathbb{D})$ اگر و فقط اگر $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ با $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ به‌علاوه $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|F\|^2_{H^2(\mathbb{D})}$. به خصوص این بیان می‌کند که در حقیقت $H^2(\mathbb{D})$ یک فضای هیلبرت است که می‌تواند به‌عنوان (زیرفضای) $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ از $l^2(\mathbb{Z})$ در نظر گرفته شود، که شامل همه $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ هایی می‌شود که $a_n = 0$ هنگامی که $n < 0$.

به بعضی ملاحظات مهمی از زیرفضاها و تصویرهای متعامد این

---

۱. یک گزاره عمومی تر در مسأله *۵ ارائه می‌شود.

فضاها بعدا پرداخت خواهد شد.

۷.۴ زیرفضاهای بسته و تصویرهای متعامد

یک زیر فضای خطی S (یا به‌طور ساده زیرفضا) از $\mathcal{H}$ یک زیر مجموعه از $\mathcal{H}$ است به طوری که اگر $f, g \in S$ و α و β اسکالر باشند،در شرط $\alpha f + \beta g \in S$ صدق می کند. به عبارت دیگر S نیز یک فضای برداری است.

برای مثال در $\mathbb{R}^۳$، خط‌ها و صفحه‌هایی که از مبدا می‌گذرند به ترتیب زیرفضاهای یک بعدی و دو بعدی هستند. زیرفضای S بسته است، هرگاه $\{f_n\} \subset S$ به $f \in \mathcal{H}$ همگرا باشد، آنگاه f نیز به S تعلق دارد. در مورد فضاهای هیلبرت متناهی بعد، هر زیرفضا بسته است. هرچند، این در مورد فضاهای نامتناهی بعد عام صدق نمی‌کند. به‌عنوان مثال، همانطورکه قبلا نشان داده شده است، زیر فضای توابع انتگرالپذیر ریمان در $L^۲([-\pi, \pi])$ نه بسته است و نه از ثابت کردن یک پایه و در نظر گرفتن همه ترکیبات خطی متناهی از این عناصر پایه به‌دست می‌آید. لازم است ذکر کنیم که هر زیر فضای بسته S از $\mathcal{H}$ با ضرب داخلی که از $\mathcal{H}$ به ارث می‌برد، یک فضای هیلبرت است. (برای جداسازی S تمرین ۱۱ را ببینید.)

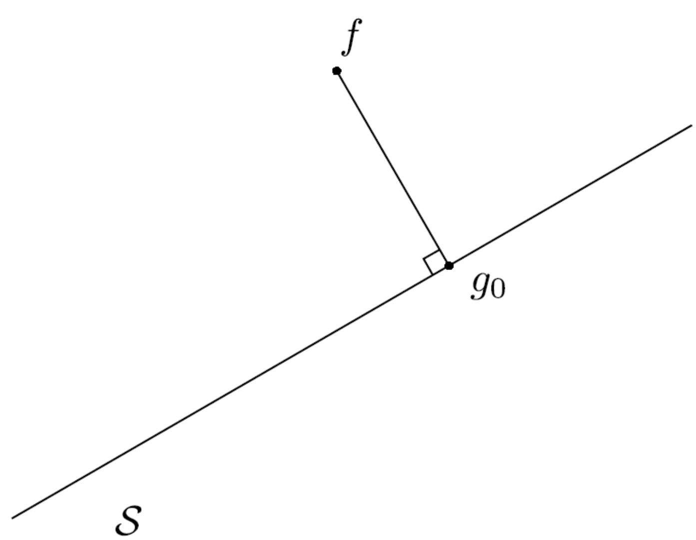
در ادامه، نشان می‌دهیم که یک زیرفضای بسته از خاصیت

مشخصه مهمی از هندسه اقلیدسی بهره می‌برد.

لم ۱۷.۴. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ و $f \in \mathcal{H}$. در این صورت

الف) یک عنصر (یکتا) $g_\circ \in \mathcal{S}$ وجود دارد، به‌طوری‌که به f نزدیک‌ترین است، به این معنا که

$$\|f - g_\circ\| = inf_{g\in\mathcal{S}}\|f - g\|$$



شکل ۱.۴: نزدیک‌ترین عنصر f در S

ب) عنصر $f - g_0$ بر $\mathcal{S}$ عمود است، یعنی

$$(f - g_0, g) = 0 \qquad \text{برای هر } g \in \mathcal{S}$$

شرایط لم می‌تواند در تصویر ۱.۴ تجسم شود.

برهان. اگر $f \in \mathcal{S}$، آنگاه g_0 را مساوی f انتخاب می‌کنیم و دیگر چیزی برای اثبات طرف چپ باقی نمی‌ماند. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم

$$d = \inf_{g \in \mathcal{S}} \|f - g\|,$$

و توجه کنید که باید داشته باشیم $d > 0$ چون $f \notin \mathcal{S}$ و $\mathcal{S}$ بسته است. یک دنباله $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{S}$ در نظر بگیرید، به‌طوری‌که

$$\|f - g_n\| \to d \qquad \text{هرگاه } n \to \infty.$$

ادعا می‌کنیم که $\{g_n\}$ یک دنباله کشی است که حد آن عنصر مورد نظر g_0 خواهد بود. در حقیقت کافی است نشان دهیم که یک زیر دنباله $\{g_n\}$ همگراست و این حکم در حالت متناهی بعد بلافاصله برقرار است، زیرا یک گوی بسته فشرده است. همان‌گونه که در بخش ۱۰.۴ می‌بینیم این فشردگی در حالت کلی نقض می‌شود و بنابراین استدلال ظریف‌تری در این مورد نیاز است. برای اثبات

ادعا، قانون متوازی‌الاضلاع را که در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ برقرار است، استفاده می‌کنیم
(۴.۴)
به‌ازای هر $A, B \in \mathcal{H}$
$$\|A+B\|^۲ + \|A-B\|^۲ = ۲[\|A\|^۲ + \|B\|^۲]$$
بررسی ساده‌ی این نامساوی که شامل نوشتن هر نرم از طریق ضرب داخلی است، برعهده خواننده است. با قرار دادن $A = f - g_n$ و $B = f - g_m$ در قانون متوازی‌الاضلاع، درمی‌یابیم

$$\|۲f - (g_n + g_m)\|^۲ + \|g_m - g_n\|^۲ = ۲[\|f - g_n\|^۲ + \|f - g_m\|^۲].$$

چون $\mathcal{S}$ یک زیر فضا است، بنابراین مقدار $۱/۲(g_n + g_m)$ متعلق به $\mathcal{S}$ است، بنابراین

$$\begin{aligned}\|g_m - g_n\|^۲ &= ۲[\|f - g_n\|^۲ + \|f - g_m\|^۲] - \|۲f - (g_n + g_m)\|^۲\\ &\leq ۲[\|f - g_n\|^۲ + \|f - g_m\|^۲] - ۴d^۲.\end{aligned}$$

بر این اساس، می‌دانیم که هرگاه $n, m \to \infty$، $\|f - g_n\| \to d$ و $\|f - g_m\| \to d$، بنابراین از نامساوی بالا به‌دست می‌آید که $\{g_n\}$ یک دنباله کشی است. از آنجایی که $\mathcal{H}$ کامل و $\mathcal{S}$ بسته است، دنباله $\{g_n\}$ باید یک حد $g_۰$ در $\mathcal{S}$ داشته باشد و بنابراین $d = \|f - g_n\|$ برقرار است.

ثابت می‌کنیم که اگر $g \in \mathcal{S}$ ، آنگاه $g \perp (f - g_۰)$. برای هر ϵ (مثبت یا منفی)، آشفتگی $g_۰$ را که به وسیله $g_۰ - \epsilon g$ تعریف می‌شود، در نظر

بگیرید. این عنصر به S تعلق دارد، بنابراین

$$\|f-(g_\circ-\epsilon g)\|^{۲} \geq \|f-g_\circ\|^{۲}.$$

از آنجایی‌که $\|f-(g_\circ-\epsilon g)\|^{۲} = \|f-g_\circ\|^{۲}+\epsilon^{۲}\|g\|^{۲}+۲\epsilon Re(f-g_\circ, g)$
در می‌یابیم که

$$۲\epsilon Re(f-g_\circ, g)+\epsilon^{۲}\|g\|^{۲} \geq \circ \qquad (۵.۴)$$

اگر $Re(f-g_\circ, g) < \circ$، بنابراین با کوچک و مثبت گرفتن ϵ، نتیجه متناقض با ۵.۴ بدست می آمد.بنابراین $Re(f-g_\circ, g)=\circ$. با درنظر گرفتن آشفتگی $g_\circ - i\epsilon g$ یک محاسبه مشابه نشان می‌دهد

$$Im(f-g_\circ, g)=\circ$$

بنابراین $(f-g_\circ, g)=\circ$.

سرانجام، منحصر بفردی $g_\circ$ از مباحث بالا در مورد تعامد به‌دست می‌آید. فرض کنید $\tilde{g}$ یک نقطه دیگر در S است که کمترین فاصله را با f دارد. با درنظر گرفتن $g=g_\circ-\tilde{g}_\circ$ در بحث پایانی درمی‌یابیم $(f-g_\circ)\perp(g-\tilde{g}_\circ)$ و قضیه فیثاغورث به‌دست می‌دهد

$$\|f-\hat{g}_\circ\|^{۲} = \|f-g_\circ\|^{۲}+\|g_\circ-\tilde{g}_\circ\|^{۲}.$$

از آنجایی که با توجه به فرض داریم، $\|f-\tilde{g}_\circ\|^{۲}=\|f-g_\circ\|^{۲}$ نتیجه می‌گیریم که $\|g_\circ-\tilde{g}_\circ\|=\circ$. □

با استفاده از لم اکنون یک مفهوم مفیدی را معرفی می‌کنیم که صورتی دیگر از مفهوم تعامد است. اگر S یک زیرفضای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد **متمم متعامد** S را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S^{\perp} = \{f \in \mathcal{H} : (f, g) = 0 \quad \text{به‌ازای هر } g \in S\}.$$

به وضوح $S^{\perp}$ نیز یک زیرفضای $\mathcal{H}$ است و به‌علاوه $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. برای مشاهده این امر توجه کنید که اگر $f \in S \cap S^{\perp}$، آنگاه f باید بر خودش متعامد باشد، بنابراین $\|f\| = (f, f) = 0$ و بنابراین $f = 0$. به‌علاوه $S^{\perp}$ خودش یک زیرفضای بسته است. در واقع اگر $f_n \to f$، آنگاه به‌ازای هر g با توجه به نامساوی کوشی شوارتس، داریم $(f_n, g) \to (f, g)$. بنابراین اگر $(f_n, g) \to 0$ برای هر $g \in S$ و هر n، آنگاه برای هر g، $(f, g) = 0$.

قضیه ۱۸.۴. اگر S یک زیرفضای بسته از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه

$$\mathcal{H} = S \oplus S^{\perp}.$$

مفهوم قضیه این است که هر $f \in \mathcal{H}$ می‌تواند به‌صورت منحصر بفرد $f = g + h$ نوشته شود، که در آن $g \in S$ و $h \in S^{\perp}$. می‌گوییم $\mathcal{H}$ جمع مستقیم S و $S^{\perp}$ است. این معادل است با گفتن این‌که هر f در $\mathcal{H}$

جمع دو عنصر است یکی در S دیگری در $S^\perp$ و $S\cap S^\perp$ تنها شامل صفر است.

برهان قضیه به لم قبل برمی‌گردد که نزدیک‌ترین عنصر f در S است. در حقیقت برای هر $f\in\mathcal{H}$، $g_\circ$ را از لم انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم

$$f = g_\circ + (f - g_\circ),$$

براین اساس، $g_\circ \in S$ و لم اشاره می‌کند که $f - g_\circ \in S^\perp$ و این نشان می‌دهد که f مجموع یک عنصر در S و یکی در $S^\perp$ است. برای اثبات این که تجزیه منحصر بفرد است، فرض کنید که

$$f = g + h = \tilde{g} + \tilde{h} \quad \text{که در آن} \quad g,\tilde{g}\in S \quad \text{و} \quad h,\tilde{h}\in S^\perp.$$

بنابراین، باید داشته باشیم $g - \tilde{g} = \tilde{h} - h$. از آنجایی که سمت چپ به S تعلق دارد و در حالی که سمت راست به $S^\perp$ تعلق دارد این حقیقت که $S\cap S^\perp = \{\circ\}$ نتیجه می‌دهد که $g - \tilde{g} = \circ$ و $\tilde{h} - h = \circ$.

بنابراین $g = \tilde{g}$ و $h = \tilde{h}$ و منحصربفردی ثابت می‌شود.

با تجزیه $\mathcal{H} = S\oplus S^\perp$ یک تصویر طبیعی به روی S به‌صورت

$$P_S(f) = g \quad \text{که در آن} \quad f = g + h \quad \text{و} \quad g\in S \quad \text{و} \quad h\in S^\perp،$$

تعریف می‌شود.

نگاشت P_S **تصویر متعامد** پوشای S نامیده می‌شود و خواص ساده زیر برقرار است:

الف) $f \longmapsto P_S(f)$ خطی است،

ب) $P_S(f) = f$ هرگاه $f \in S$،

پ) $P_S(f) = ۰$ هرگاه $f \in S^\perp$،

ت) $\|P_S(f)\| \leq \|f\|$ برای هر $f \in \mathcal{H}$.

خاصیت (الف) به این معنی است که

$$P_S(\alpha f_۱ + \beta f_۲) = \alpha P_S(f_۱) + \beta P_۲(f_۲),$$

هرگاه $f_۱, f_۲ \in \mathcal{H}$ و β, α اسکالر هستند.

توجه به نکاتی که در ادامه می آید مفید خواهد بود. فرض کنید $\{e_k\}$ یک گردایه (متناهی یا نامتناهی) از بردارهای متعامد یکه در $\mathcal{H}$ است. در این صورت تصویر متعامد P به روی بستار زیرفضای تولید شده به‌وسیله $\{e_k\}$ و به‌صورت $P(f) = \sum_k (f, e_k) e_k$ تعریف می‌شود. در حالتی که گردایه نامتناهی است، مجموع در نرم $\mathcal{H}$ همگراست.

نشان می‌دهیم که این مثال به آنالیز فوریه منجر می‌شود.

مثال ۱۹.۴. در فضای $L^۲([-\pi, \pi])$، به خاطر بیاورید که اگر

$$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

آنگاه مجموع‌های جزئی سری فوریه به‌صورت زیر هستند

$$S_N(f)(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}.$$

بنابراین عملگر مجموع جزئی S_N شامل نگاشت تصویر به روی زیرفضای بسته تولید شده به وسیله $\{e_{-N}, ..., e_N\}$ است.
مجموع S_N می‌تواند به‌صورت یک پیچش

$$S_N(f)(\theta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi$$

نوشته شود که در آن $D_N(\theta) = \sin((N + \frac{۱}{۲})\theta)/\sin(\frac{\theta}{۲})$ **هسته دیریکله** است.

مثال ۲۰.۴. بار دیگر $L^۲([-\pi, \pi])$ را درنظر بگیرید و فرض کنید S زیرفضایی را مشخص کند که شامل همه توابع $F \in L^۲([-\pi, \pi])$ به‌صورت

$$F(\theta) \sim \sum_{n=۰}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

می‌شود. به عبارت دیگر، S مجموعه همه توابع مربعی انتگرالپذیر است که ضرایب فوریه a_n آن برای هر $n < ۰$ صفر می‌شود. از برهان قضیه فاتو، نتیجه می‌شود که S می‌تواند با فضای هاردی $H^۲(\mathbb{D})$

یکسان سازی شود، که در آن $\mathbb{D}$ دیسک واحد است و در نتیجه یک زیرفضای بسته به طوریکانی یکریخت با $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ است. بنابراین، با استفاده از این یکسان سازی، اگر P به معنای تصویر متعامد از $L^2([-\pi,\pi])$ به S باشد، می‌توانیم برای عناصر متناظر با $H^2(\mathbb{D})$ بنویسیم $P(f)(z)$، به این معنا که:

$$P(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

اگر $f \in L^2([-\pi,\pi])$ داده شده باشد، **انتگرال کوشی** f را به وسیله

$$C(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

تعریف می‌کنیم که در آن γ دایره واحد را مشخص می‌کند و z به دیسک یکه تعلق دارد. آنگاه تساوی زیر را داریم

$$\text{برای هر } z \in \mathbb{D} \qquad P(f)(z) = C(f)(z).$$

در واقع از آنجایی که $f \in L^2$ با استفاده از نامساوی کشی شوارتس به‌دست می‌آید که $f \in L^1([-\pi,\pi])$ و بنابراین مجموع و انتگرال را در محاسبات زیر می‌توان جابجا کرد (یاد آوری می‌کنیم $|z| < 1$):

$$P(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) z^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-i\theta}z\right)^n d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1-e^{-i\theta}z} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z} ie^{i\theta} d\theta \\
&= C(f)(z).
\end{aligned}$$

۸.۴ تبدیلات خطی

تمرکز آنالیز در فضاهای هیلبرت به‌طور گسترده‌ای بر مطالعه‌ی تبدیلات خطی شان است. ما قبلا دو رده از تبدیلات را مطالعه کرده‌ایم، نگاشت‌های یکانی و تصویرهای متعامد. دو رده مهم دیگر وجود دارند که در این فصل با جزییات آن‌ها سروکار داریم: «تابعک های خطی» و «عملگرهای فشرده» و به خصوص آن‌هایی که متقارن هستند.

فرض کنید $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای هیلبرت باشند. نگاشت

$$T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$

یک تبدیل خطی است (همچنین عملگر خطی یا عملگر نامیده می‌شود) هرگاه

$$T(af+bg) = aT(f)+bT(g) \qquad \text{برای اسکالرهای } a,b \text{ و } f,g\in\mathcal{H}_1$$

به وضوح، عملگرهای خطی در شرط $T(\circ)=\circ$ صدق می‌کنند.

می‌گوییم که عملگر خطی $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_{\text{۲}}$ کراندار است، هرگاه $M>\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|T(f)\|_{\mathcal{H}_{\text{۲}}}\leq M\|f\|_{\mathcal{H}_{\text{۱}}} \qquad (۶.۴)$$

نرم T با $\|T\|_{\mathcal{H}_{\text{۱}}\to\mathcal{H}_{\text{۲}}}$ یا به طور ساده‌تر $\|T\|$ نشان داده می‌شود و به‌صورت

$$\|T\|=\inf M,$$

تعریف می‌شود که در آن اینفیمم روی M هایی گرفته می‌شود که (۶.۴) برقرار می‌سازد. عملگر همانی یک مثال بدیهی است که با $I(f)=f$ تعریف می شود که البته یک عملگر یکانی و تصویر است و $\|I\|=\text{۱}$.

در آنچه که در ادامه می‌آید، به طور کلی تا جایی که منجر به ابهام نشود، زیر نویس‌های مربوط به نرم‌های عناصر فضای هیلبرت را حذف می کنیم.

لم ۲۱.۴. $\|T\|=\sup\{|(Tf,g)|:\|f\|\leq\text{۱},\|g\|\leq\text{۱}\}$، که در آن البته $f\in\mathcal{H}_{\text{۱}}$ و $g\in\mathcal{H}_{\text{۲}}$.

برهان. اگر $\|T\|\leq M$، نامساوی کوشی- شوارتس نتیجه می‌دهد که

$$|(Tf,g)|\leq M$$

هرگاه $\|f\| \leq ۱$ و $\|g\| \leq ۱$. بنابراین

$$\sup\{|(Tf, g)| : \|f\| \leq ۱, \|g\| \leq ۱\} \leq \|T\|$$

. بر عکس، اگر $\sup\{|(Tf, g)| : \|f\| \leq ۱, \|g\| \leq ۱\} \leq M$، ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر f، $\|Tf\| \leq M\|f\|$. اگر f یا Tf صفر باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در غیر این‌صورت $f' = f/\|f\|$ و $g' = Tf/\|Tf\|$، نرم ۱ را دارد. پس با توجه به فرض

$$|(Tf', g')| \leq M.$$

اما از آنجایی که $|(Tf', g')| = \|Tf\|/\|f\|$ نتیجه می‌دهد که $\|Tf\| \leq M\|f\|$.
□

یک تبدیل خطی T پیوسته است اگر $T(f_n) \to T(f)$ زمانی که $f_n \to f$. به وضوح خطی بودن این نتیجه را می‌دهد که T روی کل $\mathcal{H}_۱$ پیوسته است، اگر و فقط اگر در مبدأ پیوسته باشد. در حقیقت شرایط کرانداری و پیوستگی هم‌ارز هستند.

قضیه ۲۲.۴. یک عملگر خطی $T : \mathcal{H}_۱ \to \mathcal{H}_۲$ کراندار است، اگر و فقط اگر پیوسته باشد.

برهان. اگر T کراندار باشد آنگاه $\|T(f) - T(f_n)\|_{H_۲} \leq M\|f - f_n\|_{\mathcal{H}_۱}$ بنابراین T پیوسته است. برعکس فرض کنید T پیوسته است اما

کراندار نیست. آنگاه برای هر n، $f_n \neq 0$ وجود دارد، به‌طوری‌که $\|T(f_n)\| \geq n\|f_n\|$. عنصر $g_n = f_n/(n\|f_n\|)$ نرم $\frac{1}{n}$. دارد بنابراین $g_n \to 0$. از آنجایی که T در صفر پیوسته است، باید داشته باشیم $T(g_n) \to 0$ که با حکم $\|T(g_n)\| \geq 1$ متناقض است. □

در پایان این فصل فرض می‌کنیم که همه عملگرهای خطی کراندار و بنابراین پیوسته هستند. شایسته است یادآوری کنیم که هر عملگر خطی بین فضاهای هیلبرت متناهی بعد لزوما پیوسته است.

۹.۴ توابع خطی و قضیه نمایش ریس

یک **تابعک خطی** L یک تبدیل خطی از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به میدان اسکالر های زمینه است که فرض می‌کنیم اعداد مختلط باشد،

$$l : \mathcal{H} \to \mathbb{C}.$$

البته $\mathbb{C}$ را به‌عنوان یک فضای هیلبرت با نرم استاندارد قدر مطلق در نظر می‌گیریم.

یک مثال طبیعی ار یک تابعک خطی به‌وسیله ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ داده می‌شود و در واقع برای ثابت $g \in \mathcal{H}$ نگاشت

$$l(f) = (f, g)$$

خطی است و همچنین با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتس کراندار است. در واقع

$$|(f,g)| \leq M\|f\|$$

که در آن $M = \|g\|$ و به‌علاوه $l(g) = M\|g\|$. همچنین داریم $\|l\| = \|g\|$. نکته قابل ملاحظه این است که این مثال جامع است، به عبارت دیگر هر تابعک خطی پیوسته روی فضای هیلبرت به یک ضرب داخلی منجر می‌شود. این قضیه نمایش ریس نامیده می‌شود.

قضیه ۲۳.۴. فرض کنید ℓ یک تابعک خطی پیوسته روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت یک عضو منحصربفرد $g \in \mathcal{H}$ وجود دارد، به‌طوری‌که برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$\ell(f) = (f,g),$$

به‌علاوه $\|\ell\| = \|g\|$.

برهان. زیرفضای $\mathcal{H}$ را که به وسیلهٔ

$$S = \{f \in \mathcal{H} :\ \ell(f) = \circ\},$$

تعریف شده است، در نظر بگیرید. از آنجا که ℓ پیوسته است، زیرفضای S که فضای پوچ ℓ نامیده می‌شود، بسته است. اگر $S = \mathcal{H}$

آنگاه $\ell = 0$ و قرار می‌دهیم $g = 0$. در غیر این‌صورت $S^\perp$ نابدیهی است و $h \in S^\perp$ را با شرط $\|h\| = 1$ انتخاب می‌کنیم. با این انتخاب h، g را به‌صورت $g = \overline{L(h)}h$ تعیین می‌کنیم. بنابراین اگر قرار دهیم $u = \ell(f)h - \ell(h)f$ آنگاه $u \in S$ و بنابراین $(u, h) = 0$. در نتیجه

$$0 = (\ell(f)h - \ell(h)f, h) = \ell(f)(h, h) - (f, \overline{\ell(h)}h).$$

از آنجایی که $(h, h) = 1$ به‌دست می‌آوریم $\ell(f) = (f, g)$. □

در این مرحله به نکته‌ای برای استفاده‌های بعدی اشاره می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{H}_0$ یک فضای پیش-هیلبرت باشد که $\mathcal{H}$ کامل‌سازی آن است. فرض کنید ℓ_0 یک تابعک خطی کراندار روی $\mathcal{H}_0$ باشد، یعنی به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}_0$

$$|\ell_0(f)| \leq M\|f\|$$

. آنگاه ℓ_0 یک توسیع L به یک تابعک خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ دارد، به‌طوری‌که هرگاه به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ $|\ell_0(f)| \leq M\|f\|$. این توسیع نیز منحصر بفرد است. برای مشاهده این امر صرفا گفته می‌شود که $\{\ell_0(f_n)\}$ یک دنباله کوشی است به طوری که بردارهای $\{f_n\}$ به $\mathcal{H}_0$ متعلق اند و $f_n \to f$ در $\mathcal{H}$، هنگامی که $n \to \infty$. بنابراین $\ell(f)$ را به‌صورت $\lim_{n\to\infty} \ell_0(f_n)$ تعریف می‌کنیم. تأیید ویژگی‌های بیان شده

از ℓ بلافاصله به‌دست می‌آید.(این نتیجه یک مورد خاص از توسیع لم ۷.۵ در فصل بعد است)

الحاق‌ها

اولین کاربرد قضیه نمایش ریس ، تعیین وجود یک «الحاق» برای یک تبدیل خطی است.

قضیه ۲۴.۴. فرض کنید $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یک تبدیل خطی کراندار باشد. یک تبدیل خطی کراندار منحصربفرد T^* روی $\mathcal{H}$ وجود دارد، به‌طوری‌که:

الف) $(Tf, g) = (f, T^*g)$

ب) $\|T\| = \|T^*\|$

پ) $(T^*)^* = T$

عملگر خطی $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ که در شرایط بالا صدق کند، الحاق T نامیده می‌شود.

برای اثبات وجود یک عملگر که در شرط (الف) صدق کند، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $g \in \mathcal{H}$ ثابت، تابعک خطی $\ell = \ell(g)$ ، تعریف شده به وسیله

$$\ell(f) = (Tf, g),$$

کراندار است. در واقع از آنجایی که T کراندار است، $\|Tf\| \leq M\|f\|$، بنابراین نامساوی کشی-شوارتس نتیجه می‌دهد که

$$|\ell(f)| \leq \|Tf\|\|g\| \leq B\|f\|,$$

که $B = M\|g\|$. در نتیجه، قضیه نمایش ریس وجود یک عضو منحصربفرد $h \in \mathcal{H}$، $h = h_g$ را تضمین می‌کند، به‌طوری‌که

$$\ell(f) = (f, h).$$

در این صورت تعریف می‌کنیم $T^*g = h$ و توجه کنید که وابستگی $T^* : g \to h$ خطی است و در شرط (الف) صدق می‌کند. این واقعیت که $\|T\| = \|T^*\|$ همزمان از (الف) و لم ۲۱.۴ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{|(Tf, g)| : \|f\| \leq ۱, \|g\| \leq ۱\} \\
&= \sup\{(f, T^*g)| : \|f\| \leq ۱, \|g\| \leq ۱\} \\
&= \|T^*\|.
\end{aligned}$$

برای اثبات (پ)، توجه کنید که $(Tf, g) = (f, T^*g)$ برای هر f و g، اگر و فقط اگر $(T^*f, g) = (f, Tg)$ برای هر g و f برقرار اند، که می‌توانیم با استفاده از مزدوج مختلط و برعکس کردن نقش‌های f و g به‌دست بیاوریم.

در اینجا چند نکته دیگر را ذکر می‌کنیم.

الف) در مورد خاص زمانی که $T = T^*$ (می‌گوییم که T **متقارن** است) داریم

$$\|T\| = \sup\{|(Tf, f)| :\ \|f\| = ۱\}. \qquad (۷.۴)$$

این نتیجه را می توان با لم ۲۱.۴ که برای هر عملگر خطی برقرار است مقایسه نمود. برای اثبات (۷.۴) قرار دهید

$$M = \sup\{|(Tf, f)| : \|f\| = ۱\}$$

با توجه به لم ۲۱.۴، واضح است که $M \le \|T\|$. برعکس، اگر f و g متعلق به $\mathcal{H}$ باشند، تساوی «قطبی سازی» زیر که به آسانی به‌دست می‌آید ، برقرار است. به‌ازای هر $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(Tf, g) = \frac{۱}{۴}[&(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g)\\ &+ i(T(f+ig), f+ig) - i(T(f-ig), f-ig)],\end{aligned}$$

برای هر $h \in \mathcal{H}$، (Th, h) حقیقی است، زیرا $T = T^*$، بنابراین $(Th, h) = (h, T^*h) = (h, Th) = \overline{(Th, h)}$. **درنتیجه**

$$Re(Tf, g) = \frac{۱}{۴}[(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g)].$$

اکنون $|(Th, h)| \le M\|h\|$، **بنابراین** $Re(Tf, g) \le \frac{M}{۴}[\|f+g\|^۲ + \|f-g\|^۲]$ و در این‌صورت یک کاربرد از قانون متوازی الاضلاع (۴.۴)،

نتیجه می‌دهد که
$$|Re(Tf,g)| \leq \frac{M}{۴}[\|f\|^۲ + \|g\|^۲].$$
بنابراین اگر $\|f\| \leq ۱$ و $\|g\| \leq ۱$، آنگاه $|Re(Tf,g)| \leq M$. به طور کلی، g را با $e^{i\theta}g$ در نامساوی آخر جایگزین می‌کنیم، تا نتیجه بگیریم هرگاه $\|f\| \leq ۱$ و $\|g\| \leq ۱$، آنگاه $|(Tf,g)| \leq M$ و لم ۲۱.۴ یک بار دیگر این نتیجه را به‌دست می‌دهد که $\|T\| \leq M$.

ب) بیایید به این نکته توجه کنیم که اگر T و S تبدیلات خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به خودش باشند، آنگاه حاصل ضربشان TS است، که به‌صورت
$$(TS)(f) = T(S(f))$$
تعریف می‌شود. به‌علاوه به طور خودکار $(TS)^* = S^*T^*$ در حقیقت،
$$(TSf,g) = (Sf,T^*g) = (f,S^*T^*g).$$

پ) همچنین می‌توان یک ارتباط طبیعی بین تبدیلات خطی روی یک فضای هیلبرت و فرم‌های دوخطی وابسته‌شان را نشان داد. نخست فرض کنید T یک عملگر کراندار روی $\mathcal{H}$ است. فرم دو خطی متناظر را به‌صورت
$$B(f,g) = (Tf,g), \tag{۸.۴}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید B در f خطی و در g مزدوج خطی است. همچنین با توجه به نامساوی کشی شوارتس

$$|B(f,g)| \leq M\|f\|\|g\|$$

که $M = \|T\|$. برعکس اگر B در f خطی باشد، در g مزدوج خطی باشد و شرط $|B(f,g)| \leq M\|f\|\|g\|$ صدق کند، یک تبدیل خطی منحصربفرد وجود دارد که (۸.۴) به‌ازای $M = \|T\|$ برقرار است. این نکته می‌تواند با استفاده از بحث قضیه ۲۴.۴ ثابت شود، جزئیات به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

مثال‌ها

نتایج اولیه در مورد فضاهای هیلبرت ارائه شد. اکنون به توصیف مختصری از پیشینه پیشرفت نظریه برمی‌گردیم. یک مسأله قابل ملاحظه، مطالعه‌ی «بسط تابع ویژه» یک عملگر دیفرانسیل L بود. یک حالت خاص عملگر اشتورم لیوویل، که روی بازه $[a,b]$ از $\mathbb{R}$ با L معرفی می‌شود به‌صورت

$$L = \frac{d^{۲}}{dx^{۲}} - q(x)$$

تعریف می‌شود که در آن q یک تابع حقیقی مقدار داده شده است. در این صورت سؤال بسط یک تابع «دلخواه» از طریق تابع ویژه‌ی

φ است. یعنی توابعی که برای $\mu \in \mathbb{R}$ در شرط $L(\varphi) = \mu\varphi$ صدق می‌کنند. مثالی کلاسیک از این قضیه سری‌های فوریه هستند که در آن $L = \frac{d^2}{dx^2}$ روی بازه $[-\pi, \pi]$ و هر تابع e^{inx} یک تابع ویژه L با مقدار ویژه $\mu = -n^2$ است.

زمانی که در حالت «منظم» دقیق بشویم ، مسأله برای L می‌تواند به وسیله در نظر گرفتن یک «عملگر انتگرال» مرتبط T تعریف شده روی $L^2([a, b])$ به‌صورت

$$T(f)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)d(y)$$

حل شود، با این خاصیت که برای f مناسب

$$LT(f) = f.$$

مشخص می‌شود که یک ویژگی کلیدی که مطالعه T را میسر می‌کند، برخوردار بودن از یک خاصیت فشردگی خاص است. اکنون به تعاریف و جزئیات این ایده‌ها می‌پردازیم و با معرفی دو رده از این عملگرها روی فضاهای هیلبرت شروع می‌کنیم.

ماتریس قطری نامتناهی

فرض کنید $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه $\mathcal{H}$ است. در این صورت یک تبدیل خطی $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ وابسته به پایه $\{\varphi_k\}$ قطری گفته می‌شود،

هرگاه

$$T(\varphi_k) = \lambda_k \varphi_k.$$

که برای هر k، $\lambda_k \in \mathbb{C}$. به‌طور کلی، یک عنصر غیرصفر φ یک بردار ویژه T با **مقدار ویژه** λ نامیده می‌شود، هرگاه $T\varphi = \lambda\phi$. در این صورت φ_k ها **بردارهای ویژه‌ی** T و اعداد λ_k مقادیر ویژه متناظر هستند. بنابراین اگر

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \quad \text{آنگاه} \quad Tf \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k \varphi_k.$$

دنباله $\{\lambda_k\}$ دنباله ضربگر متناظر با T نامیده می‌شود.

دراین مورد، می‌توان به راحتی گزاره‌های زیر را ثابت کرد:

- $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$
- T^* متناظر با دنباله $\{\bar{\lambda}_k\}$ است، بنابراین $T = T^*$ اگر و فقط اگر λ_k حقیقی باشد.
- T یکانی است، اگر و فقط اگر به‌ازای هر k، $|\lambda_k| = 1$.
- T یک تصویر متعامد است، اگر و فقط اگر به‌ازای هر k، $\lambda_k = 0$ یا ۱.

به‌عنوان مثال خاص، در نظر بگیرید $\mathcal{H} = L^2([-\pi, \pi])$ و فرض کنید هر $f \in L^2([-\pi, \pi])$ به طور متناوب بر کل $\mathbb{R}$ توسیع می‌یابد، به‌طوری‌که

برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x+2\pi) = f(x)$. فرض کنید برای $k \in \mathbb{Z}$، $\varphi_k(x) = e^{ikx}$.
برای یک ثابت $h \in \mathbb{R}$ عملگر U_k تعریف شده به‌صورت

$$U_h(f)(x) = f(x+h),$$

با $\lambda_k = e^{ikh}$ یکانی است. بنابراین

$$U_h(f) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \lambda_k e^{ikx} \quad \text{اگر} \quad f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}.$$

عملگرهای انتگرال و به خصوص عملگرهای هیلبرت - اشمیت

فرض کنید $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$، اگر بتوانیم یک عملگر $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ را به وسیله فرمول

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y) dy, \qquad \text{هرگاه} \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

تعریف کنیم، می‌گوییم عملگر T یک عملگر انتگرال و k **هسته** متناظر است.

در حقیقت، مسأله وارون پذیری مربوط به چنین عملگرهایی و به طور دقیق‌تر، پرسش حل‌پذیری معادله $f - Tf = g$ برای g داده شده بود که آغازگر نظریه فضاهای هیلبرت شد. بنابراین این معادلات، «معادلات انتگرال» نامیده شدند.

در حالت کلی یک تبدیل خطی کراندار نمی‌تواند به‌عنوان یک عملگر انتگرال (مطلقا همگرا) بیان شود، با این وجود، یک رده جالب وجود دارد که برای آن، این مسأله ممکن است و خواص ارزنده‌ای دارد: **عملگرهای هیلبرت-اشمیت**، آن‌هایی که یک هسته K دارند که متعلق به $L^۲(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ است.

قضیه ۲۵.۴. فرض کنید T یک عملگر هیلبرت–اشمیت روی $L^۲(\mathbb{R}^d)$ با هسته k باشد.

الف) اگر $f \in L^۲(\mathbb{R}^d)$، آنگاه برای تقریبا هر x، تابع $y \longmapsto K(x,y)f(y)$ انتگرالپذیر است.

ب) عملگر T از $L^۲(\mathbb{R}^d)$ به خودش کراندار است، و $\|T\| \leq \|K\|_{L^۲(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}$ که در آن $\|K\|_{L^۲(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}$، نرم – $L^۲$، K روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{۲d}$ است.

پ) الحاق T^*، هسته $\overline{k(x,y)}$ دارد.

برهان. با توجه به قضیه فوبینی، می‌دانیم که به‌ازای تقریبا هر x تابع $y \longmapsto |k(x,y)|^۲$ انتگرالپذیر است. آنگاه، قسمت (الف) به طور مستقیم از یک کاربرد نامساوی کوشی شوارتس به‌دست می‌آید.

برای (ب)، دوباره با استفاده از نامساوی کوشی شوارتس به‌دست

می‌آید

$$\left|\int k(x,y)f(y)dy\right| \leq \int |k(x,y)||f(y)|dy$$
$$\leq \left(\int |k(x,y)|^{۲}dy\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\int |f(y)|^{۲}dy\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

در این صورت، با توان رساندن این عبارت و انتگرال‌گیری نسبت به x نتیجه می‌شود

$$\|Tf\|^{۲}_{L^{۲}(\mathbb{R}^d)} \leq \int \left(\int |k(x,y)|^{۲}dy \int |f(y)|^{۲}dy\right)$$
$$= \|k\|^{۲}_{L^{۲}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}\|f\|^{۲}_{L^{۲}(\mathbb{R}^{۲})}.$$

سرانجام، قسمت (پ) به‌وسیله نوشتن (Tf,g) از طریق یک انتگرال دوگانه به‌دست می‌آید، همان‌طور که با قضیه انتگرال فوبینی مجاز است.

□

به طورمشابه عملگرهای هیلبرت اشمیت می‌توانند برای فضای هیلبرت $L^{۲}(E)$ که در آن E یک زیر مجموعه اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}^d$ است، تعریف شوند. فرمول‌بندی و اثبات مشابه قضیه ۲۵.۴ که در این مورد برقرار است، را به خواننده واگذار می‌کنیم.

عملگرهای هیلبرت–اشمیت یک خاصیت مهم دیگر دارند. آن ها فشرده هستند. اکنون این ویژگی را با جزئیات بررسی می‌کنیم.

۱۰.۴ عملگرهای فشرده

ما مفهوم فشرده دنباله‌ای را در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را به کار می‌بریم:به این صورت که یک مجموعهٔ $X \subset \mathcal{H}$ فشرده است، اگر برای هر دنباله $\{f_n\}$ در X، یک زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود داشته باشد که در نرم به یک عضو X همگراست.

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت را نشان دهد و B گوی واحد بسته در $\mathcal{H}$

$$B = \{f \in \mathcal{H} : \ \|f\| \leq ۱\},$$

باشد. یک نتیجه شناخته شده در آنالیز حقیقی می‌گوید که در یک فضای اقلیدسی متناهی بعد، یک مجموعه بسته و کراندار، فشرده است. البته این گزاره در حالت نامتناهی بعد برقرار نیست. حقیقت این است که در این مورد، گوی واحد، در عین حال که بسته و کراندار است ولی فشرده نیست. برای مشاهده این امر، دنباله $\{f_n\} = \{e_n\}$ را در نظر بگیرید، که در آن e_n ها متعامد یکه هستند. با توجه به قضیه فیثاغورث، اگر $n \neq m$، $\|e_n - e_m\|^۲ = ۲$، بنابراین هیچ زیر دنباله‌ای از $\{e_n\}$ نمی‌تواند همگرا باشد.

در حالت نامتناهی بعد می‌گوییم که یک عملگر خطی $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

فشرده است، هرگاه بستار

$$T(B)=\{g\in\mathcal{H}:\ g=T(f) \qquad \text{یک برای } f \text{ در } B\},$$

یک مجموعه فشرده باشد. معادلا، یک عملگر T فشرده است، هرگاه اگر $\{f_k\}$ یک دنباله کراندار در $\mathcal{H}$ باشد، یک زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که Tf_{n_k} همگراست. توجه کنید که یک عملگر فشرده به طور خودکار کراندار است.

توجه کنید همان‌طور که گفته شد، یک تبدیل خطی به‌طور کلی فشرده نیست (برای نمونه عملگر همانی را در نظر بگیرید!) با این وجود، اگر T با رتبه متناهی باشد، که به این معنی است که مجموعه برد آن متناهی بعد است، آنگاه به طور خودکار فشرده است. مشخص می‌شود که سرو کار داشتن با عملگرهای فشرده، نزدیک ترین تشابه به قضیه‌های معمول جبر خطی (متناهی بعد) را به‌دست می‌دهد. بعضی خواص تحلیلی مربوطه عملگرهای فشرده در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۲۶.۴. فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ است.

الف) اگر S روی $\mathcal{H}$ فشرده باشد، آنگاه ST و TS نیز فشرده هستند.

ب) اگر $\{T_n\}$ یک خانواده از عملگرهای خطی فشرده باشرط

$$\|T_n-T\|\to \circ$$

باشد، هنگامی‌که n به بی‌نهایت میل می‌کند، آنگاه T فشرده است.

پ) برعکس، اگر T فشرده باشد، آنگاه دنباله $\{T_n\}$ از عملگرهای با رتبه متناهی وجود دارد، به‌طوری‌که $\|T_n - T\| \to 0$.

ت) T فشرده است، اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

برهان. قسمت (الف) بلافاصله به‌دست می‌آید. برای قسمت (ب) از مبحث قطری سازی استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\{f_k\}$ یک دنباله کراندار در $\mathcal{H}$ باشد، از آنجایی که T_1 فشرده است، باید یک زیر دنباله $\{f_{1,k}\}$ از $\{f_k\}$ را درنظربگیریم که $T_1(f_{1,k})$ همگراست. از $\{f_{1,k}\}$ یک زیر دنباله $\{f_{2,k}\}_{k=1}^{\infty}$ را می‌یابیم به طوری که $T_2(f_{2,k})$ همگراست، و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر قرار دهیم

$$g_k = f_{k,k}$$

، آنگاه ادعا می‌کنیم $\{T(g_k)\}$ یک دنباله کشی است. داریم

$$\begin{aligned}\|T(g_k) - T(g_l)\| &\leq \|T(g_k) - T_m(g_k)\| + \|T_m(g_k) - T_m(g_l)\| \\ &\quad + \|T_m(g_l) - T(g_l)\|.\end{aligned}$$

از آنجایی که $\|T - T_m\| \to 0$ و $\{g_k\}$ کراندار است، می‌توانیم اولین و آخرین جمله در نامساوی بالا را برای m به اندازه کافی بزرگ مستقل

از k و l از $\frac{\epsilon}{3}$ کمتر کنیم. با این m ثابت، به‌ازای هر k و l بزرگ، توجه می کنیم که از نحوه ساختن دنباله داریم $\|T_m(g_k) - T_m(g_l)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. این ادعای ما را ثابت می‌کند، بنابراین $\{T(g_k)\}$ در $\mathcal{H}$ همگراست.

برای اثبات (پ) فرض کنیم $\{e_k\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه $\mathcal{H}$ باشد و فرض می‌کنیم Q_n تصویر متعامد روی زیرفضاهای تولید شده به‌وسیله e_k با $k > n$ باشد. بنابراین به وضوح $Q_n(g) \sim \sum_{k>n} a_k e_k$ هرگاه

$$g \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k e_k$$

و $\|Q_n\|^2$ یک دنباله نزولی است که هرگاه $n \to \infty$ به‌ازای هر $g \in \mathcal{H}$، به صفر میل می‌کند. ادعا می‌کنیم هرگاه $n \to \infty$، $\|Q_n T\| \to 0$ در غیر این‌صورت، یک $c > 0$ وجود دارد، به طوری که $\|Q_n T\| > 0$ و بنابراین برای هر n می‌توانیم f_n را با شرط $\|f_n\| = 1$ را بیابیم، به طوری که $\|Q_n T f_n\| \geq c$. اکنون بنا بر فشردگی T، با انتخاب یک زیر دنباله مناسب $\{f_{n_k}\}$، برای هر g داریم $Tf_{n_k} \to g$. اما $Q_{n_k} = Q_{n_k} T f_{n_k} - Q_{n_k}(Tf_{n_k} - g)$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای k بزرگ $\|Q_n(g)\| \geq \frac{c}{2}$. این تناقض نشان می‌دهد که $\|Q_n T\| \to 0$ بنابراین اگر P_n تصویر مکمل روی فضای متناهی بعد تولید شده به‌وسیله $I = P_n + Q_n e_1, \cdots, e_n$ باشد، آنگاه $\|Q_n T\| \to 0$ نتیجه می‌دهد $\|P_n T - T\| \to 0$. از آنجایی که هر $P_n T$ رتبه متناهی دارد قسمت (پ)

ثابت می‌شود.
سرانجام اگر T فشرده باشد این حقیقت که $\|P_nT-T\| \longrightarrow 0$ نتیجه می‌دهد که $\|T^*P_n - T^*\| \to 0$ و به وضوح T^*P_n نیز با رتبه‌ی متناهی است. بنابراین تنها کافی است قسمت دوم را برای این مرحله در نظر بگیریم. $\square$

اکنون دو نکته بعدی را درمورد عملگرهای فشرده بیان می‌کنیم.

- اگر T نسبت به پایه $\{\varphi_k\}$ از بردارهای ویژه متناظر با مقدارهای ویژه $\{\lambda_k\}$ قطری سازی شده باشد، آنگاه T فشرده است، اگر و فقط اگر $|\lambda_k| \to 0$. تمرین ۲۵ را ببینید.
- هر عملگر هیلبرت اشمیت فشرده است.

برای اثبات نکته دوم، یادآوری می‌کنیم که یک عملگر هیلبرت اشمیت روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ به‌صورت زیر داده می‌شود،

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy,$$

که در آن $K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.
اگر $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشد، آنگاه گردایه $\{\phi_k(x)\varphi_l(y)\}_{k,l\geq 1}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ است، برهان

این گزاره ساده در تمرین ۷ مطرح می‌شود. درنتیجه

$$K(x,y) \sim \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l}\varphi_k(x)\varphi_l(y),$$

با شرط $\sum_{k,l} |a_{kl}|^2 < \infty$. عملگر زیر را تعریف می‌کنیم

$$T_n f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y)f(y)dy,$$

که در آن $K_n(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}\varphi_k(x)\varphi_l(y)$. در این‌صورت، هر T_n برد متناهی بعد دارد، بنابراین فشرده است. به‌علاوه زمانی که $n \to 0$،

$$\|K - K_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} = \sum_{k\geq n \text{ یا } l\geq n} |a_{kl}|^2 \to 0,$$

با توجه به قضیه ۲۵.۴ داریم، $\|T - T_n\| \leq \|K - K_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}$، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که T طبق قضیه ۲۶.۴ فشرده است.

اوج تلاش‌هایمان مربوط به عملگرهای فشرده در بعد نامتناهی، از قضیه آشنای قطری سازی در جبر خطی برای ماتریس‌های متقارن است. با استفاده از یک دیدگاه آشنا، یک عملگر خطی کراندار T را **متقارن** می‌نامیم، هرگاه $T^* = T$. (این عملگرها «خودالحاق» یا «هرمیتی» نیز نامیده می‌شوند.)

قضیه ۲۷.۴. (قضیه طیفی) فرض کنید T یک عملگر متقارن فشرده روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه یک پایه متعامد یکه $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ از $\mathcal{H}$ وجود دارد که از بردارهای ویژه T تشکیل شده است. به‌علاوه، اگر

$$T\phi_k = \lambda_k \phi_k$$

آنگاه $\lambda_k \in \mathbb{R}$، و $\lambda_k \to 0$ هنگامی که $k \to \infty$.

برعکس، هر عملگر به فرم بالا فشرده و متقارن است.
گردایه $\{\lambda_k\}$ **طیف** T نامیده می‌شود.

لم ۲۸.۴. فرض کنید T یک عملگر خطی متقارن و کراندار روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد.

الف) اگر λ یک مقدارویژه T باشد، آنگاه λ حقیقی است.

ب) اگر f_1 و f_2 بردارهای ویژه متناظر با دو مقدار ویژه متمایز باشند، آنگاه f_1 و f_2 متعامد هستند.

برهان. برای اثبات (الف)، ابتدا یک بردار ویژه ناصفر f انتخاب کنید، به‌طوری که $T(f) = \lambda f$.
از آنجایی که T متقارن است (به این معنا که $T = T^*$) در می‌یابیم که

$$\lambda(f, f) = (Tf, f) = (f, Tf) = (f, \lambda f) = \bar{\lambda}(f, f).$$

برای تساوی آخر از این حکم استفاده کرده‌ایم که ضرب داخلی روی متغیر دوم، مزدوج خطی است. از آنجایی که $f \neq 0$، داریم $\lambda = \bar{\lambda}$ و بنابراین $\lambda \in \mathbb{R}$.

برای (ب) فرض کنید f_1 و f_2 به ترتیب بردارهای ویژه‌ی λ_1 و λ_2 باشند. با توجه به بحث قبل هر دو مقدار λ_1 و λ_2 حقیقی هستند و توجه می‌کنیم که

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(f_1, f_2) &= (\lambda_1 f_1, f_2) \\
&= (Tf_1, f_2) \\
&= (f_1, Tf_2) \\
&= (f_1, \lambda_2 f_2) \\
&= \lambda_2(f_1, f_2).
\end{aligned}
$$

از آنجایی که طبق فرض $\lambda_1 \neq \lambda_2$ داریم $(f_1, f_2) = 0$. $\square$

برای لم بعد، توجه می‌کنیم هر عنصر ناصفر فضای پوچ $T - \lambda I$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه λ است.

لم ۲۹.۴. فرض کنید T فشرده است، و $\lambda \neq 0$. آنگاه بعد فضای پوچ $T - \lambda I$ متناهی است. به‌علاوه مقدارهای ویژه‌ی T یک مجموعه حداکثر شمارا

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots\}$$

را با شرط $\lambda_k \to 0$ هنگامی‌که $k \to \infty$ تشکیل می‌دهند. به خصوص برای هر $\mu > 0$، فضای خطی تولید شده توسط بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه‌ی λ_k با شرط $|\lambda_k| > \mu$ متناهی بعد است.

برهان. فرض کنید V_λ فضای پوچ $T - \lambda I$ را مشخص کند که این فضای ویژه‌ی T متناظر با λ است. اگر V_λ متناهی بعد باشد، دنباله شمارایی از بردارهای متعامد یکه $\{\phi_k\}$ در V_λ وجود دارد. از آنجایی که T فشرده است، زیر دنباله $\{\phi_{n_k}\}$ وجود دارد که $T(\phi_{n_k})$ همگراست. اما چون $T(\phi_{n_k}) = \lambda\phi_{n_k}$، و $\lambda \neq 0$، نتیجه می‌گیریم که ϕ_{n_k} همگراست، که این یک تناقض است چون $\|\phi_{n_k} - \phi_{n_{k'}}\|^2 = 2$ اگر $k \neq k'$.

اگر بتوانیم نشان دهیم که به‌ازای هر $\mu > 0$، تنها تعداد متناهی بردار ویژه با قدر مطلق بزرگتر از μ وجود دارند، قسمت باقیمانده نیز حاصل می‌شود. دوباره با برهان خلف بحث می‌کنیم. فرض کنید تعداد نامتناهی مقادیر ویژه‌ی مجزایی وجود دارند که قدر مطلق بزرگتر از μ دارند، و فرض می‌کنیم $\{\phi_k\}$ یک دنباله متناظر با بردارهای ویژه باشد. چون بردارهای ویژه مجزا هستند، از لم می‌دانیم که $\{\phi_k\}$ متعامد است و با نرمال‌سازی، فرض می‌کنیم این مجموعه از بردارهای ویژه متعامد یکه است . دوباره از آنجایی که T فشرده است، در می‌یابیم که یک زیر دنباله وجود دارد به‌طوری‌که

$T(\phi_{n_k})$ همگراست، و چون

$$T(\phi_{n_k}) = \lambda_{n_k}\phi_{n_k},$$

این حقیقت که $|\lambda_{n_k}| > \mu$ به یک تناقض منجر می‌شود، از آنجایی که $\{\phi_k\}$ یک مجموعه متعامد یکه است، بنابراین

$$\|\lambda_{n_k}\phi_{n_k} - \lambda_{n_j}\phi_{n_j}\|^۲ = \lambda_{n_k}^۲ + \lambda_{n_j}^۲ \geq ۲\mu^۲.$$

□

لم ۳۰.۴. فرض کنید $T \neq ۰$ فشرده و متقارن است. در این صورت $\|T\|$ یا $-\|T\|$ یک مقدار ویژه‌ی T است.

برهان. طبق ملاحظه (۷.۴) داریم یا

$$\|T\| = \sup\{(Tf, f), \|f\| = ۱\} \quad \text{یا} \quad -\|T\| = \inf\{(Tf, f), \|f\| = ۱\}$$

حالت اول را درنظر می‌گیریم که

$$\lambda = \|T\| = \sup\{(Tf, f), \|f\| = ۱\},$$

و ثابت می‌کنیم که λ بردار ویژه‌ی T است. (برهان حالت دیگر مشابه است.)

یک دنباله $\{f_n\} \subset \mathcal{H}$ را انتخاب می‌کنیم، به‌طوری‌که $\|f_n\| = ۱$ و $(Tf_n, f_n) \to \lambda$. از آنجایی که T فشرده است، فرض می‌کنیم (با گذار

به یک زیر دنباله $\{f_n\}$ در صورت لزوم) که $\{Tf_n\}$ به حد $g \in \mathcal{H}$ همگراست. ادعا می‌کنیم که g یک بردار ویژه‌ی T با مقدار ویژه‌ی λ است . برای مشاهده این امر، ابتدا ملاحظه می‌کنیم $Tf_n - \lambda f_n \to ۰$. زیرا

$$\begin{aligned} \|Tf_n - \lambda f_n\|^۲ &= \|Tf_n\|^۲ - ۲\lambda(Tf_n, f_n) + \lambda^۲\|f_n\|^۲ \\ &\leq \|T\|^۲\|f_n\|^۲ - ۲\lambda(Tf_n, f_n) + \lambda^۲\|f_n\|^۲ \\ &\leq ۲\lambda^۲ - ۲\lambda(Tf_n, f_n) \to ۰. \end{aligned}$$

از آنجایی که $Tf_n \to g$، باید داشته باشیم که $\lambda f_n \to g$ و از آنجایی که T پیوسته است، این نتیجه به‌دست می‌آید که $\lambda Tf_n \to Tg$. این ثابت می‌کند که $\lambda g = Tg$. سرانجام باید داشته باشیم $g \neq ۰$، زیرا در غیر این‌صورت، $\|T_nf_n\| \to ۰$. بنابراین $(Tf_n, f_n) \to ۰$ و $\lambda = \|T\| = ۰$ که یک تناقض است.

□

اکنون گزاره‌های لازم برای اثبات قضیه طیفی را در اختیار داریم. فرض کنید S بستار فضای خطی تولید شده به‌وسیله همه بردارهای ویژه‌ی T را مشخص سازد. با توجه به لم ۳۰.۴، فضای S ناتهی است. هدف اثبات $S = \mathcal{H}$ است. درغیر این صورت از آنجایی که

$$S \oplus S^\perp = \mathcal{H}. \qquad (۹.۴)$$

$S^\perp$ باید عضو غیر صفر داشته باشد. به محض این‌که نشان دهیم $S^\perp$ شامل یک بردار ویژه‌ی T است، به تناقض می‌رسیم. ابتدا توجه می‌کنیم که T تجزیه ۹.۴ را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر، اگر $f \in S$ آنگاه $Tf \in S$، که از تعاریف به‌دست می‌آید. همچنین، اگر $g \in S^\perp$ آنگاه $Tg \in S^\perp$. این نیز برقرار است، زیرا T متقارن است و S را به خودش می‌نگارد و بنابراین

$$(Tg, f) = (g, Tf) = 0,$$

هرگاه $g \in S^\perp$ و $f \in S$.

اکنون عملگر T_1 را به‌صورت تحدید T به زیرفضای $S^\perp$ در نظر بگیرید. زیرفضای بسته $S^\perp$ ساختار فضای هیلبرت را از $\mathcal{H}$ به ارث می‌برد. بلافاصله می‌بینیم که T_1 نیز یک عملگر فشرده و متقارن روی این فضای هیلبرت است. به‌علاوه، اگر $S^\perp$ عضو غیر صفر داشته باشد، لم نتیجه می‌دهد که T_1 یک بردار ویژه‌ی ناصفر در $S^\perp$ است. این بردار ویژه نیز به وضوح یک بردار ویژه T است و بنابراین یک تناقض به‌دست می‌آید و برهان قضیه طیفی حاصل می‌شود.

تفسیرهایی از قضیه ۲۷.۴ بدین ترتیب هستند. اگر در گزاره مربوطه دو فرضیه را در نظر بگیریم (فشردگی یا تقارن T) آنگاه T هیچ بردار ویژه‌ای ندارد. (تمرین‌های ۳۲و ۳۳ را ببینید.) با این

وجود زمانی که T یک تبدیل خطی کراندار دلخواه متقارن است، یک توسیع مناسب از قضیه طیفی وجود دارد، که برای آن برقرار است. فرمول و برهان آن نیاز به ایده‌های دیگری دارد، که به فصل ۶ موکول می‌شود.

۱۱.۴ تمرین‌ها

۱. نشان دهید که خواص (الف) و (ب) در تعریف فضای هیلبرت (قسمت ۲) به خاصیت (پ) منجر می‌شود. نامساوی کوشی-شوارتس

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$$

و نامساوی مثلثی

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

برقرار است.

راهنمایی: برای نامساوی اول، فرض کنید $(f+\lambda g, f+\lambda g)$ به‌عنوان یک تابع درجه دوم بر حسب λ مثبت است. برای دومی، بنویسید $\|f+g\|^2$ به‌صورت $(f+g, f+g)$.

۲. در نامساوی کوشی-شوارتس در حالت تساوی، موارد زیر را

داریم. اگر قرار دهیم

$$|(f,g)| = \|f\| + \|g\|,$$

و $g \neq ۰$، آنگاه به‌ازای عددی مانند c، $f = cg$.

راهنمایی: فرض کنید $\|f\| = \|g\| = ۱$ و $(f,g) = ۱$. آنگاه $f - g$ و g متعامد هستند در حالی که $f = f - g + g$. بنابراین

$$\|f\|^{۱} = \|f - g\|^{۲} + \|g\|^{۲}$$

۳. توجه کنید که برای هر جفت از عناصر یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$،

$$\|f + g\|^{۲} = \|f\|^{۲} + \|g\|^{۲} + ۲Re(f,g).$$

به‌عنوان یک نتیجه ثابت کنید

$$\|f + g\|^{۲} + \|f - g\|^{۲} = ۲(\|f\|^{۲} + \|g\|^{۲}).$$

۴. از طریق تعریف ثابت کنید که $\ell^{۲}(\mathbb{Z})$ کامل و جدایی پذیر است.

۵. روابط زیر را بین $L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ و $L^{۱}(\mathbb{R}^d)$ را ثابت کنید.

الف. شمول $L^{۱}(\mathbb{R}^d) \subset L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ و شمول $L^{۲}(\mathbb{R}^d) \subset L^{۱}(\mathbb{R}^d)$ برقرار نیستند.

ب. توجه کنید، در حالت‌هایی که f روی مجموعهٔ E با اندازه متناهی تکیه می‌کند و یا $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$، استفاده از نامساوی کوشی-شوارتس برای $f\chi_E$، منجر می‌شود به این‌که $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq m(E)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

ج. اگر f کراندار باشد ($|f(x)| \leq M$) و $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$، آنگاه $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ و

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{2}}$$

راهنمایی: برای قسمت (آ) فرض کنید $f(x) = |x|^{-\alpha}$، زمانی $|x| \leq 1$ یا زمانی که $|x| > 1$.

۶. ثابت کنید که موارد زیر زیرفضاهای چگال $L^2(\mathbb{R}^d)$ هستند.

الف. توابع ساده،

ب. توابع پیوسته با تکیه‌گاه فشرده.

۷. فرض کنید $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشد. ثابت کنید گردایه $\{\phi_{k,j}\}_{1\leq k,j<\infty}$ با $\phi_{k,j}(x,y) = \phi_k(x)\phi_j(y)$ یک پایه متعامد یکه $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ است.

راهنمایی: نخست بررسی کنید که $\{\phi_{k,j}\}$ طبق قضیه فوبینی متعامد یکه است. سپس به‌ازای هر j فرض کنید

$$F_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\overline{\phi_j(y)}$$

. اگر فرض کنید که به‌ازای هر j، $(F, \phi_{k,j}) = 0$ آنگاه $\int F_j(x)\overline{\phi_j(x)} = 0$.

۸. فرض کنید $\eta(t)$ یک تابع پیوسته اکیدا مثبت ثابت روی $[a,b]$ باشد.

$$\mathcal{H}_\eta = L^2([a,b],\eta)$$

را فضای همه توابع اندازه‌پذیر f روی $[a,b]$ تعریف کنید، به‌طوری‌که

$$\int_a^b |f(t)|^2 \eta(t) dt < \infty.$$

ضرب داخلی روی $\mathcal{H}_\eta$ را به وسیله

$$(f,g)_\eta = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\eta(t) at.$$

تعریف کنید.

الف. نشان دهید که $\mathcal{H}_\eta$ یک فضای هیلبرت است، نگاشت $U : f \longmapsto \eta^{\frac{1}{2}} f$ یک تناظر یکانی بین $\mathcal{H}_\eta$ و فضای شناخته شده $L^2([a,b])$ به‌دست می‌دهد.

ب. این را به حالتی تعمیم دهید که در آن η لزوما پیوسته نیست.

۹. فرض کنید $\mathcal{H}_1 = L^2([-\pi, \pi])$ فضای هیلبرت متشکل از توابع $F(e^{i\theta})$ روی دایره یکه با ضرب داخلی $(F, G) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta})\overline{G(e^{i\theta})}$ باشد. فرض کنید $\mathcal{H}_2$ فضای $L^2(\mathbb{R})$ باشد. با استفاده از نگاشت

$$x \longmapsto \frac{i-x}{i+x}$$

از $\mathbb{R}$ به دایره یکه، نشان دهید:

الف. تناظر $U : F \longmapsto f$ به‌صورت

$$f(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}(i+x)} F(\frac{i-x}{i+x}),$$

یک نگاشت یک به یک از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ است.

ب. درنتیجه

$$\{\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}(\frac{i-x}{i+x})^n \frac{1}{i+x}\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ است.

۱۰. فرض کنید S یک زیرفضای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را مشخص کند، ثابت کنید که $(S^{\perp})^{\perp}$ کوچکترین زیرفضای بسته $\mathcal{H}$ است که شامل S می‌شود.

۱۱. فرض کنید P تصویر متعامد مرتبط با یک زیرفضای بسته S در یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، یعنی،

$$P(f) = f \quad \text{اگر} \quad f \in S \qquad \text{و} \qquad P(f) = 0 \quad \text{اگر} \quad f \in S^{\perp}$$

الف. نشان دهید که $P^* = P$ و $P^2 = P$.

ب. برعکس، اگر P عملگر کرانداری باشد که در شرایط $P^2 = P$ و $P^* = P$ صدق کند، آنگاه ثابت کنید که P یک تصویر متعامد برای یک زیرفضای بسته $\mathcal{H}$ است.

ج. با استفاده از P ثابت کنید، اگر S یک زیرفضای بسته از یک فضای هیلبرت جدایی پذیر باشد، آنگاه S نیز یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر است.

۱۲. فرض کنید E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ باشد. فرض کنید S زیرفضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ از توابعی باشد که تقریبا به‌ازای هر x که $x \notin E$، صفر می‌شود. نشان دهید که تصویر متعامد P روی S به‌وسیله $P(f) = \chi_E \cdot f$ به‌دست می‌آید، که در آن χ_E تابع مشخصه E است.

۱۳. فرض کنید P_1، P_2 به ترتیب تصویر متعامد روی S_1 و S_2 باشند، آنگاه P_1P_2 یک تصویر متعامد است، اگر و فقط اگر P_1 و P_2

با هم جابه‌جا شوند. یعنی $P_۱P_۲ = P_۲P_۱$ در این حالت، $P_۱P_۲$ به روی $S_۱ \cap S_۲$ یک تصویر می‌سازد.

۱۴. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{H}'$ دو کامل سازی از فضای پیش هیلبرت $\mathcal{H}_۰$ باشند. نشان دهید که یک نگاشت یکانی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}'$ وجود دارد، که به روی $\mathcal{H}_۰$ همانی است.

راهنمایی: اگر $f \in \mathcal{H}$، یک دنباله کوشی $\{f_n\}$ در $\mathcal{H}_۰$ بگیرید، به‌طوری‌که به f در $\mathcal{H}$ همگرا باشد. این دنباله نیز به یک عنصر f' در $\mathcal{H}'$ همگراست. نگاشت $f \longmapsto f'$ نگاشت یکانی موردنظر را به‌دست می‌دهد.

۱۵. فرض کنید T یک تبدیل خطی از $\mathcal{H}_۱$ به $\mathcal{H}_۲$ باشد. اگر فرض کنیم $\mathcal{H}_۱$ متناهی بعد باشد، آنگاه T به طور خودکار کراندار است.(اگر $\mathcal{H}_۱$ متناهی بعد فرض نشود، به نتیجه نمی‌رسیم، مسأله ۱ را ببینید.)

۱۶. فرض کنید $F_۰(z) = \frac{۱}{(۱-z)^i}$.

الف. بررسی کنید که در گوی یکه $|F_۰(z)| \leq e^{\frac{\pi}{۲}}$، اما حد $\lim_{r\to ۱} F_۰(r)$ وجود ندارد.

راهنمایی: توجه کنید $|F_۰(r)| = ۱$ و $F_۰(r)$ اغلب زمانی که $r \to ۱$ بین ±۱ نوسان می‌کند.

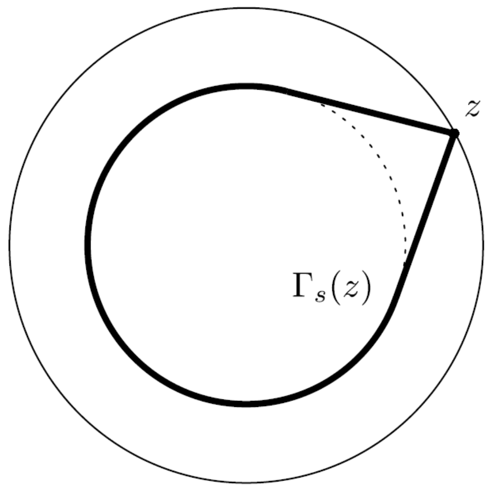
ب. فرض کنید $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک شماره گذاری از اعداد گویا باشد. فرض کنید

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j F_\circ(ze^{-i\alpha_j}),$$

که در آن δ به اندازه کافی کوچک است. نشان دهید در حالتی که $\theta = \alpha_j$، $\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta})$ موجود نیست. بنابراین F روی یک مجموعه چگال از نقاط روی دایره واحد، حد شعاعی ندارد.

۱۷. قضیه فاتو می‌تواند با مجاز کردن نزدیک شدن یک نقطه به مرز در ناحیه بزرگتر تعمیم یابد. همانطور که در ادامه می‌آید.

به‌ازای هر $0 < s < 1$ و نقطه z روی دایره یکه، ناحیه $\Gamma_s(z)$ به‌صورت کوچکترین مجموعه محدب بسته تعریف می‌شود که شامل z و گوی یکه $D_s(\circ)$ است. به عبارت دیگر $\Gamma_\delta(z)$ شامل همه خطوط متصل‌کننده z با نقاط در $D_s(\circ)$ است. در نزدیکی نقطه z، ناحیه $\Gamma_s(z)$ شبیه یک مثلث است، تصویر ۲.۴ راببینید.



شکل ۲.۴: منطقه $\Gamma_s(z)$

می‌گوییم یک تابع F در گوی واحد باز یکه حد **غیرمماسی** در نقطه z روی دایره دارد، هرگاه برای هر $0 < s < 1$ حد

$$\lim_{\substack{w\to z\\ w\in\Gamma_s(z)}} F(w)$$

وجود داشته باشد.

ثابت کنید اگر E روی گوی یکه‌ی باز، تحلیلی و کراندار باشد، آنگاه F تقریبا به ازای هر نقطه در دایره یکه، حد غیرمماسی دارد.

راهنمایی: نشان دهید انتگرال پواسون یک تابع f، در هرنقطه از مجموعهٔ لبگ f حدود غیرمماسی دارد.

۱۸. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ فضای برداری همه عملگرهای خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ را مشخص کند. اگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ داده شده باشد، نرم عملگری آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \inf\{B : \|Tv\| \le B\|v\|, \text{به‌ازای هر } v \in \mathcal{H}\}$$

الف. نشان دهید که $\|T_۱ + T_۲\| \le \|T_۱\| + \|T_۲\|$، هرگاه $T_۱, T_۲ \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

ب. ثابت کنید

$$d(T_۱, T_۲) = \|T_۱ - T_۲\|$$

یک متر روی $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ را تعریف می‌کند.

ج. نشان دهید $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ با متر d، کامل است.

۱۹. اگر T یک عملگر خطی کراندار روی فضای هیلبرت باشد، ثابت کنید

$$\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^۲ = \|T^*\|^۲$$

۲۰. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت نامتناهی بعد باشد. مثالی از یک دنباله $\{f_n\}$ در $\mathcal{H}$ را که به ازای هر n، $\|f_n\| = ۱$ و برای آن

هیچ زیردنباله $\{f_n\}$ در $\mathcal{H}$ همگرا نیست، دیده‌ایم. با این وجود، نشان دهید برای هر دنباله $\{f_n\}$ در $\mathcal{H}$ که به ازای هر n، $\|f_n\| = 1$، $f \in \mathcal{H}$ و یک زیردنباله $\{f_{n_k}\}$ وجود دارند، به طوری که به‌ازای هر $g \in \mathcal{H}$ داریم

$$\lim_{k\to\infty}(f_{n_k}, g) = (f, g).$$

در این صورت می گوییم $\{f_{n_k}\}$ **به‌طور ضعیف به f همگراست.**

راهنمایی: فرض کنید g برحسب یک پایه‌ی $\mathcal{H}$ نوشته شود و از بحث قطری سازی استفاده کنید. می‌توان f را با بسط سری اش نسبت به پایه انتخاب شده، تعریف کرد.

۲۱. (در یک فضای هیلبرت$\mathcal{H}$) چندین حالت وجود دارد که در آن یک دنباله از عملگرهای کراندار $\{T_n\}$ می‌تواند به یک عملگر کراندار T همگرا باشد. اولین حالت همگرایی در نرم است که در آن ، هنگامی که $n \to \infty$،

$$\|T_n - T\| \to 0.$$

سپس یک همگرایی ضعیف‌تر وجود دارد، که از قضا همگرایی قوی نامیده می‌شود: به این شکل که به ازای هر بردار $f \in \mathcal{H}$ هنگامی که $n \to \infty$،

$$T_n f \to T f.$$

به‌ازای هر بردار سرانجام، همگرایی ضعیف وجود دارد(تمرین ۲ را ببینید) که برای هر جفت از بردارهای $f, g \in \mathcal{H}$، $(T_n f, g) \to (Tf, g)$ برقرار است.

الف. با استفاده از مثال نشان دهید که همگرایی ضعیف، همگرایی قوی را نتیجه نمی‌دهد، یا همگرایی قوی، به همگرایی در نرم منجر نمی‌شود.

ب. نشان دهید که به‌ازای هر عملگر کراندار T دنباله $\{T_n\}$ از عملگرهای کراندار با رتبه متناهی وجود دارد، به‌طوری‌که زمانی که $n \to \infty$، $T_n \to T$ به طور قوی.

۲۲. یک عملگر T، طولپاست اگر به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $\|Tf\| = \|f\|$.

الف. نشان دهید که اگر T طولپا باشد، آنگاه به‌ازای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم

$$(Tf, Tg) = (f, g).$$

به‌عنوان یک نتیجه ثابت کنید $T^*T = I$.

ب. اگر T طولپا و پوشا باشد، آنگاه T یکانی است، و $TT^* = I$.

ج. مثالی از یک طولپایی ارائه دهید که یکانی نیست.

د. نشان دهید که اگر T^*T یکانی باشد، آنگاه T یک طولپاست.

راهنمایی: از این گزاره استفاده کنید که $(Tf, Tf) = (f, f)$ برای f که با $f \pm g$ و $f \pm ig$ جایگزین شده است.

۲۳. فرض کنید به‌ازای هر k، $\{T_k\}$ یک گردایه از عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با شرط $\|T_k\| \leq ۱$ باشد. همچنین فرض کنید

$$\text{به‌ازای هر } k \neq j\text{،}\quad T_k T_j^* = T_k^* T_j = ۰$$

قرار دهید $S_N = \sum_{k=-N}^{N} T_k$.

نشان دهید به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ هرگاه $N \to \infty$، $S_N(f)$ همگراست. اگر $T(f)$، حد را مشخص سازد، ثابت کنید $\|T\| \leq ۱$.

تعمیم آن در مسأله ۸* ارائه می‌شود.

راهنمایی: ابتدا حالتی را درنظر بگیرید که تنها تعدادی متناهی از عناصر T_k ناصفر هستند و توجه داشته باشید که مقادیر T_k دو به دو متعامد هستند.

۲۴. فرض کنید $\{e_k\}_{k=۱}^{\infty}$ مجموعه متعامد یکه ای را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مشخص سازد. اگر $\{c_k\}_{k=n}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشد به‌طوری که $\sum c_k^۲ < \infty$، آنگاه مجموعه

$$A = \{\sum_{k=۱}^{\infty} a_k e_k : |a_k| \leq c_k\},$$

در $\mathcal{H}$ فشرده است.

۲۵. فرض کنید T یک، عملگر کراندار است که با توجه به یک پایه‌ی $\{\varphi_k\}$ با $T\varphi_k = \lambda\varphi_k$ قطری است. در این صورت T فشرده است اگر و فقط اگر $\lambda_k \to 0$.

راهنمایی: اگر $\lambda_k \to 0$، آنگاه بنویسید $\|P_nT - T\| \to 0$، که P_n تصویر متعامد روی زیرفضای تولید شده به‌وسیله $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ است.

۲۶. فرض کنید w یک تابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d$ با شرط $0 < w(x) < \infty$ تقریبا به‌ازای هر x باشد و K یک تابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^{2d}$ باشد که در موارد زیر صدق می کند:

الف. تقریبا به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^d$ $\int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|w(y)dy \leq Aw(x)$.

ب. تقریبا به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^d$ $\int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|w(x)dx \leq Aw(y)$.

ثابت کنید عملگر انتگرال که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ کراندار است و $\|T\| \leq A$.
به‌عنوان یک حالت خاص توجه کنید که اگر به‌ازای هر x،

$$\int |K(x,y)|dy \leq A$$

و به‌ازای هر y، $\int |K(x,y)|dx \leq A$، آنگاه $\|T\| \leq A$.
راهنمایی: نشان دهید که اگر $f \in L^{2}(\mathbb{R}^d)$، آنگاه

$$\int |K(x,y)||f(y)|dy \leq A^{\frac{1}{2}} w(x)^{\frac{1}{2}} [\int |K(x,y)||f(y)|^{2} w(y)^{-1} dy]^{\frac{1}{2}}.$$

۲۷. ثابت کنید عملگر

$$Tf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy,$$

روی $L^{2}(0,\infty)$ کراندار است و $\|T\| \leq 1$ راهنمایی: تمرین ۲۶ را با یک w مناسب به کار ببرید.

۲۸. فرض کنید $\mathcal{H} = L^{2}(B)$، که در آن B در $\mathbb{R}^d$ گوی واحد است . فرض کنید $K(x,y)$ یک تابع اندازه‌پذیر روی $B \times B$ باشد که به‌ازای یک $\alpha > 0$ و هر $x, y \in B$، در شرط $|K(x,y)| \leq A|x-y|^{-d+\alpha}$ صدق می‌کند. تعریف کنید

$$Tf(x) = \int_{B} K(x,y) f(y) dy.$$

الف. ثابت کنید T یک عملگر کراندار روی $\mathcal{H}$ است.

ب. ثابت کنید T فشرده است.

ج. توجه کنید T یک عملگر هیلبرت اشمیت است، اگر و فقط اگر $\alpha > \frac{d}{2}$.

راهنمایی: برای قسمت (ب)، عملگرهای T_n را مربوط به هسته‌های محدود شده به صورت زیر در نظر بگیرید. $K_n(x,y) = K(x,y)$ اگر $|x-y| \geq \frac{1}{n}$، و در غیر این صورت صفر قرار می دهیم. نشان دهید که هر T_n فشرده است و هرگاه $n \to \infty$، $\|T_n - T\| \to 0$.

۲۹. فرض کنید T یک عملگر فشرده روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و فرض کنید $\lambda \neq 0$.

الف. نشان دهید که برد $\lambda I - T$ تعریف شده به وسیله

$$\{g \in \mathcal{H} : g = (\lambda I - T)f, f \in \mathcal{H} \text{ به‌ازای یک}\}$$

بسته است.

راهنمایی: فرض کنید $g_j \to g$، که در آن $g_j = (\lambda I - T)f_j$. فرض کنید V_λ فضای ویژه‌ی T متناظر با λ را که هسته $\lambda I - T$ است، مشخص کند. چرا می‌توان فرض کرد که $Pf_j \in V_\lambda^\perp$؟ تحت این شرایط ثابت کنید $\{f_j\}$ یک دنباله کراندار است.

ب. با مثال نشان دهید که وقتی $\lambda = 0$، الف ممکن است برقرار نباشد.

ج. نشان دهید که مقدار $\lambda I - T$ همه $\mathcal{H}$ است، اگر وفقط اگر فضای پوچ $\bar{\lambda} I - T^*$، بدیهی باشد .

۳۰. فرض کنید $\mathcal{H} = L^2([-\pi, \pi])$، که در آن $[-\pi, \pi]$ با دایره‌ی واحد یکسان در نظر گرفته می شود. یک دنباله کراندار $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ از اعداد مختلط را ثابت بگیرید و عملگر Tf را به‌صورت

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad \text{هرگاه} \quad Tf(x) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n e^{inx},$$

تعریف کنید . چنین عملگری یک **عملگر ضربگر فوریه** نامیده می‌شود و دنباله $\{\lambda_n\}$ نیز **دنباله ضربگر** نامیده می‌شود.

الف. نشان دهید T یک عملگر کراندار روی $\mathcal{H}$ است و

$$\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$$

.

ب. بررسی کنید که T با عملگر انتقال جابه جا می‌شود، به این معنی که اگر تعریف کنیم $T_h(x) = f(x-h)$، آنگاه

$$T \circ \tau_h = \tau_h \circ T \qquad \text{به‌ازای هر } x \in \mathbb{R}$$

ج. برعکس، ثابت کنید اگر T عملگر کراندار روی $\mathcal{H}$ باشد، که با عملگر انتقال جابه جا می‌شود، آنگاه T عملگر ضربگر فوریه است.
راهنمایی: $T(e^{inx})$ را در نظر بگیرید.

۳۱. یک فرم از تابع دندانه اره‌ای را در نظر بگیرید که روی $[-\pi,\pi)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱]

$$K(x) = i(sgn(x)\pi - x),$$

و به $\mathbb{R}$ با دوره تناوب ۲π توسیع داده می‌شود. فرض کنید $f \in L^۱([-\pi,\pi])$ با دوره تناوب ۲π به $\mathbb{R}$ توسیع داده شده باشد و تعریف کنید

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(y)f(x-y)dy. \end{aligned}$$

الف. نشان دهید که $F(x) = Tf(x)$ به طور مطلق پیوسته است، و اگر $\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy = ۰$، آنگاه تقریبا به‌ازای هر x، $F'(x) = if(x)$.

---

۱. نماد $sgn(x)$ تابع علامت را مشخص می‌کند: با ۱ یا ۱- مساوی است اگر x به ترتیب مثبت یا منفی باشد و ۰ است اگر $x = ۰$.

ب. نشان دهید نگاشت $f \mapsto Tf$ روی $L^{۲}([-\pi,\pi])$ فشرده و متقارن است.

ج. ثابت کنید $\varphi(x) \in L^{۲}([-\pi,\pi])$ یک تابع ویژه برای T است، اگر و فقط اگر $\varphi(x)$ (در حد یک مضرب ثابت) به‌ازای عدد صحیح $n \neq ۰$، با e^{inx} با بردار ویژه‌ی $\frac{۱}{n}$ و یا $\varphi(x) = ۱$ با بردار ویژه صفر برابر باشد.

د. به‌عنوان یک نتیجه نشان دهید $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^{۲}([-\pi,\pi])$ است.

توجه کنید که در جلد ۱، فصل ۲ تمرین ۸، نشان داده شده است سری فوریه‌ی K برابر است با

$$K(x) \sim \sum_{n\neq ۰} \frac{e^{inx}}{n}.$$

۳۲. عملگر $T : L^{۲}([۰,۱]) \to L^{۲}([۰,۱])$ را درنظر بگیرید که به‌وسیلهٔ

$$T(f)(t) = tf(t),$$

تعریف می‌شود.

الف. ثابت کنید که T با شرط $T = T^{*}$ عملگر خطی کراندار است، اما T فشرده نیست.

ب. با این وجود نشان دهید که T هیچ بردار ویژه‌ای ندارد.

۳۳. فرض کنید $\mathcal{H}$ با پایه‌ی $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک فضای هیلبرت است. بررسی کنید که عملگر T تعریف شده به‌صورت

$$T(\varphi_k) = \frac{1}{k}\varphi_{k+1},$$

فشرده است اما هیچ بردار ویژه‌ای ندارد.

۳۴. فرض کنید K یک هسته هیلبرت–اشمیت باشد که حقیقی و متقارن است، در این صورت همان‌طور که دیدیم، عملگر T که هسته آن K است، فشرده و متقارن است. فرض کنید $\{\varphi_k(x)\}$ بردارهای ویژه (با مقادیر ویژه‌ی λ_k) باشد که با T قطری‌سازی می‌شود. در این صورت

الف. $\sum_k |\lambda_k|^2 < \infty$.

ب. $K(x,y) \sim \sum \lambda_k \varphi_k(x)\varphi_k(y)$ **بسط** K **نسبت به پایه** $\{\varphi_k(x)\varphi_k(y)\}$ است.

ج. فرض کنید T یک عملگر فشرده باشد که متقارن است. آنگاه T از نوع هیلبرت–اشمیت است اگر و فقط اگر $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$، که λ_k ها در آن بردارهای ویژه از T هستند که بنابر چندگانگی‌شان محاسبه می‌شوند.

۳۵. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد . صورت‌های زیر را از قضیه طیفی ثابت کنید.

الف. اگر T_1 و T_2 دو عملگر متقارن و فشرده روی $\mathcal{H}$ باشند که با یکدیگر جابجا می‌شوند (یعنی $T_1T_2 = T_2T_1$)، آنگاه می‌توانند تواما قطری‌سازی شوند. به عبارت دیگر یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ وجود دارد که شامل بردارهای ویژه‌ی T_1 و T_2 می‌شود.

ب. یک عملگر خطی روی $\mathcal{H}$ نرمال است، هرگاه $TT^* = T^*T$. ثابت کنید اگر T نرمال و فشرده باشد، آنگاه T می‌تواند قطری‌سازی شود
راهنمایی: بنویسید $T = T_1 + iT_2$ که در آن T_1 و T_2 متقارن، فشرده هستند و جابه جا می‌شوند.

ج اگر U یکانی باشد و $U = \lambda I - T$، که در آن T فشرده است، آنگاه U می‌تواند قطری سازی شود.

۱۲.۴ مسائل

۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت نامتناهی بعد باشد یک تابعک خطی L روی $\mathcal{H}$ وجود دارد که کراندار نیست (و بنابراین پیوسته نیز نیست).
راهنمایی: با استفاده از اصل انتخاب(یا یکی از فرم‌های

معادل آن)، یک پایه جبری برای $\mathcal{H}$، مانند $\{e_\alpha\}$ بسازید، با این خاصیت که هر عنصر $\mathcal{H}$ منحصرا یک ترکیب خطی متناهی از $\{e_\alpha\}$ است. یک گردایه شمارای $\{e_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را انتخاب کنید و L را چنان تعریف کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در شرط $L(e_n) = n\|e_n\|$ صدق کند.

۲. موارد زیر مثالی از یک فضای هیلبرت جدایی ناپذیر است. گردایه‌ای از توابع نمایی $\{e^{i\lambda x}\}$ روی $\mathbb{R}$، را در نظر می‌گیریم که در آن λ روی اعداد حقیقی مقدار می‌گیرد. فرض کنید $\mathcal{H}_۰$ فضای ترکیبات خطی متناهی از این توابع نمایی باشد. برای $f, g \in \mathcal{H}_۰$ ضرب داخلی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(f, g) = \lim_{T \to \infty} \frac{۱}{۲T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

الف. نشان دهید که حد وجود دارد، و

$$(f, g) = \sum_{k=۱}^{N} a_{\lambda_k}\overline{b_{\lambda_k}},$$

اگر $f(x) = \sum_{k=۱}^{N} a_{\lambda_k}e^{i\lambda_k x}$ و $g(x) = \sum_{k=۱}^{N} b_{\lambda_k}e^{i\lambda_k x}$.

ب. با این ضرب داخلی $\mathcal{H}_۰$، یک فضای پیش هیلبرت است. توجه کنید که اگر $f \in \mathcal{H}_۰$، $\|f\| \le \sup_m |f(x)|$ که در آن $\|f\|$،

نمایشگر نرم و برابر با $< f,f >^{\frac{1}{2}}$ است. فرض کنید $\mathcal{H}$ کامل سازی $\mathcal{H}_\circ$ باشد. آنگاه $\mathcal{H}$ جدایی ناپذیر است زیرا اگر $\lambda \neq \lambda'$ باشد، $e^{i\lambda x}$ و $e^{i\lambda' x}$ متعامد یکه هستند.
یک تابع پیوسته‌ی F که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد، **تقریبا متناوب** نامیده می‌شود، هرگاه حد یکنواخت (روی $\mathbb{R}$) از عناصر در $\mathcal{H}_\circ$ باشد. چنین توابعی می‌توانند با عناصر (معین) در کامل سازی $\mathcal{H}$ شناسایی شوند: داریم

$$\mathcal{H}_\circ \subset AP \subset \mathcal{H}$$

، که در آن AP توابع تقریبا متناوب را مشخص می‌سازد.

ج. یک تابع پیوسته‌ی F به AP متعلق است، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ طول $L = L_\varepsilon$ را بتوانیم بیابیم که هر بازه $I \subset \mathbb{R}$ با طول L شامل یک «تقریبا تناوب» τ است، به‌طوری‌که در شرط زیر صادق است:

$$\sup_x |F(x+\tau) - F(x)| < \varepsilon,$$

د. یک مشخصه معادل، این است که، F در AP است اگر و فقط اگر هر دنباله $F(x+h_n)$ از انتقال‌های F شامل یک زیر دنباله به‌طور یکنواخت همگرا باشد.

۳. مورد زیر یک تعمیم مستقیم از قضیه فاتو است: اگر $u(re^{i\theta})$ در گوی یکه همساز و کراندار باشد، آنگاه تقریبا به‌ازای هر θ، $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta})$ وجود دارد. راهنمایی: فرض کنید

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

. آنگاه $a_n''(r) + \frac{1}{r}a_n'(r) - \frac{u^2}{r^2}a_n(r) = 0$، بنابراین، $a_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$ و $n \neq 0$ و درنتیجه $u(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ [1] برای این مورد می‌توان از برهان قضیه ۲۱.۳ استفاده کرد.

۴*. این مسأله، مثال‌هایی از توابع را فراهم می‌کند که تقریبا هیچ جا حد شعاعی ندارند.

الف. تقریبا در همه نقاط مرزی دایره واحد، تابع $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ فاقد حد شعاعی است.

ب. به طور کلی، فرض کنید

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n},$$

در این‌صورت اگر $\sum |a_n|^2 = \infty$ تابع F تقریبا در هیچ نقطه مرزی حد شعاعی ندارد. با این وجود، اگر $\sum |a_n|^2 < \infty$،

۱. همچنین بخش ۵، فصل ۲ در جلد I را ببینید

آنگاه $F \in H^{2}(\mathbb{D})$ و طبق برهان قضیه ۲۱.۳ می‌دانیم که، F تقریبا همه جا حدود شعاعی دارد.

۵*. فرض کنید F در گوی یکه تحلیلی است و

$$\sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} |F(re^{i\theta})| d\theta < \infty,$$

که اگر $u \ge 1$، $\log^{+} u = \log u$ و اگر $u < 1$، $\log^{+} u = 0$.

آنگاه تقریبا به‌ازای هر θ، $\lim_{r\to 1} F(re^{i\theta})$ موجود است.

شرط بالا برقرار می‌شود، هرگاه

برای یک $p > 0$، $\sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^{p} \theta < \infty$

(زیرا $e^{pu} \ge pu$ و $u \ge 0$).

مجموعه توابعی که در شرط آخر صدق می‌کنند فضای هاردی $H^{p}(\mathbb{D})$ را تشکیل می‌دهند.

۶*. اگر T فشرده باشد و $\lambda \neq 0$، نشان دهید

الف. $\lambda I - T$ یک به یک است اگر و فقط اگر $\bar{\lambda} I - T^{*}$ یک به یک باشد.

ب. $\lambda I - T$ یک به یک است اگر و فقط اگر $\lambda I - T$ پوشا باشد.

این نتیجه که به‌عنوان **روش فرد هلم** شناخته می‌شود، اغلب با آنچه در تمرین ۲۹ آمده است ترکیب می‌شود.

۷ نشان دهید که عملگر همانی روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ نمی‌تواند به‌صورت یک عملگر انتگرال همگرای مطلق ارائه شود. به طور دقیق‌تر، اگر $K(x,y)$ یک تابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ با این خاصیت باشد که برای هر $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ، انتگرال $T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy$ تقریبا به‌ازای هر x همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر f، $T(f) \neq f$.

راهنمایی: ثابت کنید که در غیر این صورت به‌ازای هر جفت از گوی‌های مجزای B_1 و B_2 در $\mathbb{R}^d$، خواهیم داشت تقریبا به‌ازای هر $(x,y) \in B_1 \times B_2$، $k(x,y) = 0$.

*۸. فرض کنید $\{T_k\}$ یک گردایه از عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. فرض کنید برای مقادیر مثبت $\{a_n\}$ با خاصیت

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n = A < \infty,$$

داریم

$\|T_k T_j^*\| \leq a_{k-j}$ و $\|T_k^* T_j\| \leq a_{k-j}^*$،

زمانی که $N \to \infty$، $S_N(f)$ به‌ازای هر $f \in \mathcal{H}$ با تعریف

$$S_N = \sum_{-N}^{N} T_k$$

همگراست. به‌علاوه $T = \lim_{N\to\infty} S_N$، در شرط $\|T\| \leq A$ صدق می‌کند.

۹. یک بحث از یک رده از عملگرهای اشتورم لیویل منظم در ادامه می‌آید. مثال‌های خاص دیگری هم در مسائل زیر ارائه می‌شود.
فرض کنید $[a,b]$ یک بازه کراندار است و L روی آن دسته از توابع f که دوبار مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته روی $[a,b]$ هستند(می‌نویسیم،

$$f \in C^2([a,b])$$

) به‌صورت

$$L(f)(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} - q(x)f(x),$$

تعریف می‌شود. در اینجا تابع q پیوسته و حقیقی مقدار روی $[a,b]$ است و برای سهولت فرض می‌کنیم که q نامنفی است. می‌گوییم $\varphi \in C^2([a,b])$ یک **تابع ویژه** L با بردار ویژه‌ی μ است،

اگر $L(\varphi) = \mu\varphi$، تحت این فرض که φ در شرایط مرزی

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

صدق می‌کند . در این‌صورت می‌توان نشان داد

الف. مقادیر ویژه‌ی μ اکیدا منفی هستند و فضای ویژه‌ی متناظر با هر بردار ویژه، یک بعدی است.

ب. بردارهای ویژه متناظر با بردارهای ویژه‌ی مجزا در $L^2([a,b])$ متعامد هستند.

ج. فرض کنید $K(x,y)$ «هسته سبز» باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود. $\varphi(x)$ را طوری برگزینید که جوابی از $L(\varphi_-) = 0$ با شرط $\varphi_-(x)$ باشد، اما $\varphi'_-(a) \neq 0$. به طور مشابه، $\varphi_+(x)$ را طوری انتخاب کنید که جوابی از

$$L(\varphi_+) = 0$$

با شرط $\varphi_+(b) = 0$ باشد، اما $\varphi'_+(b) \neq 0$. فرض کنید

$$w = \varphi'_+(x)\varphi_-(x) - \varphi'_-(x)\varphi_+(x),$$

«رانسکین» این جواب ها باشد و توجه کنید که w یک ثابت ناصفر است.

قرار دهید

$$K(x,y)=\begin{cases}\frac{\varphi_-(x)\varphi_+(x)}{w} & a\le x\le y\le b \text{ اگر}\\ \frac{\varphi_+(x)\varphi_-(x)}{w} & a\le y\le x\le b \text{ اگر}.\end{cases}$$

در این‌صورت عملگر T که به وسیله

$$T(f)(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

تعریف می‌شود یک عملگر هیلبرت -اشمیت و بنابراین فشرده و همچنین متقارن است. به‌علاوه، هرگاه f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، Tf از رده‌ی $C^۲([a,b])$ است و

$$L(Tf)=f.$$

د. به‌عنوان نتیجه ، هر بردار ویژه‌ی T (با مقدار ویژه‌ی λ) یک بردار ویژه‌ی L (با مقدار ویژه‌ی $\mu=\frac{۱}{\lambda}$) است. بنابراین قضیه ۲۷.۴ ثابت می‌کند، که کامل بودن مجموعه متعامد یکه از نرمال‌سازی بردارهای ویژه‌ی L حاصل می‌شود.

*۱۰. فرض کنید L روی $C^۲([-۱,۱])$ به‌صورت

$$L(f)(x)=(۱-x^۲)\frac{d^۲f}{dx^۲}-۲x\frac{df}{dx},$$

تعریف می شود.

اگر φ_n، n امین چندجمله‌ای لژاندر باشد، که به‌صورت

$$\varphi_n(x) = (\frac{d}{dx})^n(۱ - x^۲)^n,$$

برای $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ داده می‌شود، آنگاه $L\varphi_n = -n(n + ۱)\varphi_n$. نرمالسازی φ_n یک پایه متعامد یکه برای $L^۲([-۱, ۱])$ به‌دست می‌دهد(همچنین مسأله ۲، فصل ۳ I را ببینید، که در آن φ_n به‌وسیله L_n نمایش داده می‌شود.)

*۱۱. **توابع هرمیتی** $h_k(x)$ با تساوی مولد زیر تعریف می‌شوند:

$$\sum_{k=۰}^{\infty} h_k(x)\frac{t^k}{k!} = e^{-(\frac{x^۲}{۲} - ۲tx + t^۲)}.$$

الف. این توابع در تساوی‌های «ایجاد» و «پوچ‌سازی» صدق می‌کنند. تساوی‌های

$$(x - \frac{d}{dx})h_k(x) = h_{k+۱}(x)$$

و برای $k \geq ۰$

$$(x + \frac{d}{dx})h_k(x) = h_{k-۱}(x)$$

که در آن $h_{-1}(x) = 0$. توجه کنید $h_0(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ و

$$h_1(x) = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

و به طور کلی

$$h_k(x) = P_k(x)e^{\frac{-x^2}{2}},$$

که در آن P_k یک چندجمله‌ای از درجه k است.

ب. با به‌کار بردن (الف) دیده می‌شود که h_k ها بردارهای ویژه‌ی عملگر $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ با $L(h_k) = \lambda_k h_k$ هستند که در آن $\lambda_k = 2k+1$. ملاحظه می‌شود که این توابع دو به دو متعامد هستند. از آنجایی که

$$\int_{\mathbb{R}} [h_k(x)]^2 dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^k k! = c_k$$

می‌توانیم آن ها را با به‌دست آوردن یک دنباله متعامد یکه $\{H_k\}$ به‌صورت

$$H_k = C_k^{-\frac{1}{2}} h_k,$$

نرمال کنیم. این دنباله در $L^2(\mathbb{R}^d)$ کامل است از آنجایی که به‌ازای هر k، $\int_{\mathbb{R}} fH_k dx = 0$، به‌ازای هر $t \in \mathbb{C}$، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\frac{-x^2}{2}+2tx} dx = 0.$$

ج. فرض کنید که $K(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)H_k(y)}{\lambda_k}$ و همچنین

$$F(x)=T(f)(x)=\int_{\mathbb{R}}K(x,y)f(y)dy.$$

در این صورت T یک عملگر هیلبرت-اشمیت متقارن است و اگر

$$f\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kH_k,$$

آنگاه $F\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}H_k$.

بر اساس (الف) و (ب) می‌توان نشان داد که هرگاه $f\in L^2(\mathbb{R})$، نه تنها،

$$F\in L^2(\mathbb{R}),$$

بلکه $x^2F(x)\in L^2(\mathbb{R})$. به‌علاوه F می‌تواند روی مجموعه‌ای با اندازه صفر تصحیح شود، بنابراین مشتقپذیر پیوسته است، F' پیوسته مطلق است و

$$F''\in L^2(\mathbb{R}).$$

سرانجام، عملگر T به این معنا معکوس L است که

$$LT(f)=LF=-F''+x^2F=f,$$

برای هر $f\in L^2(\mathbb{R})$.

(همچنین مسأله ۷ فصل ۵ جلد ۱ را ببینید.)

فصل ۵

فضاهای هیلبرت : چند مثال

فرق یک ریاضیدان و یک فیزیکدان در چیست؟ در نظر یک ریاضیدان همه فضاهای هیلبرت یکسان هستند؛ برای یک فیزیکدان تفاوت فضاهای هیلبرت در تبلور متفاوت و رفتار واقعی آنهاست.

منتسب به ای ویگنر، حدود ۱۹۶۰.

فضاهای هیلبرت به زمین های مختلفی در آنالیز منجر می شود. اگر چه‌که همه فضاهای هلیبرت (نامتناهی بعد) هستند، و در حقیقت، بررسی‌ها و کاربردهای مختلف و متفاوت آن باعث ایجاد، علاقه

در ریاضیات می‌شود. این مثال‌ها را نشان می‌دهیم.

برای شروع، فرمول پلانشرل و مشخصه منحصر بفرد نهایی قضیه فوریه را درنظر می‌گیریم. ایده‌های مربوط به آنالیز مختلط، به وسیله مطالعه توابع هلومورفیک در یک فضا مشخص می‌شود که به فضای هاردی H^{2} تعلق دارد. این فضای تابعی خودش، بررسی جالب دیگری از فضای هیلبرت است. ملاحظات اینجا در مقایسه با این ایده به قضیه فاتو برای گوی یکه منجر می‌شود، اما همگی

پس مشاهده می‌کنیم ک چطور آنالیز مختلط و تبدیل فوریه با تضمین وجود را ه حل‌های معادلات دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت ترکیب می‌شود. این برهان به ارزیابی پایه L^{2} بستگی دارد، که ثابت می‌شود به‌وسیله تکنیک‌های فضای هیلبرت ساده می‌تواند بهره‌برداری شود.

مثال پایانی ما، قسمت عمده دیریکله و کاربردهای آن برای مسأله مقدار کرانداری برای توابع هارمونیک است در اینجا فضای هیلبرت به انتگرال منجر می‌شود و راه حل به کمک یک عملگر تصویرساز متعامد یکه مناسب ارائه می‌شود.

۱.۵ تبدیل فوریه روی L^2

تبدیل فوریه تابع f روی $\mathbb{R}^d$ به صورت

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx, \qquad (۱.۵)$$

تعریف می‌شود و معکوس آن نیز به صورت

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi, \qquad (۲.۵)$$

داده می‌شود.

این فرمول‌ها پیش از این در چندین مبحث ارائه شده‌اند. ابتدا (درکتاب I) خواص تبدیل فوریه را به شکل مقدماتی با بسنده کردن به توابع رده شوارتس $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ مطرح می‌کنیم. رده‌ی $\mathcal{S}$ شامل توابع f می‌شود که هموار(به‌طور نامحدود مشتق‌پذیر) هستند، به‌طوری‌که برای هر اندیس چندگانه α، β، تابع $x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f$ روی $\mathbb{R}^d$ کراندار است.[1] مشاهده کردیم که روی این رده تبدیلات فوریه یک دوسویی است، به این معنا که فرمول معکوس ۲.۵ برقرار است و به‌علاوه، اتحاد

---

۱. به یاد آورید که $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$ و $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta_d}$، که $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$، $\beta = (\beta_1, ..., \beta_d)$، α_j و β_j اعداد صحیح مثبت هستند. مرتبه α به‌وسیله $|\alpha|$ مشخص و با $\alpha_1 + ... + \alpha_2$ تعریف می‌شود.

پلانشرل را به صورت زیر داریم

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx. \qquad (۳.۵)$$

اکنون به توابع عمومی‌تر (به طور خاص، ناپیوسته) برمی‌گردیم. توجه می‌کنیم بزرگترین رده برای همگرایی (مطلق) انتگرال تعریف شده در $\hat{f}(\xi)$ فضای $L^1(\mathbb{R}^d)$ است. به این منظور در فصل ۲ برقراری یک فرمول معکوس (نسبی) را دیدیم.

فراتر از این گزاره‌های به خصوص چیزی که مایلیم در اینجا دوباره در مفهومی کلی‌تر ثابت کنیم، تقارنی است که بین f و $\hat{f}$ برای S برقراراست. این جا بجایی است که نقش خاص فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R}^d)$ وارد می‌شود.

تبدیل فوریه را روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ به صورت یک توسیع از تعریف روی S تعریف می‌کنیم. به این منظور به طور موقت، نمادهای $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}_0$ را برای تبدیل فوریه روی S و توسیع آن روی L^2 به کار می‌بریم.

نتایج اصلی را در زیر ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. تبدیل فوریه $\mathcal{F}_0$، که در ابتدا روی $S(\mathbb{R}^d)$ تعریف شده است ، یک توسیع (یکتا) به یک نگاشت یکانی$\mathcal{F}$ از $L^2(\mathbb{R}^d)$ به خودش دارد. به خصوص به ازای هر $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

توسیع $\mathcal{F}$ با یک فرایند حدگیری به‌دست می‌آید: اگر $\{f_n\}$ یک دنباله در فضای شوارتس باشد که به f در $L^2(\mathbb{R}^d)$ همگراست، آنگاه $\{\mathcal{F}_\circ(f_n)\}$ به یک عنصر در $L^2(\mathbb{R}^d)$ همگراست که تبدیل فوریه f تعریف می‌شود. برای انجام این امر، باید مشاهده کنیم که هر تابع در L^2 با عناصر فضای شوارتس تقریب زده می‌شود.

لم ۲.۵. فضای $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ در $L^2(\mathbb{R}^d)$ چگال است. به عبارت دیگر، به ازای هر $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$، دنباله $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ وجود دارد، به‌طوری که

$$\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0 \qquad n \to \infty \text{هرگاه}$$

برای برهان لم، $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ و $\varepsilon > 0$ را ثابت می‌گیریم. سپس به ازای هر $M > 0$، تعریف می‌کنیم

$$g_M(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq M, |x| \leq M \text{ اگر} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت $|f(x) - g_M(x)| \leq 2|f(x)|$، بنابراین

$$|f(x) - g_M(x)|^2 \leq 4|f(x)|^2$$

و از آنجایی که تقریبا به ازای هر x وقتی که $M \to \infty$ داریم $g_M(x) \to f(x)$، قضیه همگرایی تسلطی تضمین می‌کند که به ازای هر M ،

داشته باشیم

$$\|f - g_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

می‌نویسیم $g = g_M$، در نظر داشته باشید که این تابع کراندار و دارای تکیه‌گاهی روی یک مجموعه کراندار است و ملاحظه می‌کنید که اکنون کافی است g را به‌وسیله توابع در فضای شوارتس تقریب بزنیم. برای دستیابی به این هدف، از روشی استفاده می‌کنیم که **منظم سازی** نامیده می‌شود و از هموار سازی g به کمک پیچش آن با یک تقریب از همانی حاصل می‌شود. تابع $\varphi(x)$ را روی $\mathbb{R}^d$ با خواص زیر در نظر بگیرید:

الف. φ هموار است (نامتناهی بار مشتق‌پذیر).

ب. تکیه‌گاه φ گوی یکه است.

پ. $\varphi \geq 0$.

ت. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$.

به‌عنوان مثال، می‌توانیم قرار دهیم

$$\varphi(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{اگر } |x| < 1 \\ 0 & \text{اگر } |x| \geq 1 \end{cases}$$

که در آن ثابت c به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که (د) برقرار باشد.
سپس تقریب همانی تعریف شده به‌وسیله

$$K_\delta(x) = \delta^{-d}\varphi(x/\delta),$$

را در نظر می‌گیریم.
نکته کلیدی اصلی این است که $g * K_\delta$ به $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ تعلق دارد، در حقیقت با این پیچش کراندار است و به‌طور یکنواخت نسبت به δ، تکیه‌گاه ثابتی روی یک مجموعه‌ی کراندار دارد. (با فرض این‌که برای مثال $\delta \leq ۱$). در واقع، با دیدگاه تساوی (۶.۲) از فصل ۲ می‌توانیم بنویسیم

$$(g * K_\delta)(x) = \int g(y)K_\delta(x-y)dy = \int g(x-y)K_\delta(y)dy,$$

توجه می کنیم از آنجایی که g تکیه‌گاهی روی یک مجموعه کراندار دارد و K_δ خارج از یک گوی با شعاع δ، صفر می شود، تابع $g * K_\delta$ دارای تکیه‌گاهی روی یک مجموعه‌ی کراندار ثابت مستقل از δ است. همچنین تابع g به لحاظ ساختار، کراندار است. بنابراین

$$\begin{aligned}|(g * K_\delta)(x)| &\leq \int |g(x-y)|K_\delta(y)dy \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |g(z)| \int K_\delta(y)dy = \sup_{z\in\mathbb{R}^d} |g(z)|,\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد که $g * K_\delta$ روی δ به‌طور یکنواخت کراندار نیز است. به‌علاوه از توصیف انتگرالی اول بالا برای از $g * K_\delta$ می‌توان از تابع تحت انتگرال مشتق گرفت، تا ببینیم $g * K_\delta$ هموار است و همه‌ی مشتق‌های آن تکیه‌گاهی روی مجموعه کراندار ثابت دارند.

اگر بتوانیم نشان دهیم $g * K_\delta$ به g در $L^۲(\mathbb{R}^d)$ همگراست، برهان لم کامل می‌شود. اکنون قضیه ۱۳.۳ در فصل ۳ تضمین می‌کند که تقریبا به ازای هر x، کمیت $\|(g * K_\delta)(x) - g(x)\|^۲$ به صفر همگراست، هرگاه δ به صفر میل کند. استفاده از قضیه همگرایی کراندار قضیه (۴.۲ در فصل ۲) به این منجر می‌شود که

$$\text{زمانی که } \delta \to ۰ ،\quad \|(g * K_\delta) - g\|^۲_{L^۲(\mathbb{R}^d)} \to ۰$$

به‌ویژه به ازای یک δ مناسب، داریم $\|(g * K_\delta) - g\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ و بنابراین $\|f - g * K_\delta\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)} < ۲\varepsilon.$ با انتخاب یک دنباله از ϵ متمایل به صفر، ساختار دنباله موردنظر $\{f_n\}$ به‌دست می‌آید.

برای اهداف بعدی، خوب است ملاحظه کنیدکه، برهان لم بالا عبارت زیر را ثابت می‌کند: اگر f به هر دو $L^۱(\mathbb{R}^d)$ و $L^۲(\mathbb{R}^d)$ تعلق داشته باشد، آنگاه یک دنباله $\{f_n\}$، $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ وجود دارد، به طوری که در هر دو نرم $L^۱$ و $L^۲$ به f همگراست.

تعریف ما از تبدیل فوریه روی $L^۲(\mathbb{R}^d)$ مفهوم چگال بودن $\mathcal{S}$ بالا

را با یک «اصل توسیع» کلی ترکیب می‌کند.

لم ۳.۵. فرض کنید $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ فضاهای هیلبرت را به ترتیب با نرم‌های $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ مشخص کنند. فرض کنید $\mathcal{S}$ یک زیرفضای چگال $\mathcal{H}_1$ و $T_0 : \mathcal{S} \to \mathcal{H}_2$ یک تبدیل خطی است که در شرط $\|T_0(f)\|_2 \leq c\|f\|_1$ را هرگاه $f \in \mathcal{S}$ صدق می کند. در این صورت T_0 به یک تبدیل خطی (منحصربفرد) $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ توسیع می‌یابد، که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $\|T(f)\|_2 \leq c\|f\|_1$.

برهان. به ازای هر $f \in \mathcal{H}_1$ داده شده، فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{S}$ باشد که به f همگراست و تعریف کنید

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T_0(f_n),$$

که درآن حد در نرم $\mathcal{H}_2$ گرفته می‌شود. برای مشاهده این امر که T خوش تعریف است، بررسی می‌کنیم که حد وجود دارد و مستقل از انتخاب $\{f_n\}$ برای تقریب f است. در واقع طبق نکته اول توجه می‌کنیم که $\{T(f_n)\}$ دنباله کشی در $\mathcal{H}_2$ است. زیرا با توجه به ساختار، $\{f_n\}$ در $\mathcal{H}_1$ کشی است، از استفاده نامساوی برای T_0 داریم

$$\|T_0(f_n) - T_0(f_m)\|_2 \leq c\|f_n - f_m\|_1, \qquad \text{هرگاه}\ n, m \to \infty$$

بنابراین $\{T_0(f_n)\}$ کشی است، پس در $\mathcal{H}_2$ همگراست.

ثانیا برای تأیید این که حد از انتخاب دنباله تقریب زننده مستقل است، فرض کنید $\{g_n\}$ دنباله دیگری در $\mathcal{S}$ باشد که به f در $\mathcal{H}_1$ همگراست. در این صورت

$$\|T_0(f_n) - T_0(g_n)\|_2 \leq c\|f_n - g_n\|_1,$$

و از آنجایی که $\|f_n - g_n\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f - g_n\|_1$، نتیجه می‌گیریم $\{T_0(g_n)\}$ به حدی در $\mathcal{H}_2$ همگراست که با حد $\{T_0(f_n)\}$ برابر است.

سرانجام یاد آوری می‌کنیم که اگر $f_n \to f$ و $T_0(f_n) \to T(f)$، آنگاه $\|T_0(f_n)\|_2 \to \|T(f)\|_2$ و $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ بنابراین با حدگیری، زمانی که $n \to \infty$ نامساوی $\|T(f)\|_2 \leq c\|f\|_1$ به ازای هر $f \in \mathcal{H}_1$ برقرار است.

در مورد اخیر از تبدیل فوریه، این لم را برای $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^d)$ (که با نرم L^2 مجهز شده است)،

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

و تبدیل فوریه $T_0 = \mathcal{F}_0$ تعریف شده روی فضای شوارتس به کار می‌بریم. تبدیل فوریه روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ بنا به تعریف، توسیع (کراندار) منحصربفرد $\mathcal{F}_0$ به L^2 است که به‌وسیله لم ۳.۵ تضمین شده است. بنابراین اگر $f \in \mathbb{R}^d$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ باشد که به f همگراست (به این معنا که $\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$ هرگاه $n \to \infty$) آنگاه **تبدیل فوریه**

f را با توجه به

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_\circ(f_n), \tag{۴.۵}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن حد به معنای $L^۲$ گرفته می‌شود. به وضوح، شرح برهان لم، نشان می‌دهد که در این حالت به‌خصوص، توسیع $\mathcal{F}$ همچنان در تساوی ۳.۵ صدق می کند:

هرگاه $f \in L^۲(\mathbb{R}^d)$، $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)}$

این حقیقت که $\mathcal{F}$ روی $L^۲$ وارون‌پذیر است (و بنابراین $\mathcal{F}$ یک نگاشت یکانی است) نیز یک نتیجهٔ خاصیت مشابه روی $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ است. به خاطر بیاورید که در فضای شوارتس، $\mathcal{F}_\circ^{-۱}$ به‌وسیله فرمول ۲.۵ ارائه شد که

$$\mathcal{F}_\circ^{-۱}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) e^{۲\pi i x\cdot\xi} d\xi,$$

و همچنان در تساوی $\|\mathcal{F}_\circ^{-۱}(g)\|_{L^۲} = \|g\|_{L^۲}$ صدق می کند. بنابراین مشابه با بحث بالا به‌وسیله فرایند حد گیری می‌توانیم $\mathcal{F}_\circ^{-۱}$ را به $L^۲(\mathbb{R}^d)$ توسیع دهیم. بنابراین به ازای $f \in L^۲(\mathbb{R}^d)$ داده شده، یک دنباله $\{f_n\}$ را در فضای شوارتس انتخاب می‌کنیم که $\lim \|f - f_n\|_{L^۲} \to \circ$. داریم

$$f_n = \mathcal{F}_\circ^{-۱}\mathcal{F}_\circ(f_n) = \mathcal{F}_\circ\mathcal{F}_\circ^{-۱}(f)$$

که با حدگیری وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود، می‌بینیم

$$f = \mathcal{F}^{-۱}\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-۱}(f),$$

و بنابراین F وارون پذیر است. $\square$

بعضی از نکات به این ترتیب هستند.

۱. فرض کنید f به هر دو فضای $L^۱(\mathbb{R}^d)$ و $L^۲(\mathbb{R}^d)$ تعلق دارد. آیا هر دو تعریف تبدیل فوریه یکسان هستند؟ و این‌که آیا $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ برقرار است،که در آن $\mathcal{F}(f)$ به‌وسیله فرایند حدگیری در قضیه ۱.۵ به‌دست آمده و $\hat{f}$ از طریق همگرایی انتگرال ۱.۵ تعریف شده است؟ در واقع برای اثبات این امر، یادآوری می‌کنیم که می‌توانیم f را به‌وسیله یک دنباله $\{f_n\}$ در S تقریب بزنیم، به‌طوری که هم در نرم $L^۱$ و هم نرم $L^۲$، $f_n \to f$. از آنجایی که $\mathcal{F}_{\circ}(f_n) = \hat{f}$، گذار به حد نتیجه مورد نظر را به دست می‌دهد. در حقیقت $\mathcal{F}_{\circ}(f_n)$ در نرم $L^۲$ به $\mathcal{F}(f)$ همگرا است بنابراین تقریبا همه جا یک زیر دنباله به $\mathcal{F}(f)$ همگراست، گزاره‌ای مشابه را برای $L^۱$ در قضیه ۹.۴ فصل ۲ ببینید.
به‌علاوه

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \|f_n - f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)},$$

بنابراین $\hat{f}_n$ همه جا به $\hat{f}$ همگراست و گزاره ثابت می‌شود.

۲. قضیه تعریف تقریبا مجردی از تبدیل فوریه روی L^2 را به دست می‌دهد. مطابق با آنچه که به تازگی بیان شد، همچنبن می‌توانیم تبدیل فوریه را به شیوه ملموس‌تر همانند زیر نیز تعریف کنیم. اگر $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$، آنگاه

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\le R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx,$$

که حد درنرم L^2 گرفته می شود. توجه کنید در حقیقت اگر χ_R تابع مشخصه‌ی گوی $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le R\}$ را نشان دهد، آنگاه به ازای هر R تابع $f\chi_R$ در هر دو L^1 و L^2 موجود است و $f\chi_R \to f$ در نرم L^2.

۳. این یکسانی تعاریف گوناگون از تبدیل فوریه که در بالا بحث شد به ما اجازه می‌دهد تا $\hat{f}$ را به‌عنوان علامت مرجع برای تبدیل فوریه انتخاب کنیم. این شیوه را در ادامه پی می‌گیریم.

۲.۵ فضای هاردی نیم صفحه بالایی

نظریه‌ی L^2 تبدیل فوریه را برای توابع تحلیلی در نیم صفحه بالایی به کار می‌بریم. این کار ما را به نتایج مشابهی در باره فضای هاردی

و قضیه فاتو، که در بخش قبل آمد، می‌رساند.[1] تصادفا پاسخی برای این پرسش طبیعی فراهم می‌شود: چه توابع $f \in L^{2}(\mathbb{R})$ هستند که دارای تبدیل فوریه با تکیه‌گاه نیم خط $(0,\infty)$ باشند؟

فرض کنید $\mathbb{R}^2_+ = \{z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ نیم صفحه بالایی باشد. فضای هاردی $H^2(\mathbb{R}^2_+)$ را فضای همه توابع تحلیلی F روی $\mathbb{R}^2_+$ با خاصیت زیر تعریف می کنیم

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty, \tag{۵.۵}$$

نرم متناظر $\|F\|_{H^2(\mathbb{R}^2_+)}$، را ریشه دوم کمیت ۵.۵ تعریف می‌کنیم.

ابتدا نوعی مثال از یک تابع F در $H^2(\mathbb{R}^2_+)$ را شرح می دهیم. با تابع $\hat{F}_0$ شروع می‌کنیم که به $L^2(0,\infty)$ تعلق دارد و می‌نویسیم

$$F(x+iy) = \int_0^\infty \hat{F}_0(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi \qquad z = x + iy, y > 0, \tag{۶.۵}$$

(انتخاب علامت خاص $\hat{F}_0$ جلوتر واضح تر می‌شود.) ادعا می‌کنیم که به ازای هر $\delta > 0$ تا زمانی که $y \geq \delta$ انتگرال به‌طور مطلق و یکنواخت همگراست. در واقع، $|\hat{F}_0(\xi) e^{2\pi i \xi z}| = |\hat{F}_0(\xi)| e^{-2\pi i \xi y}$، بنابراین با توجه

۱. پیش زمینه اولیه و برخی مباحث بیشتر در قضیه ۳,۵ درفصل ۴ جلد ۲ یافت می‌شود.

به نامساوی کوشی-شوارتس

$$\int_{\circ}^{\infty} |\hat{F}_{\circ}(\xi)e^{۲\pi i\xi z}|d\xi \leq \left(\int_{\circ}^{\infty} |\hat{F}_{\circ}(\xi)|d\xi\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\int_{\circ}^{\infty} e^{-۴\pi\xi\delta}d\xi\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

که از طریق آن، همگرایی بیان شده اثبات می‌شود. از همگرایی یکنواخت نتیجه می‌شود که $F(z)$ در نیم صفحه بالایی تحلیلی است. به‌علاوه با توجه به قضیه پلانشرل،

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^{۲}dx = \int_{\circ}^{\infty} |\hat{F}_{\circ}(\xi)|^{۲} e^{-۴\pi i\xi y}d\xi \leq \|\hat{F}_{\circ}\|^{۲}_{L^{۲}(\circ,\infty)},$$

و در حقیقت با توجه به قضیه همگرایی یکنواخت

$$\sup_{y>\circ} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^{۲}dx = \|\hat{F}_{\circ}\|^{۲}_{L^{۲}(\circ,\infty)}$$

به‌خصوص، F به $H^{۲}(\mathbb{R}^{d}_{+})$ تعلق دارد. نتیجه‌ای که از این پس ثابت می‌کنیم، عکس قضیه است که هر عنصر از فضای $H^{۲}(\mathbb{R}_{+})$ در حقیقت به شکل ۶.۵ است.

قضیه ۴.۵. عناصر F در $H^{۲}(\mathbb{R}^{۲}_{+})$ دقیقا توابع ارائه شده در ۶.۵ با $\hat{F}_{\circ} \in L^{۲}(\circ,\infty)$ هستند. به‌علاوه $\|F\|_{H^{۲}(\mathbb{R}^{۲}_{+})} = \|\hat{F}_{\circ}\|_{L^{۲}(\circ,\infty)}$.

اتفاقا با توجه به تناظر (۵.۵)، این نشان می‌دهد که $H^{۲}(\mathbb{R}^{۲}_{+})$ یک فضای هیلبرت است که با $L^{۲}(\circ,\infty)$ طولپا است. نکته اساسی در

برهان قضیه واقعیت زیر است. به ازای هر مقدار مثبت ثابت y، فرض می‌کنیم $\hat{F}_y(\xi)$ تبدیل فوریه، $L^۲$، تابع $F(x+iy)$ را به ازای $x \in \mathbb{R}$ نشان دهد. آنگاه برای هر دسته از انتخاب‌های y، $y_۱$ و $y_۲$ و تقریبا به ازای هر ξ داریم:

$$\hat{F}_{y_۱}(\xi)e^{۲\pi y_۱ \xi} = \hat{F}_{y_۲}(\xi)e^{۲\pi y_۱ \xi}. \qquad (۷.۵)$$

برای اثبات این عبارت، به ملاحظه‌ی تکنیکی مفیدی توجه می‌کنیم.

لم ۵.۵. اگر F به $H^۲(\mathbb{R}^۲_+)$ متعلق باشد، آنگاه F در هر نیم صفحه سره $\{z = x+iy, y \geq \delta\}$، کراندار است که در آن $\delta > ۰$.

برای اثبات این امر خاصیت مقدار میانگین توابع تحلیلی را استخراج می‌کنیم. این خاصیت ممکن است به دو روش نیز بیان شود. اول، از طریق میانگین گیری روی دایره‌ها

$$۰ < r \leq \delta, \qquad F(\zeta) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} F(\zeta + re^{i\theta})d\theta, \qquad (۸.۵)$$

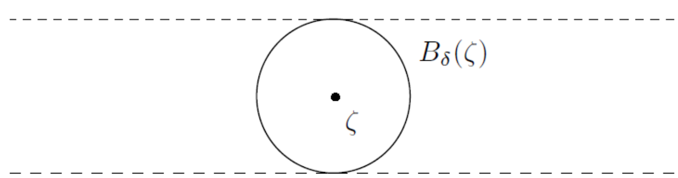
(توجه کنید که اگر ζ درنیم صفحه بالایی قرار داشته باشد، $Im(\zeta) > \delta$ آنگاه گویی به مرکز ζ و باشعاع r به $\mathbb{R}^۲_+$ تعلق دارد). از طرف دیگر با انتگرال گیری روی r، خاصیت مقدار میانگین را بر حسب گوی‌ها داریم

$$F(\zeta) = \frac{۱}{۲\pi\delta^۲}\int_{|z|<\delta} F(\zeta + z)dxdy, \qquad z = x+iy, \qquad (۹.۵)$$

در حقیقت این گزاره‌ها برای توابع همساز روی $\mathbb{R}^۲$ برقرار هستند(نتیجه ۷,۲ فصل ۳ جلد ۲ را برای نتیجهٔ مربوط به توابع تحلیلی و لم ۲,۸، فصل ۵ جلد ۱ را برای حالت توابع همساز ببینید.) در قدم بعدی، در حقیقت ما در این فصل، توسیع ۹.۵ را برای $\mathbb{R}^d$ ثابت می‌کنیم. از ۹.۵ و از نامساوی کوشی-شوارتس می‌بینیم

$$|F(\zeta)|^۲ \leq \frac{۱}{\pi\delta^۲}\int_{|z|<\delta}|F(\zeta+z)|^۲dxdy.$$

با نوشتن $z = x+iy$ و $\zeta = \xi+i\eta$ با $\eta > \delta$، می‌بینیم که گوی $B_\delta(\zeta)$ با مرکز ζ و شعاع δ مشمول در نوار $\{z+\zeta : z = x+iy, -\delta < y < \delta\}$ است و به‌علاوه این نوار در نیم صفحه $\mathbb{R}^۲_+$ قرار می‌گیرد. تصویر ۱.۵ ببینید.



شکل ۱.۵: گوی مشمول در یک نوار

و این رابطه نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\int_{|z|<\delta}|F(\zeta+z)|^۲dxdy \leq \int_{|y|<\delta}\int_{\mathbb{R}}|F(\zeta+x+iy)|^۲dxdy$$

$$\leq 2\delta \sup_{-\delta<y<\delta} \int_{\mathbb{R}} |F(x+i(\eta+y))|^2 dx.$$

با یاد آوری این‌که $\eta > \delta$، می‌بینیم که عبارت پایانی در حقیقت به صورت

$$2\delta \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx = 2\delta \|F\|^2_{H^2(\mathbb{R}^2_+)},$$

ماکزیمم می‌شود. در همه جا ، در نیم صفحه $Im(\zeta) > 0$، $|F(\zeta)|^2 \leq \frac{2}{\pi\delta}\|F\|^2_{H^2}$. به این صورت لم ثابت می‌شود.

اکنون به برهان تساوی ۷.۵ برمی‌گردیم. با شروع از F در $H^2(\mathbb{R}^2_+)$، آن را از طریق جایگزینی آن با تابع F^ϵ با تعریف

$$F^\epsilon(z) = F(z)\frac{1}{(1-i\epsilon z)^2}, \qquad \text{با } \epsilon > 0$$

بهبود می‌بخشیم.

ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $Im(z) > 0$، $|F^\epsilon(z)| \leq |F(z)|$. همچنین به ازای هر z هرگاه $\epsilon \to 0$، $F^\epsilon(z) \to F(z)$. این نشان می‌دهد که به ازای هر $y > 0$، درنرم L^2، $F^\epsilon(x+iy) \to F(x+iy)$، به‌علاوه، لم تضمین می‌کند که هر F^ϵ تقریب تحلیلی زیر را برقرار می‌سازد

هرگاه برای یک $\delta > 0$ داشته باشیم $Im(z) > \delta$ آنگاه $F^\epsilon(z) = O\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

ابتدا اذعان می‌کنیم که عبارت ۷.۵ با قرار دادن F به جای F^ϵ برقرار است. این نتیجهٔ ساده از انتگرالپذیری کانتوربه کار رفته برای تابع

زیر است:

$$G(z)=F^{\epsilon}(z)e^{-2\pi iz\xi}.$$

در حقیقت، $G(z)$ را روی مستطیلی با رئوس $-R+iy$ و $R+iy_1$ و $R+iy_2$ و $-R+iy_2$ انتگرال می‌گیریم و فرض می کنیم $R\to\infty$. اگر رابطه

$$G(z)=O\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)$$

را روی این مستطیل در نظر بگیریم، آنگاه در می‌یابیم

$$\int_{L_1}G(z)dz=\int_{L^2}G(z)dz,$$

که در آن L_j، خط $\{x+iy:x\in\mathbb{R}\}$ است. از آنجایی که

$$\int_{L_1}G(z)dz=\int_{\mathbb{R}}F^{\epsilon}(x+iy_j)e^{-2\pi i(x+iy_j)\xi}dx,$$

داریم

$$\hat{F}^{\epsilon}_{y_1}(\xi)e^{2\pi y_1\xi}=\hat{F}^{\epsilon}_{y_2}(\xi)e^{2\pi y_2\xi}.$$

از آنجایی که هرگاه در نرم L^2، $\epsilon\to 0$.

$$F^{\epsilon}(x+iy)\to F(x+iy),$$

لذا عبارت ۷.۵ را به‌دست می‌آوریم.

این تساوی بیان می‌دارد که $\hat{F}_y(\xi)e^{2\pi y\xi}$ از y مستقل است و $y > 0$ و بنابراین تابع $\hat{F}_0(\xi)$ وجود دارد، به‌طوری که $\hat{F}_y(\xi)e^{2\pi\xi y} = \hat{F}_0(\xi)$، در نتیجه

$$\hat{F}_y(\xi) = \hat{F}_0(\xi)e^{-2\pi\xi y} \qquad \text{برای هر } y > 0.$$

بنابراین، از طریق اتحاد پلانشرل داریم

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}_0(\xi)|^2 e^{-4\pi\xi y} d\xi,$$

و بنابراین

$$\sup_{y\geq 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}_0(\xi)|^2 e^{-4\pi\xi y} d\xi = \|F\|^2_{H^2(\mathbb{R}^2_+)} < \infty.$$

سرانجام به این معنی است که تقریبا به ازای هر ξ در $(-\infty, 0)$، داریم $\hat{F}_0(\xi) = 0$. چرا که اگر این حالت برقرار نبود، آنگاه برای اعداد مثبت مناسب a ، b و c می‌توانستیم به ازای ξ در یک مجموعهٔ E در $(-\infty, -b)$ و با $m(E) \geq c$ داشته باشیم: $|\hat{F}_0(\xi)| \geq a$، و این به این نتیجه منجر می‌شود که:

$$\int |\hat{F}_0(\xi)|^2 e^{-4\pi\xi y} d\xi \geq a^2 c e^{4\pi by}$$

که وقتی که $y \to \infty$، به سوی بی‌نهایت رشد می‌یابد. بنابراین تناقض به‌دست آمده نشان می‌دهد که $\hat{F}_0(\xi)$ تقریبا همه جا زمانی که $\xi \in (-\infty, 0)$ ، صفر می‌شود.

به‌طور خلاصه، به ازای هر $y > \circ$، تابع $\hat{F}_y(\xi)$، به ازای $\hat{F}_\circ \in L^{۲}(\circ, \infty)$، با $\hat{F}_\circ(\xi)e^{-۲\pi\xi y}$ برابر است. فرمول عکس فوریه نیز به ازای یک عضو دلخواه $H^{۲}$، به نمایش (۵.۵) منجر می‌شود.

نتیجه دومی که با آن سرو کار داریم، می‌تواند مانند حالت نیم صفحه قضیه فاتو در فصل قبل در نظر گرفته شود.

قضیه ۶.۵. فرض کنید F به $H^{۲}(\mathbb{R}^{۲}_{+})$ تعلق دارد. در این صورت $\lim_{y\to\circ} F(x+iy) = F_\circ(x)$ به دو تعبیر زیر وجود دارد:

۱. به‌عنوان حد در نرم $L^{۲}(\mathbb{R})$

۲. به‌عنوان حد به ازای تقریبا هر x

بنابراین F مقادیر مرزی (مشخص شده به وسیله $F_\circ$) را در هر دو تعبیر فوق دارد. تابع $F_\circ$ گاهی، به **تابع مقدار مرزی** f شناخته می شود. برهان قسمت ۱ بلافاصله از مطلبی که قبلا می‌دانستیم، به دست می‌آید.

درواقع، اگر $F_\circ$، تابعی در $L^{۲}$ باشد که تبدیل فوریه، $\hat{F}_\circ$ را دارد،

$$\|F(x+iy) - F_\circ(x)\|^{۲}_{L^{۲}(\mathbb{R})} = \int_\circ^\infty |\hat{F}_\circ(\xi)|^{۲}|e^{-۲\pi\xi y} - ۱|^{۲}dy,$$

با توجه به قضیه همگرایی تسلطی، هرگاه $y \to \circ$، این عبارت به صفر میل می‌کند.

برای اثبات تقریبا همه جا همگرایی، **نمایش انتگرالی پواسون**[1] را اثبات می‌کنیم

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-۲\pi|\xi|y} e^{۲\pi i x\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\mathcal{P}_y(t)dt, \qquad (۱۰.۵)$$

با هسته پواسون [2]

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{۱}{\pi}\frac{y}{y^۲ + x^۲}.$$

این تساوی برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^۲_+$ و هر تابع f در $L^۲(\mathbb{R})$ برقرار است. برای مشاهده این امر با نوشتن فرمول‌های انتگرال‌گیری مقدماتی شروع می‌کنیم:

$$(۱۱.۵) \qquad \text{اگر } Im(z) > ۰\text{،} \qquad \int_۰^\infty e^{۲\pi i\xi z} d\xi = \frac{i}{۲\pi z}\text{،}$$

و اگر $y > ۰$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-۲\pi|\xi|y} e^{۲\pi i\xi x} d\xi = \frac{۱}{\pi}\frac{y}{y^۲ + x^۲}, \qquad (۱۲.۵)$$

---

1. Poisson

۲. این صورت تساوی در $\mathbb{R}$، مشابه تساوی ۳.۵ روی دایره است، که در فصل ۳ ارایه شد.

اولین رابطه نتیجه‌ای فوری این حقیقت است که

$$\int_{۰}^{N} e^{۲\pi i\xi z}d\xi = \frac{۱}{۲\pi iz}[e^{۲\pi iNz} - ۱],$$

اگر فرض کنیم $N \to \infty$. برای اثبات فرمول دوم، انتگرال را به صورت

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-۲\pi\xi y}e^{۲\pi i\xi x}d\xi + \int_{۰}^{\infty} e^{-۲\pi\xi y}e^{۲\pi i\xi x}d\xi,$$

می‌نویسیم، که با توجه به (۱۱.۵) برابر است با

$$\frac{i}{۲\pi}[\frac{۱}{x+iy} + \frac{۱}{-x+iy}] = \frac{۱}{\pi}\frac{y}{y^{۲}+x^{۲}}.$$

پس، وقتی که f متعلق به (مثلا) فضای S باشد، (۱۱.۵) را داریم. در واقع، برای عضو ثابت $(x,y) \in \mathbb{R}^{۲}_{+}$، تابع $\phi(t,\xi) = f(t)e^{-۲\pi i\xi t}e^{-۲\pi|\xi|y}e^{۲\pi i\xi x}$ را روی $\mathbb{R}^{۲} = \{(\xi,t)\}$ در نظر می‌گیریم. از آنجایی که

$$|\phi(t,\xi)| = |f(t)|e^{-۲\pi|\xi|y}$$

، آنگاه (چون f اکیدا صعودی است) ϕ روی $\mathbb{R}^{۲}$ انتگرالپذیر است. با به کاربردن قضیه فوبینی داریم

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\phi(t,\xi)d\xi\right)dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\phi(t,\xi)dt\right)d\xi.$$

طرف راست به وضوح $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-۲\pi|\xi|y} e^{۲\pi i x\xi} d\xi$ را به‌دست می‌دهد، در حالی که طرف چپ به خاطر عبارت (۱۲.۵) به عبارت

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathcal{P}_y(x-y)dt$$

منجر می‌شود. با وجود این، اگر از رابطه (۶,۳) در فصل ۳ استفاده کنیم، می‌بینیم

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathcal{P}_y(x-y)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathcal{P}_y(t)dt.$$

بنابراین، نمایش انتگرالی پواسون (۱۰.۵) برای هر $f \in S$ برقرار است. برای یک $f \in L^۲(\mathbb{R})$ دلخواه، یک دنباله $\{f_n\}$ از عناصر در S را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که در نرم $L^۲$، $f_n \to f$ (و همچنین $\hat{f}_n \to \hat{f}$) سپس یک گذار به حد، به فرمولی برای f از فرمول متناظر برای هر f_n منجر می‌شود. در واقع با توجه به نامساوی کوشی-شوارتس داریم

$$\left|\int_{\mathbb{R}} [\hat{f}(\xi) - \hat{f}_n(\xi)] e^{-۲\pi|\xi|y} e^{۲\pi i x\xi} d\xi\right| \leq \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_{L^۲} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-۴\pi|\xi|y} d\xi\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

و همچنین

$$\left|\int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f_n(x-t)]\mathcal{P}_y(t)dt\right| \leq \|f - f_n\|_{L^۲} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{P}_y(t)|^۲ dt\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

و طرف راست به صفر میل می‌کند. زیرا برای هر عضو $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$، توابع $e^{-2\pi|\xi|y}$ برای $\xi \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{P}_y(t)$ برای $t \in \mathbb{R}$، به $L^2(\mathbb{R})$ تعلق دارند.
با اثبات انتگرال پواسون (۱۰.۵) به عنصر داده شده $F \in H^2(\mathbb{R}^2_+)$ برمی‌گردیم. می‌دانیم که تابع $\hat{F}_0(\xi)$ متعلق به L^2 وجود دارد (که هرگاه $\xi < 0$، به صفرمیل می‌کند)به‌طوری که (۵.۵) برقرار است. با استفاده از F_0، تابعی در $L^2(\mathbb{R})$ که تبدیل فوریه $\hat{F}_0(\xi)$ دارد، از (۱۰.۵) می‌بینیم که با $f = F_0$

$$F(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} F_0(x-t)\mathcal{P}_y(t)dt.$$

از این مطلب نتیجه می‌گیریم که تقریبا به ازای هر x هرگاه $y \to 0$، $F(x+iy) \to F_0(x),$ زیرا خانواده $\{\mathcal{P}_y\}$ یکه تقریبی است، که قضیه ۱۳.۳ در فصل ۳ برای آن به کار رفته است. با وجود این مانع کوچکی وجود دارد که باید برآن فائق آییم: قضیه‌ای که بیان شد در توابع L^1 و نه در توابع L^2 به کار می‌رود. با وجود این، بنا بر ماهیت تقریب همانی ارائه شده یک «موضعی سازی» ساده، موفقیت‌آمیز خواهد بود. به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم.

کافی است ببینیم که به ازای هر N بزرگ، که ثابت است، تقریبا به ازای هر x با $|x| < N$، $F(x+iy) \to F_0(x)$. برای انجام این امر، F_0 را به صورت $G + H$ تجزیه کنید که در آن $G(x) = F_0(x)$ هرگاه

اگر $|x| > ۲N$ و $G(x) = ۰$ هرگاه $|x| \geq ۲N$ بنابراین، $H(x) = ۰$ اگر $|x| \leq ۲N$ اما $|H(x)| \leq |F_۰(x)|$. اکنون توجه کنید که $G \in L^۱$ و

$$\int_{\mathbb{R}} F_۰(x-t)\mathcal{P}_y(t)dt = \int_{\mathbb{R}} G(x-t)\mathcal{P}_y(t)dt + \int_{\mathbb{R}} H(x-t)\mathcal{P}_y dt.$$

بنابراین، با توجه به قضیه ذکر شده در فصل ۳، ابتدا انتگرال روی طرف راست تقریبا به ازای هر x زمانی که $|x| < N$، به $G(x) = F_۰(x)$ می‌گراید، درحالی‌که هرگاه $|x| < N$، مقدار انتگرال دوم صفر می‌شود چون اگر $|t| < N$ آنگاه $|x-t| < ۲N$. بنابراین این انتگرال به‌وسیله

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |H(x-t)|^۲ dt\right)^{\frac{۱}{۲}} \left(\int_{|t|\geq N} |\mathcal{P}_y(t)|^۲ dt\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

ماکزیمم می‌شود.

با وجود این $\left(\int_{\mathbb{R}} |H(x-t)|^۲ dt\right)^{\frac{۱}{۲}} \leq \|F_۰\|_{L^۲}$ در حالی که (به آسانی دیده می‌شود) هرگاه $y \longrightarrow ۰$، $\int_{|t|\geq N} |\mathcal{P}_y(t)|^۲ dt \to ۰$. هرگاه $y \to ۰$. بنابراین تقریبا به ازای هر x با $|x| < N$، زمانی که، $y \to ۰$،

$$F(x+iy) \to F_۰(x)$$

و چون N دلخواه است برهان قضیه ۶.۵ کامل است.

گزاره‌های زیر به تصریح قضیه‌های بالا کمک می‌کنند.

۱. فرض کنید S زیرفضایی از $L^{۲}(\mathbb{R})$ شامل همه توابع $F_{\circ}$ باشد که از قضیه ۶.۵ به‌دست می آیند. بنابراین از آنجا که توابع $F_{\circ}$ دقیقا آن توابع در $L^{۲}$ هستند که تبدیل فوریه‌ی با تکیه‌گاهی روی نیم خط $(\circ,\infty)$ دارند، مشاهده می‌کنیم که S یک زیرفضای بسته است. ممکن است وسوسه شویم بگوییم که S شامل آن توابع از $L^{۲}$ است که از مقادیر مرزی توابع تحلیلی روی نیم صفحه بالایی به دست می آیند. اما این تعبیر راهگشا اگر یک تحدید کمی را به همان گونه که در ۵.۵ از فضای هاردی آمد اضافه نکنیم، دقیق نیست. تمرین ۴ را ببینید.

۲. فرض کنید P را تصویر متعامد روی زیر فضای S از $L^{۲}$ تعریف کنیم. آنگاه همان طور که به آسانی دیده می‌شود، برای هر $f \in L^{۲}(\mathbb{R})$، $(\widehat{Pf})(\xi) = \chi(\xi)\hat{f}(\xi)$ دراین جا χ تابع مشخصه $(\circ,\infty)$ است. عملگر P نیز مربوط به **انتگرال کوشی** است. در واقع، اگر F عنصر(منحصربفرد) در $H^{۲}(\mathbb{R}^{۲}_{+})$ باشد که تابع مرزی آن (بنابر قضیه ۶.۵) $P(f)$ است، آنگاه

$$F(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad z \in \mathbb{R}^{۲}_{+}.$$

برای اثبات این امر کافی است بررسی کنیم که به ازای هر

$f \in L^{2}(\mathbb{R})$ و به ازای هر مقدار ثابت $z = x + iy \in \mathbb{R}^2_+$ داریم:

$$\int_0^\infty \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

این موضوع به روش مشابهی مانند نمایش انتگرالی پواسون (۱۰.۵) ثابت می‌شود. فقط اینجا از تساوی (۱۱.۵) به جای (۱۲.۵) استفاده می‌کنیم. جزئیات را به خواننده علاقه‌مند واگذار می کنیم. همچنین، خواننده ممکن است به این توجه کند که تشابه زیادی بین این فرم انتگرال کشی برای نیم صفحه بالایی و و صورت متناظر آن روی گوی واحد که در مثال ۲۰.۴ داده شد، وجود دارد.

۳. در مقایسه با حالت تناوبی که در تمرین ۳ فصل ۴ بحث شد، یک **عملگر ضربگر فوریه** T را روی $\mathbb{R}$ به صورت یک عملگر خطی روی $L^{2}(\mathbb{R})$ که با یک تابع کراندار m (ضربگر) معین می شود تعریف می کنیم، به‌طوری که روی $L^{2}(\mathbb{R})$ با فرمول $(\widehat{Tf})(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ به ازای هر $f \in L^{2}(\mathbb{R})$ داده می شود. تصویر متعامد P بالا چنین عملگری است و ضربگر آن تابع مشخصه $\chi(\xi)$ است. عملگر دیگری از این نوع که ارتباط زیادی با این موضوع دارد، **عملگر هیلبرت** H است، که به صورت

$P = \frac{I + iH}{۲}$ تعریف می‌شود. در این صورت H یک عملگر ضربگر فوریه‌ی متناظر با ضربگر $\frac{1}{i}sign(\xi)$ است. از جمله خواص متعدد و مهم H، ارتباطش با مزدوج توابع همساز است. درواقع به ازای تابع حقیقی مقدار f در $L^۲(\mathbb{R})$، f و $H(f)$ به ترتیب، قسمت‌های حقیقی و موهومی مقادیر مرزی یک تابع در فضای هاردی هستند. موارد بیشتر در مورد تبدیل هیلبرت در تمرین ۹و۱۰و مسأله ۵ می‌تواند یافت شود.

۳.۵ معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت

توجه خویش را به حل معادله دیفرانسیل جزئی خطی معطوف می‌کنیم،

$$L(u) = f, \tag{۱۳.۵}$$

که در آن عملگر L با مقادیر ثابت $a_\alpha \in \mathbb{C}$ به فرم زیر در می‌آید

$$L = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha.$$

در بررسی مثال‌های کلاسیک L مانند معادله موج، معادله گرما

و معادله لاپلاس می‌توان دید که تبدیل فوریه به روشی مهم [1] وارد می‌شود. برای یک L عمومی، این نقش کلیدی با ملاحضات ساده زیر بیشتر معلوم می‌شود. اگر برای مثال، بکوشیم تا آن معادله را با هر دو عنصر u و f در S حل کنیم، آنگاه این کار با معادله جبری

$$P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

هم ارز است، که در آن $P(\xi)$ **چند جمله‌ای مشخصه** f است که به صورت

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha(۲\pi i\xi)^\alpha$$

تعریف می‌شود.

این موضوع به‌دلیل برقرای اتحاد تبدیل فوریه

$$\left(\widehat{\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}}\right)(\xi) = (۲\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$$

است.

بنابراین یک جواب u در فضای S (اگر وجود داشته باشد) به‌طور منحصر بفرد با

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)},$$

---

۱. برای مثال فصل های ۵ و ۶ جلد ۲ را ببینید.

تعیین می‌شود.

در حالت کلی‌تر مسائل به این آسانی نیستند: در حاشیه سؤالات تعریف ۱۲.۵، تبدیل فوریه به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست. همچنین جواب هایی که ثابت می کنیم وجود دارند (اما منحصربفرد نیستند) باید در حالتی گسترده تر دریافته شوند.

جواب‌های ضعیف

همانطور که خواننده حدس می‌زند، این کافی نیست که توجه خویش را به توابعی معطوف کنیم که $L(u)$ برای آن‌ها به روش معمول تعریف می‌شود. اما در عوض توجهی مضاعف نیاز است، که شامل ایده‌ی جواب‌های ضعیف می‌شود. برای توصیف این مفهوم با یک مجموعهٔ داده شده Ω در $\mathbb{R}^d$ شروع می‌کنیم و فضای $C_0^\infty(\Omega)$ را درنظر می‌گیریم، که شامل فضای توابع بی نهایت بار مشتقپذیری است، [1] که دارای تکیه‌گاه فشرده در Ω [2] هستند. گزاره زیر را داریم.

لم ۷.۵. فضای $C_0^\infty(\Omega)$ در $L^2(\Omega)$ با نرم $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ چگال است.

---

۱. توابع مشتقپذیرنامتناهی نیز با توابع C^∞ یا توابع هموار شناخته می شوند.
۲. این به این معنی است که بستار تکیه‌گاه f همانند تعریف قسمت ۱ فصل ۲، فشرده و مشمول در Ω است.

اساسا برهان تکرار لم ۲.۵ است. در تعریف ارائه شده g_M در آنجا برای احتیاط اصلاحی صورت می دهیم. اگر $|x| \leq M$ و $d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{M}$ و

$$|f(x)| \leq M$$

، آنگاه $g_M(x) = f(x)$ و در غیر این صورت $g_M(x) = 0$. همچنین زمانی که g_M را منظم می‌کنیم، آن را با $g_M * \varphi_\delta$، با $\delta < \frac{1}{2M}$ جایگزین می‌کنیم. بنابراین تکیه‌گاه $g_M * \varphi_\delta$ نیز فشرده است و در فاصله بزرگتر از $\frac{1}{2M}$ از Ω قرار دارد.

سپس عملگر الحاق L تعریف شده با

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} \overline{a}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha,$$

را در نظر می‌گیریم.

عملگر L^* مزدوج L نامیده می‌شود، چرا که در مقایسه با تعریف الحاق یک تبدیل خطی کراندار ارائه شده در قسمت ۲,۵ از فصل قبل، داریم

$$L(\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi), \qquad (۱۴.۵)$$

که $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ است.

در رابطه بالا $(\cdot,\cdot)$ ضرب داخلی را روی $L^{2}(\Omega)$ مشخص می‌کند (که تحدید ضرب داخلی معمولی روی $L^{2}(\mathbb{R}^{d})$ است.) اتحاد ۱۴.۵ به کمک انتگرال گیری جزبه جز ثابت می‌شود. در واقع، حالت خاص اول را درنظر بگیرید زمانی که $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$، و در این صورت $L^{*} = \dfrac{-\partial}{\partial x_j}$. اگر قضیه فوبینی را به کار ببریم، با انتگرال‌گیری در مرحله اول نسبت به متغیر x_j، سپس در این حالت ۱۴.۵ به فرمول یک بعدی آشنای زیر تبدیل می‌شود

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\bar{\psi}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{d\bar{\psi}}{dx}\right)dx,$$

که در آن به علت خواص تکیه‌گاهی فرض شده‌ی ψ (یا φ) جملات مرزی انتگرال گیری شده صفر می شوند. به محض این‌که فرمول برای $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$، $1 \leq j \leq x$ اثبات شود، آنگاه ۱۴.۵ برای $L = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$ با تکرار به‌دست می‌آید و به‌طور کلی برای L به‌دلیل خطی بودن برقرار می‌شود.

در اینجا، برای لحظاتی به سوی فضاهای دیگری از توابع مشتقپذیر روی Ω منحرف می‌شویم که مفیدتر خواهد بود. فضای $C^{n}(\Omega)$ شامل همه توابع f روی Ω می‌شود که مشتق‌های جزئی پیوسته با مرتبه نا بیشتر از n دارند.

همچنین فضای $C^{n}(\overline{\Omega})$ شامل همه توابع روی $\overline{\Omega}$ است که می‌تواند

به توابعی در $\mathbb{R}^d$ توسیع یابد که به $C^n(\mathbb{R}^d)$ تعلق دارند. به وضوح رابطه شمولی زیر را داریم.

به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $C_\circ^\infty(\Omega) \subset C^n(\overline{\Omega}) \subset C^n(\Omega)$.

به عملگر مشتق جزئی L برمی‌گردیم، کافی است ملاحظه کنیم که فرمول

$$(Lu, \psi) = (u, L^*\psi),$$

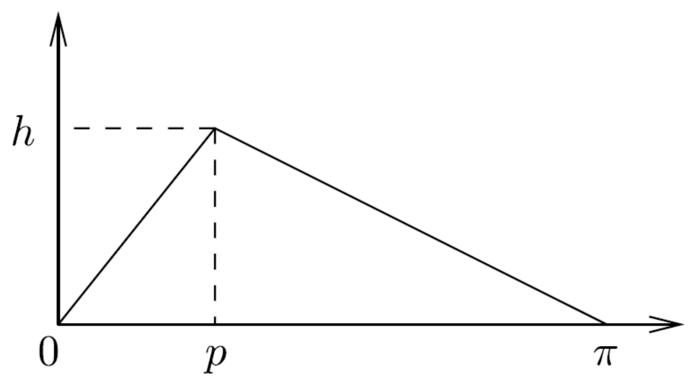
اگر صرفا فرض کنیم که $u \in C^n(\Omega)$، بدون فرض این‌که تکیه‌گاه فشرده دارد، با (همان برهان قبل) تا جایی که هنوز فرض $\psi \in C_\circ^\infty(\omega)$ را داریم، همچنان برقرار است.

به‌ویژه اگر در حالت معمولی (گاهی اوقات حالت قوی نامیده می شود) داشته باشیم $Lu = f$ ، که نیازمند این فرض است که $u \in C^n(\Omega)$ تا مشتقات جزئی را تعریف کنیم، آنگاه همچنین خواهیم داشت

$$(f, \psi) = (u, L^*\psi)\text{، برای هر } \psi \in C_\circ^\infty(\omega). \qquad (۱۵.۵)$$

این موضوع به تعریف مهم زیر منجر می‌شود: اگر $f \in L^2(\Omega)$، تابع $u \in L^2(\Omega)$ یک **جواب ضعیف** از معادله $Lu = f$ در Ω است، هرگاه ۱۵.۵ برقرار باشد. البته یک جواب معمولی همیشه یک جواب ضعیف است.

نمونه های زیادی از جواب‌های ضعیف که جواب‌های معمولی نیستند، قبلا در موقعیت های مقدماتی مانند مطالعه معادله موج یک بعدی دیده شده اند. در اینجا $L(u) = \left(\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\right) - \left(\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}\right)$ بنابراین فضای زمینه، $\mathbb{R}^۲ = \{(x_۱, x_۲) : x_۱ = x, x_۲ = t\}$ است. فرض کنید برای مثال، حالت «رشته پلانک» را در نظر بگیریم. پس به وضوح جواب $L(u) = ۰$ با شرایط مرزی $u(x,۰) = f(x)$ و برای $۰ \leq x \leq \pi$، $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(x,۰) = ۰$، را در اختیار داریم، که در آن نمودار f قطعه قطعه خطی است و در تصویر ۲.۵ نشان داده شده است.



شکل ۲.۵: موقعیت اولیه رشته پلانک

اگر f را به‌صورت یک تابع فرد روی $[-\pi, \pi]$ و سپس به وسیله

تناوب (با دوره‌ی ۲π) به کل $\mathbb{R}$ گسترش دهیم، آنگاه جواب به وسیله فرمول دالامبر ارائه می‌شود.

$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{۲}.$$

در این حالت u دو بار مشتق‌پذیر پیوسته نیست و بنابراین یک جواب معمولی نیست. با این وجود، یک جواب ضعیف است. برای مشاهده این امر، f را با دنباله‌ای از توابع f_n که C^∞ هستند تقریب می‌زنیم که به‌طور یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}$، $f_n \to f$.[۱] اگر $u_n(x,t)$ را به صورت $[f_n(x+t)+f_n(x-t)]/۲$ تعریف کنیم، به‌طور مستقیم می‌توان بررسی کرد که $L(u_n) = ۰$ و بنابراین برای هر $\varphi \in C_۰^\infty(\mathbb{R}^۲)$، $(u_n, L^*\varphi) = ۰$، و بنابراین بنابر همگرایی یکنواخت همان طور که انتظار داشتیم به‌دست می‌آوریم $(u, L^*\varphi) = ۰$.

یک مثال متفاوت برای به دست آوردن ماهیت جواب‌های ضعیف برای عملگر $L = \frac{d}{dx}$ روی $\mathbb{R}$ به این صورت است. اگر فرض کنیم، $\Omega = (۰,۱)$ آنگاه با u و f در $L^۲(\Omega)$، در حالت ضعیف داریم

۱. می‌توان نوشت، برای مثال، $f_n = f * \varphi_{\frac{1}{n}}$، که $\{\varphi_\varepsilon\}$ همانند برهان لم ۲.۵ تقریبی برای همانی است.

$Lu = f$، اگر و فقط اگر یک تابع پیوسته مطلق F روی $[0,1]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که تقریبا همه‌جا $F(x) = u(x)$ و $F'(x) = f(x)$. در این مورد، تمرین ۱۴ را ببینید.

قضیه اصلی و تقریب کلیدی

اکنون به قضیه عمومی برمی‌گردیم که وجود جواب‌های معادلات دیفرانسیل جزئی را با ضرایب ثابت تضمین می‌کنند.

قضیه ۸.۵. فرض کنید Ω یک زیرمجموعهٔ باز کراندار $\mathbb{R}^d$ باشد. برای عملگر دیفرانسیل جزیی خطی L با ضرایب ثابت داده شده، یک عملگر خطی کراندار K روی $L^2(\Omega)$ وجود دارد، به‌طوری‌که هرگاه $f \in L^2(\Omega)$، آنگاه در حالت ضعیف

$$L(Kf) = f,$$

به عبارت دیگر، $u = K(f)$ یک جواب ضعیف برای $L(u) = f$ است.

اصل مطلب در نامعادله‌ای قرار دارد که در ادامه بیان می کنیم، اما برهان را(که تبدیل فوریه را به کار می‌برد) تا قسمت بعد به تعویق می‌اندازیم.

لم ۹.۵. اگر $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$، آنگاه ثابت c وجود دارد به‌طوری که

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

مزیت این لم به این دلیل است که: اگر L یک تبدیل خطی متناهی بعد باشد، حل پذیر بودن L (این حقیقت که پوشا است) با این حقیقت که الحاق آن L^* یک به یک است، هم ارز است. در حقیقت، لم جایگزین تحلیلی این امر را در یک حالت نامتناهی بعد فراهم می‌کند. ابتدا با مفروضات درستی نامساوی موجود در لم را ثابت می کنیم.

فضای پیش هیلبرت $\mathcal{H}_\circ = C_\circ^\infty(\Omega)$ مجهز به ضرب داخلی و نرم زیر را در نظر بگیرید،

$$< \varphi, \psi >= (L^*\varphi, L^*\psi), \qquad \|\psi\|_\circ^\text{۲} = \|L^*\psi\|_{L^\text{۲}(\Omega)}.$$

با پیگیری نتایج به‌دست آمده در قسمت ۴.۴ از فصل ۴، فرض کنیم $\mathcal{H}$، کامل سازی $\mathcal{H}_\circ$ را مشخص کند. با توجه به لم ۹.۵ یک دنباله کشی با نرم $\|\cdot\|_\circ$ ، در نرم $L^\text{۲}(\Omega)$ نیز کشی است. بنابراین می توانیم $\mathcal{H}$ را با زیر فضایی از $L^\text{۲}(\Omega)$ یکسان در نظر بگیریم. نشان می‌دهیم همچنین عملگر کراندار L^* از $\mathcal{H}$ به یک عملگر کراندار L^* از $\mathcal{H}$ به $L^\text{۲}(\Omega)$ (بنابر لم ۳.۵) گسترش می یابد. به ازای یک تابع ثابت $f \in L^\text{۲}(\Omega)$، نگاشت خطی $\ell_\circ : C_\circ^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$، را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$\ell_\circ(\psi) = (\psi, f), \qquad \psi \in C_\circ^\infty(\Omega).$$

نامساوی کوشی-شوارتس همراه با کاربرد دیگر از لم ۹.۵ به

$$\begin{aligned}|\ell_\circ(\psi)| = |(\psi, f)| &\le \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le c\|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le c'\|\psi\|_\circ,\end{aligned}$$

با $c' = c\|f\|_{L^2(\Omega)}$ منجر می‌شود. بنابراین $\ell_\circ$ روی فضای پیش هیلبرت $\mathcal{H}_\circ$ کراندار است. بنابراین ℓ به تابع خطی کراندار روی $\mathcal{H}$ توسعه می یابد (تمرین ۵۱، فصل ۴ را ببینید). نامساوی‌های بالا نشان می‌دهد که $\|\ell\| \le c\|f\|_{L^2(\Omega)}$. با توجه به قضیه نمایش ریس که برای ℓ روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به کار برده می‌شود (قضیه ۵,۳ فصل ۴)، $U \in \mathcal{H}$ وجود دارد، به طوری که

$$l(\psi) =< \psi, U >= (L^*\psi \cdot L^*U) \qquad \text{به ازای هر}\ \psi \in C_\circ^\infty(\Omega)$$

در اینجا $< \cdot,\cdot >$ توسیع یک ضرب داخلی اولیه روی $\mathcal{H}_\circ$ به $\mathcal{H}$ است و L^* نیز توسیع L^* را که در ابتدا روی $\mathcal{H}_\circ$ داده می شود، مشخص می‌کند.

اگر قرار دهیم $u = L^*U$، آنگاه $u \in L^2(\Omega)$ و درمی‌یابیم

$$l(\psi) = (\psi, f) = (L^*\psi, u), \qquad \text{به ازای هر}\ \psi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^d)$$

بنابراین

$$(f, \psi) = (u, L^*\psi) \qquad \text{به ازای هر}\ \psi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^d)$$

، طبق تعریف، u یک جواب ضعیف برای معادله $Lu = f$ در Ω است. اگر قرار دهیم $Kf = u$، می‌بینیم زمانی که f داده شده باشد، Kf به‌طور منحصربفرد توسط مراحل بالا تعیین می‌شود. از آنجایی که $\|U\|_{\circ} = \|\ell\| \leq c\|f\|_{L^{2}(\Omega)}$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\|Kf\|_{L^{2}(\Omega)} = \|u\|_{L^{2}(\Omega)} = \|L^{*}U\|_{L^{2}(\Omega)} = \|U\|_{\circ} \leq c\|f\|_{L^{2}(\Omega)},$$

بنابر این $K : L^{2}(\Omega) \to L^{2}(\Omega)$ کراندار است.

۱.۰.۳.۵ برهان تقریب اصلی

برای تکمیل برهان قضیه، هنوز باید تقریب لم ۹.۵ را ثابت کنیم، که عبارت است از

$$\|\psi\|_{L^{2}(\Omega)} \leq c\|L^{*}\psi\|_{L^{2}(\Omega)}, \qquad \psi \in C_{\circ}^{\infty}(\Omega).$$

استدلال زیر بر یک حکم اساسی استوار است: اگر f در $\mathbb{R}$ تکیه‌گاه فشرده داشته باشد، آنگاه $\hat{f}(\xi)$ که ابتدا برای $\xi \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود، به یک تابع تام برای $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ توسیع می‌یابد. با این ملاحظات مسأله ، به یک نامعادله در مورد توابع تحلیلی و چندجمله‌ای تقلیل می‌یابد.

لم ۱۰.۵. فرض کنید $P(z) = z^m + ... + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجه m با اولین ضریب یک باشد. اگر F یک تابع تحلیلی روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه

$$|F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}).F(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

برهان. زمانی که $P = 1$، لم نتیجه‌ای از یک حالت خاص است.

$$|F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta. \tag{۱۶.۵}$$

این عبارت به‌طور مستقیم از تساوی (۸.۵) در بخش ۲.۵ برای $\zeta = 0$ و $r = 1$ با استفاده از نامساوی کشی-شوارتس به دست می‌آید. بنابراین با تجزیه P شروع می‌کنیم:

$$P(z) = \prod_{|\alpha| \geq 1} (z - \alpha) \prod_{|\beta| < 1} (z - \beta) = P_1(z) P_2(z).$$

که در آن هر ضرب متناهی است و روی ریشه‌های P که به ترتیب قدر مطلق نا بیشتر از یک و بیشتر از یک دارند، گرفته می شود. توجه کنید

$$|P_1(0)| = \prod_{|\alpha| \geq 1} |\alpha| \geq 1$$

برای P_2 می‌نویسیم

$$(z - \beta) = -(1 - \bar{\beta} z) \psi_\beta(z),$$

که در آن $\psi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \beta z}$، « عوامل بلاشکه» [1] هستند، با این خاصیت طبیعی که در یک ناحیه مشمول در گوی یکه بسته، تحلیلی هستند و $\left|\psi_\beta(e^{i\theta})\right| = 1$، همچنین فصل ۸ را در جلد ۲ ببینید. می‌نویسیم $\tilde{P}_2 = \prod_{|\beta|<1}(1-\bar{\beta}z)$ و $\tilde{P} = P_1\tilde{P}_2$ بنابراین $|\tilde{P}(0)| \geq 1$، درحالی که به ازای هر θ، $|\tilde{P}(e^{i\theta})| = |P(e^{i\theta})|$. اکنون ۱۶.۵ را برا ی تابع $\tilde{P}F$ به‌جای F به کار می‌بریم و در می‌یابیم که

$$|F(0)|^2 \leq |\tilde{P}(0)F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{P}(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

که نتیجه مورد نظر را به دست می دهد.

به برهان نامساوی $\|\psi\| \leq c\|L^*\psi\|$ به ازای هر $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ درحالت خاص یک بعدی بر $\Omega \subset \mathbb{R}$ می گردیم.

فرض کنید f یک تابع در L^2 با تکیه‌گاه بازه $[-M, M]$ باشد. در این صورت

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-M}^{M} f(x)e^{-2\pi i\xi}dx,$$

هرگاه $\xi \in \mathbb{R}$. در حقیقت، انتگرال بالایی همگراست هرگاه ξ با

---

۱. $Blaschke factors$

$\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ جایگزین شود و می‌توانیم $\hat{f}$ را به یک تابع تحلیلی از ζ بر تمام صفحه مختلط توسیع دهیم. به‌عنوان کاربردی از قضیه پلانشرل (به ازای η ثابت) داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + i\eta)|^۲ d\xi \leq e^{۴\pi M|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^۲ dx.$$

این نکته را در متن زیر به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم (پس از ضرب کردن L در یک مقدار ثابت مناسب)

$$L^* = \sum_{\circ \leq k \leq n} (-۱)^k \overline{a_k} (\frac{\partial}{\partial x})^k$$

که در آن $a_n = (۲\pi i)^{-n}$. اگر فرض کنیم $Q(\xi) = \sum_{\circ \leq k \leq n} (-۱)^k \overline{a_k} (۲\pi i\xi)^۲$ چند جمله‌ای مشخصه آن باشد، آنگاه ملاحظه می‌کنیم که

$$\widehat{L^*\psi}(\xi) = Q(\xi)\hat{\psi}(\xi), \qquad \psi \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}).$$

اگر M به قدری بزرگ انتخاب شود که $\Omega \subset [-M, M]$، آنگاه نکته قبل، فرمول زیر را به دست می‌دهد

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi + i\eta)\hat{\psi}(\xi + i\eta)|^۲ d\xi \leq e^{۴\pi M|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} |L^*\psi(x)|^۲ dx, \qquad (۱۷.۵)$$

با قرار دادن $\eta = i\sin\theta$ و انجام یک انتقال به‌وسیله $\cos\theta$، رابطه به نامساوی زیر منجر می شود

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi + \cos\theta + i\sin\theta)\hat{\psi}(\xi + \cos\theta + i\sin\theta)|^۲ d\xi \leq$$

$$\leq e^{۴\pi M}\int_{-\infty}^{\infty}|L^*\psi(x)|^۲ dx.$$

با به کار گیری لم ۱۰.۵ برای $F(z)=\hat{\psi}(\xi+z)$ و $Q(\xi+z)$ به جای $P(z)$ داریم

$$|\hat{\psi}(\xi)|^۲ \leq \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}|Q(\xi+\cos\theta+i\sin\theta)\hat{\psi}(\xi+\cos\theta+i\sin\theta)|^۲ d\theta.$$

اکنون نسبت به ξ روی $\mathbb{R}$ انتگرال می‌گیریم، و در طرف راست انتگرال گیری، ξ و θ را جابجا می‌کنیم، همچنین با استفاده از تحت انتقال پایایی، انتگرال‌گیری نسبت به متغیر ξ را با متغیر $\xi+\cos\theta$ جایگزین می‌کنیم. با به‌کاربردن ۱۷.۵ داریم

$$\begin{aligned}||\hat{\psi}||^۲_{L^۲(\mathbb{R})} &\leq \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\int_{\mathbb{R}}|Q(\xi+\cos\theta+i\sin\theta)\hat{\psi}(\xi+\cos\theta+i\sin\theta)|^۲ d\xi d\theta\\ &\leq e^{۴\pi M}\int_{\mathbb{R}}|L^*\psi(x)|^۲ dx,\end{aligned}$$

که بااستفاده از اتحاد پلانشرل لم مهمی را در حالت یک بعدی ثابت می‌کند.

حالات با ابعاد بالاتر، اشکال اصلاح شده بحث بالا هستند. فرض کنید

$$Q=\sum_{|\alpha|\leq u}(-۱)^{\alpha}a_{\alpha}(۲\pi i\xi)^{\alpha}$$

چندجمله‌ای مشخصه L^* باشد، در این صورت می‌توانیم یک مجموعه جدید از محورهای متعامد (که مختصات آن را به‌وسیله $(\xi_1, ..., \xi_d)$ مشخص می‌کنیم) انتخاب کنیم، به‌طوری که اگر $\xi = (\xi, \xi')$ و

$$\xi' = (\xi_2, ..., \xi_d)$$

آنگاه بعد از ضرب کردن به‌وسیله یک عدد ثابت مناسب داریم:

$$Q(\xi) = (2\pi i)^{-n}\xi_1^n + \sum_{j=0}^{n-1} \xi_1^j q_j(\xi'), \qquad (18.5)$$

که در آن $q_j(\xi')$ چندجمله‌ای‌هایی از ξ' (از درجه‌های نا کمتر از $n-j$) هستند.

برای این‌که ببینیم چنین انتخابی محتمل است، بنویسید

$$Q = Q_n + Q'$$

، که در آن Q_n همگن از در جه n است و Q' درجه‌ی کمتر از n دارد. بنابراین از آنجایی که $Q_n \neq 0$ ، (بعد از ضرب کردن Q در یک ثابت مناسب) یک بردار واحد γ وجود دارد، به طوری که $Q_n(\gamma) = (2\pi i)^n$. بنابراین $Q_n(\xi) = (2\pi i)^{-n} r^n$ هرگاه $\xi = \gamma r$، $r \in \mathbb{R}$. می‌توانیم محور ξ_1 را در راستای γ و محورهای $\xi_1, ..., \xi_d$ را طوری بگیریم تا دو به دو متعامد باشند، که این مطلب از (۱۸.۵) واضح است.

اکنون با فرایندی که قبلا به‌دست آوردیم برای هر $(\xi_1,\xi')\in\mathbb{R}^d$

$$|\hat{\psi}(\xi_1,\xi')|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Q(\xi_1+e^{i\theta},\xi')\hat{\psi}(\xi_1+e^{i\theta},\xi')|^2 d\theta,$$

سپس با انتگرال‌گیری داریم [1]

$$||\hat{\psi}||^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}|Q(\xi_1+e^{i\theta},\xi')\hat{\psi}(\xi_1+e^{i\theta},\xi')|^2 d\xi d\theta.$$

اگر فرض کنیم که تصویر مجموعه (کراندار) Ω روی محور x_1 مشمول در $[-M,M]$ می‌شود، مثل قبل می‌بینیم که طرف راست بالا به وسیله $e^{4\pi M}\int_{\mathbb{R}^d}|L^*\psi(x)|^2dx$، کنترل می‌شود. □

۴.۵ اصل دیریکله

اصل دیریکله در بررسی مسأله مقدار مرزی برای معادله لاپلاس به وجود آمد. بیان حالت دو بعدی آن به مسائل کلاسیک یافتن دمای حالت تعادل یک ظرف برمی‌گردد، که فرض شده است مرز آن دارای

۱. توجه می‌کنیم با توجه به پایایی انتگرال لبگ نسبت به دوران (مسأله ۴ در فصل ۲ و تمرین ۲۶ در فصل ۳)، انتگرال‌گیری نسبت به ξ می‌تواند در مختصات جدید انجام شود.

یک توزیع دمای مشخص است. این موضوع برخواسته از پرسش زیر است که **مسأله دیریکله** [1] نامیده می‌شود: اگر Ω یک مجموعه باز کراندار در $\mathbb{R}^{۲}$ باشد و f یک تابع پیوسته روی قسمت مرزی $\partial\Omega$ باشد، مایلیم تا یک تابع $u(x_{۱}, x_{۲})$ را بیابیم به‌طوری‌که

$$\begin{cases} \Delta u = \circ & \text{روی } \Omega \\ u = f & \text{روی } \partial\Omega \end{cases} \qquad (۱۹.۵)$$

بنابراین نیازمندیم تا تابعی تعیین کنیم که روی Ω، $C^{۲}$ باشد (مشتق دوم هم پیوسته باشد)، روی Ω دارای لاپلاس [2] صفر و روی بستار Ω پیوسته باشد و $u|_{\partial\Omega} = f$.

در حالتی که Ω یا f که در شرایط متقارن خاصی صدق کنند، جواب این مسأله گاهی می‌تواند به‌طور صریح نوشته شود. به‌عنوان مثال اگر Ω گوی یکه باشد، آنگاه

$$u(re^{i\theta}) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\mathcal{P}_r(\theta - \varphi)d\varphi,$$

که در آن $\mathcal{P}_r$ هسته پواسون (برای گوی) است. همچنین (در جلد ۱ و ۲) فرمول‌های صریحی برای حل مسأله دیریکله برای دامنه‌های

1. Dirichlet
2. Laplacian

غیرکراندار به‌دست آوردیم. برای مثال، زمانی که Ω نیم صفحه بالایی باشد، جواب مسأله به صورت زیر است

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_y(x-t) f(t) dt,$$

که در آن $\mathcal{P}_y(x)$ هسته پواسون مشابه برای نیم صفحه بالایی است. فرمول پیچش مشابهی برای زمانی‌که Ω یک نوار است، به‌دست آمد. همچنین مسأله دیریکله می‌تواند به‌طور صریح برای Ω مشخص، با به کار بردن نگاشت‌های همدیس حل شود [۱].

در حالت کلی، هیچ جواب صریحی وجود ندارد و روش‌های دیگری باید یافت شود. هرچند ایده‌ای که در آغاز استفاده شد، بر اساس ایده ابزارهای گسترده در ریاضیات و فیزیک بود: برای یافتن حالت تعادل سیستم، درجستجوی مینیمم کردن «انرژی» یا «عملگر» مناسب هستیم.

در حال حاضر، نقش این انرژی به وسیله **انتگرال دیریکله**

۱. رابطه‌ی نزدیکی بین نگاشت‌های همدیس و مسأله دیریکله در قسمت قبل از بخش ۱ فصل ۸ در جلد ۲ بحث شد

نمایش داده می‌شود، که برای توابع مناسب U به صورت

$$\mathcal{D}(U) = \int_\Omega |\nabla U|^۲ = \int_\Omega \left|\frac{\partial U}{\partial x_۱}\right|^۲ + \left|\frac{\partial U}{\partial x_۲}\right|^۲ dx_۱ dx_۲,$$

تعریف می‌شود.
(به شباهت آن با اصطلاح «انرژی پتانسیل» درحالت تار مرتعش در فصل ۳و ۶ از جلد ۱ توجه کنید.) در حقیقت، این رویکرد برهانی را که ریمان[۱] برای قضیه نگاشت معروف خود ارائه کرد در برمی‌گیرد . در این مورد، کورانت[۲] نوشته است:
سال‌ها پیش از ظهور استعداد ریمان، گاوس[۳] و تامسون ملاحظه کردند که مسأله مقدار مرزی معادله دیفرانسیل همساز

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = ۰$$

برای یک دامنه G در صفحه x و y می‌تواند، ، تحت این شرایط که توابع نامزد شده ϕ برای شرایط مقدار مرزی مشخص شده را دارند، به مسأله مینیمم کردن انتگرال $\mathcal{D}[\phi]$ برای دامنه G، کاهش یابد. به دلیل مشخصه‌ی مثبت $\mathcal{D}[\phi]$ وجود یک راه‌حل برای مسأله

1. Reimann
2. Korant
3. Gauss

اخیر بدیهی درنظر گرفته شد و بنابراین وجود آن برای مسأله بعدی تضمین شد. به‌عنوان یک دانشجو در سخنرانی‌های دیریکله، ریمان مجذوب این استدلال قانع کننده شده بود: بلافاصله پس از آن، آن را تحت عنوان اصل دیریکله، در حالتی متفاوت‌تر و خاص‌تر، به‌عنوان اساس اولیه‌ی نظریه هندسی جدیدش، به کار برد.

کاربرد اصل دیریکله با نکته ساده زیر توجیه می‌شود:

قضیه ۱۱.۵. فرض کنید تابع $u \in C^{۲}(\bar{\Omega})$ وجود دارد، به‌طوری که $\mathcal{D}(U)$ از میان هر $U \in C^{۲}(\bar{\Omega})$ با شرط $U|_{\partial\Omega} = f$ مینیمم می‌شود. در این صورت u روی Ω همساز است.

برهان. برای توابع F و G در $C^{۲}(\overline{\Omega})$ ضرب داخلی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$< F, G >= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{۱}} \frac{\overline{\partial G}}{\partial x_{۱}} + \frac{\partial F}{\partial x_{۲}} \frac{\overline{\partial G}}{\partial x_{۲}} \right) dx_{۱} dx_{۲},$$

اکنون توجه می‌کنیم $\mathcal{D}(u) =< u, u >$. اگر v تابعی در $C^{۲}(\overline{\Omega})$ با شرط $\nu|_{\partial\Omega} = ۰$، باشد، آنگاه به ازای هر ϵ داریم

$$\mathcal{D}(u + \epsilon\nu) \geq \mathcal{D}(u),$$

زیرا $u + \epsilon v$ و u مقادیر مرزی یکسانی دارند، و u انتگرال دیریکله را

مینیمم می‌کند. با این وجود توجه می‌کنیم که

$$\mathcal{D}(u+\epsilon v)=\mathcal{D}(u)+\epsilon^{۲}\mathcal{D}(v)+\epsilon<u,v>+\epsilon<v,u>.$$

بنابراین

$$\epsilon^{۲}\mathcal{D}(v)+\epsilon<u,v>+\epsilon<v,u>\geq ۰,$$

و از آنجایی که ϵ می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد، این تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $Re<u,v>=۰$. به‌طور مشابه، با در نظرگرفتن آشفتگی در $u+i\epsilon v$، در می‌یابیم $Im<u,v>=۰$، و بنابراین $<u,\nu>=۰$. سپس با یک انتگرال‌گیری جز به جز،

$$۰=<u,\nu>=-\int_{\Omega}(\Delta u)\bar{\nu},$$

برای هر $v\in C^{۲}(\overline{\Omega})$ با شرط $\nu|_{\partial\Omega}=۰$ فراهم می‌شود. این به این معنی است که $\Delta u=۰$ روی Ω و البته u با f روی مرز یکسان است. $\square$

با وجود این، چندین ایراد جدی به اصل دیریکله وارد شده است. اولین آن ها به وسیله وایرشتراس مطرح شد، که بر این موضوع اشاره داشت که واضح نیست (و ثابت نشده بود) که تابعی مینیمم کننده برای انتگرال دیریکله وجود دارد. بنابراین به وضوح هیچ برنده‌ای برای مسابقه قضیه ۱۱.۵ وجود نداشت. او این بحث را در مقایسه با یک مسأله یک بعدی مطرح کرد:

مینیمم کردن انتگرال

$$\mathcal{D}(\varphi) = \int_{-1}^{1} |x\varphi(x)|^2 dx,$$

در میان همه توابع C^1 روی $[-1,1]$ که در شرط های $\varphi(-1) = -1$ و $\varphi(1) = 1$ صدق می کنند. مقدار مینیمم این انتگرال صفر به‌دست می‌آید. برای تأیید این امر، فرض کنید φ یک تابع هموار غیرنزولی روی $\mathbb{R}$ باشد که برای $x \geq 1$، $\psi(x) = 1$ و اگر $x \leq -1$، $\psi(x) = -1$. به ازای هر $0 < \epsilon < 1$، تابع زیر را درنظرمی‌گیریم

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \ \epsilon \leq x \\ \psi(x/\epsilon) & \text{اگر} \ -\epsilon < x < \epsilon, \\ -1 & \text{اگر} \ x \leq -\epsilon \end{cases}$$

در این صورت φ_ϵ شرط‌های مورد انتظار را صدق می کنند، و اگر M یک کران برای مشتق ψ مشخص کند، درمی‌یابیم

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varphi_\epsilon) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |x|^2 \epsilon^{-1} |\psi'(x/\epsilon)| dx \\ &\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |\psi'(x/\epsilon)|^2 dx \\ &\leq 2\epsilon M^2. \end{aligned}$$

درحد، زمانی‌که ϵ به صفر میل می‌کند، درمی‌یابیم که مقدار مینیمم انتگرال $\mathcal{D}(\varphi)$ صفر است. این مقدار مینیمم نمی‌تواند به وسیله یک

تابع $C^۱$ با شرایط مرزی مورد انتظار نائل شود. زیرا $\mathcal{D}(\varphi) = ۰$ به این معنی است که $\varphi'(x) = ۰$ و بنابراین φ ثابت است.

ایراد بعدی به‌وسیله هادامارد[1] مطرح شد که اذعان داشت حتی برای یک جواب u از مسأله مقدار مرزی، $\mathcal{D}(u)$ ممکن است نامتناهی شود: بنابراین تحت تأثیر این مطلب هیچ رقیبی که واجد صلاحیت برای رقابت باشد، وجود ندارد!

برای نشان دادن این مهم، به دیسک برمی‌گردیم، و تابع

$$f(\theta) = f_\alpha(\theta) = \sum_{n=۰}^{\infty} ۲^{-n\alpha} e^{i۲^n\theta},$$

را به ازای $\alpha > ۰$ درنظر می‌گیریم. این تابع ابتدا در فصل ۴ جلد ۱ ظاهر شد، که در آنجا نشان داده شد f_α پیوسته است، اما برای $\alpha \leq ۱$ هیچ‌گاه مشتق‌پذیر نیست. جواب مسأله دیریکله روی دیسک واحد با مقدار مرزی f_α به‌وسیله انتگرال پواسون ارائه می‌شود

$$u(r, \theta) = \sum_{n=۰}^{\infty} r^{۲^n} ۲^{-n\alpha} e^{i۲^n\theta}.$$

1. Hadamard

با وجود این، به کار بردن مختصات قطبی نتیجه می‌دهد

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2+\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2.$$

بنابراین

$$\int\int_{D\rho}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right)dx_1dx_2=$$
$$\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2+\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2\right)d\theta r dr,$$

که در آن D_ρ دیسکی با شعاع $0<\rho<1$ به مرکز مبدا است. از آنجایی که

$$\frac{\partial u}{\partial r}\sim\sum 2^n 2^{-n\alpha} r^{2^n-1}e^{i2^n\theta}$$ و $$\frac{\partial u}{\partial \theta}\sim\sum r^{2^n}2^{-n\alpha}i2^n e^{i2^n\theta}.$$

کاربردهای اتحاد پارسوال منجر می‌شود به

$$\int\int_{D\rho}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2\right)dx_1dx_2$$
$$\approx\int_0^\rho\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n+1}2^{-2n\alpha}r^{2^{n+1}-1}dr$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2^{n+1}}2^n 2^{-2n\alpha},$$

که زمانی که $\rho \to 1$ اگر $\alpha \leq \frac{1}{2}$ به بینهایت میل می‌کند.
می‌توان این موضوع را با یک روش دقیق تر با به کاربردن نتیجه تمرین ۲ فرمول بندی کرد.
با وجود این مشکلات اساسی، اگر اصل دیریکله به روش مناسبی به کار گرفته شود، در واقع می‌تواند معتبر باشد. یک دیدگاه کلیدی این است که فضای توابع رقیب که از برهان قضیهٔ فوق به دست می‌آیند خودش یک فضای پیش هیلبرت است، که با ضرب داخلی $\langle \cdot,\cdot \rangle$ مشخص شده است. جواب مورد انتظار در کامل سازی این فضای پیش هیلبرت قرار می‌گیرد و این بحث به نظریه L^2 برای تحلیل آن نیاز دارد. واضح است که این ایده‌ها در زمانی که اولین بار اصل دیریکله فرمول‌بندی و استفاده شد، در دسترس نبودند.

در آنچه که در ادامه می‌آید، توصیف می‌کنیم که چطور این مفاهیم اضافی می‌تواند به کار برده شود. ما سخن را با مفاهیم d بعدی کلی‌تری شروع می‌کنیم، اما با به کاربردن این تکنیک‌ها، جواب مسأله دوبعدی ۱۹.۵ را به دست می آوریم. به‌عنوان یک موضوع مقدماتی مهم، با مطالعه خواص اولیه توابع همساز شروع می کنیم.

توابع همساز

در سراسر این بخش Ω یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^d$ را مشخص می‌کند. تابع u در Ω همساز نامیده می شود، هرگاه مشتق دوم پیوسته [۱] داشته باشد و u در شرط

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

صدق کند. خواهیم دید که توابع همساز با تعدادی از خواص معادل مشخص می‌شوند. [۲] با انطباق اصطلاحات به کار رفته در بخش ۳، می‌گوییم که u روی Ω **به‌طور ضعیف همساز** است، هرگاه

$$(u, \Delta\psi) = 0 \qquad \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{۲۰.۵}$$

توجه کنید که طرف چپ ۲۰.۵ به ازای هر u خوش تعریف است، به این معنا که روی زیرمجموعه‌های فشرده Ω انتگرالپذیر است. بنابراین به خصوص لازم است، یک تابع همساز ضعیف تنها تقریبا همه‌جا تعریف شود. در این صورت، هر تابع همساز، همساز ضعیف

۱. به عبارت دیگر با نمادهای بخش ۳.۵، u در $C^2(\Omega)$ است
۲. توجه کنید، که در حالت یک بعدی، توابع همساز خطی هستند و بنابراین نظریه آن‌ها بسیار بدیهی است.

است. نکته بعدی، **خاصیت مقدار میانگین** است که تساوی ۹.۵ در بخش (۲) را برای توابع تحلیلی تعمیم می بخشد. تابع پیوسته u روی Ω این خاصیت را برقرار می‌کند، هرگاه، برای هر گوی B که مرکز آن $x_\circ$ و بستار آن $\bar{B}$ مشمول در Ω است

$$u(x_\circ) = \frac{1}{m(B)} \int_B u(x)dx. \tag{۲۱.۵}$$

دو قضیه زیر راه های شناسایی دیگری ازتوابع همساز هستند. برهان‌های آن بسیار در هم آمیخته‌اند.

قضیه ۱۲.۵. اگر u در Ω همساز باشد، آنگاه u در خاصیت مقدار میانگین ۲۱.۵ صدق کند. برعکس تابع پیوسته‌ای که خاصیت مقدار میانگین را برقرار می‌کند، همساز است.

قضیه ۱۳.۵ . هر تابع همساز ضعیف u روی Ω می‌تواند روی مجموعه ای با اندازه صفر تصحیح شود به‌طوری‌که تابع حاصل روی Ω همساز باشد.

عبارت فوق بیان می‌کند که برای تابع همساز ضعیف ارائه شده u، تابع همساز $\tilde{u}$ وجود دارد، به‌طوری‌که تقریبا به ازای هر $x \in \Omega$، $\tilde{u}(x) = u(x)$. توجه کنید از آنجایی که $\tilde{u}$ ضرورتا پیوسته است، به‌طور

منحصربفرد توسط u تعیین می‌شود.
پیش از آن‌که قضیه‌ها را اثبات کنیم، به نتیجه قابل ملاحظه ای توجه می‌کنیم که برداشتی از اصل ماکزیمم است.

نتیجه ۱۴.۵. فرض کنید Ω یک مجموعه باز کراندار باشد، و

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$$

مرز آن را مشخص کند. فرض کنید که u روی $\overline{\Omega}$ پیوسته و روی Ω همساز باشد. در این صورت

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x\in\partial\Omega} |u(x)|.$$

برهان. از آنجایی که مجموعه‌های $\overline{\Omega}$ و $\partial\Omega$ فشرده هستند و u پیوسته است، دو ماکزیمم بالا به سادگی اخذ می شوند. فرض می‌کنیم که $\max_{x\in\Omega}|u(x)|$ در یک نقطه درونی $x_\circ \in \Omega$ اخذ شود، در غیر این صورت چیزی برای اثبات وجود ندارد.
اکنون با توجه به خاصیت مقدار میانگین $|u(x_\circ)| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |u(x)|dx.$
اگر برای هر نقطه $x' \in B$ داشته باشیم $|u(x')| < |u(x_\circ)|$، آنگاه نامساوی مشابهی در همسایگی کوچک x' برقرار است. پس از آنجایی که در سراسر B،

$$|u(x)| \leq |u(x_\circ)|$$

باید داشته باشیم $\frac{1}{m(B)}\int_B |u(x)|dx < |u(x_\circ)|$، که این یک تناقض است. بنابراین به ازای هر $x \in B$، $|u(x)| = |u(x_\circ)|$. اکنون این موضوع برای هرگوی B_r به شعاع r به مرکز $x_\circ$ به‌طوری‌که $B_r \subset \Omega$ درست است. فرض کنید $r_\circ$ کوچکترین کران بالایی از r باشد، آنگاه $\overline{B_{r_\circ}}$ با مرز Ω در نقطه $\tilde{x}$ اشتراک دارد. از آنجایی که به ازای هر $x \in \overline{B_r}$ و $r < r_\circ$، $|u(x)| = |u(x_\circ)|$. با توجه به پیوستگی داریم $|u(\tilde{x})| = |u(x_\circ)|$. □

به برهان قضیه‌ها برمی‌گردیم، ابتدا صورتی از فرمول گرین (برای گوی یکه) را ثابت می‌کنیم که به‌طور صریح با مباحث مرزی درگیر نمی شود [1] در اینجا، u، v و η توابع دوبار مشتقپذیر روی یک همسایگی از بستار B فرض می‌شوند، اما η با تکیه‌گاهی روی یک زیرمجموعهٔ فشرده B فرض می‌شود.

لم ۱۵.۵. اتحاد زیر را داریم

$$\int_B (v\Delta u - u\Delta v)\eta dx = \int_B u(\nabla v.\nabla \eta) - v(\nabla u - \nabla \eta)dx,$$

و لذا ∇u **گرادیان** u است، به این معنا که $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d})$

۱. صورت معمولی‌تر آن به انتگرال‌گیری روی کره (مرزی) نیاز دارد که در فصل بعد می‌آید. تمرین های ۶ و ۷ آن فصل را نیز ببینید.

و

$$\nabla v \cdot \nabla \eta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_j},$$

و $\nabla u \cdot \nabla \eta$ به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.
در حقیقت با انتگرال‌گیری جزء به جزء همانند برهان ۱۴.۵ داریم

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_j} v\eta dx = -\int_B u \frac{\partial v}{\partial x_j} \eta dx - \int_B uv \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx.$$

سپس با جایگزینی u با $\partial u/\partial x_j$ همین کار را تکرار می‌کنیم، و روی j مجموع می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$\int_B (\Delta u) v\eta dx = -\int_B (\nabla u \cdot \nabla v)\eta dx - \int_B (\nabla u \cdot \nabla \eta) v dx.$$

اگر از این رابطه فرمول متقارن مشابهی که در آن جای u و v عوض شده را کم کنیم، لم حاصل می شود.
لم را در حالتی که u تابع همساز داده شده و u یکی از سه تابع «آزمون» زیر باشد، به کار می بریم: اول، $v(x) = 1$، دوم $v(x) = |x|^2$، سوم $v(x) = |x|^{-d+2}$ اگر $d \geq 3$ و در صورتی که $d = 2$، $v(x) = \log |x|$.
ارتباطی بین این انتخاب‌ها وجود دارد. زیرا در حالت اول $\Delta v = 0$، درحالی‌که در حالت دوم Δv ناصفر است، همچنین v در حالت سوم

یک مضرب ثابت از یک «جواب اساسی» است و به خصوص $v(x)$ برای $x \neq ۰$ همساز است.

زمانی که $v(x) = ۱$، قرار می‌دهیم $\eta = \eta_\epsilon^+$، در حالی که برای

$$|x| \leq ۱ - \epsilon$$

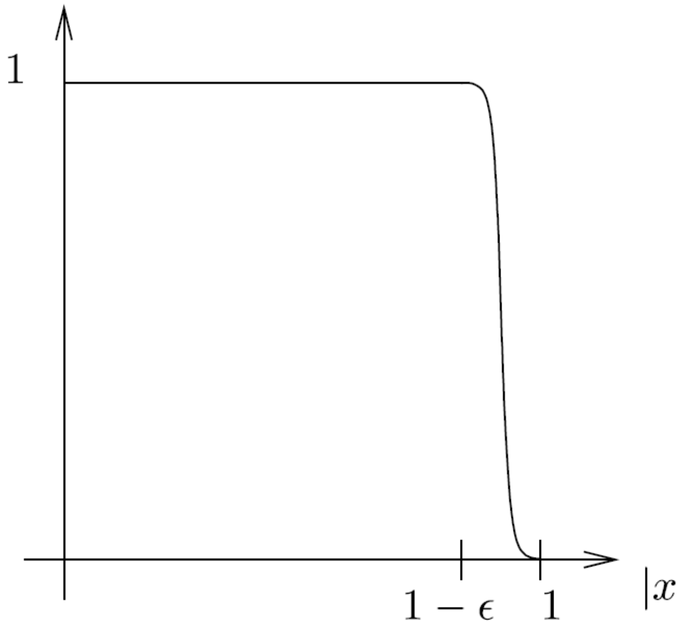
، $\eta_\epsilon^+(x) = ۱$ و برای $|x| \geq ۱$، $\eta_\epsilon^+(x) = ۰$، و $|\nabla \eta_\epsilon^+(x)| \leq c/\epsilon$. این مطلب را با قراردادن $\eta_\epsilon^+(x) = \chi\Big(\frac{|x| - ۱ + \epsilon}{\epsilon}\Big)$ برای $۱ - \epsilon \leq |x| \leq ۱$ به پایان می‌رسانیم که در آن χ یک تابع $C^۲$ روی $[۰, ۱]$ است که در $[۰, ۱/۴]$ با ۱ و در $[۳/۴, ۱]$ با صفر برابر است. تصویر η_ϵ^+ در نمودار ۳.۵ ارائه می‌شود.

چون u همساز است، از لم ۱۵.۵ ملاحظه می کنیم، به ازای $v = ۱$

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla \eta_\epsilon^+ dx = ۰, \qquad (۲۲.۵)$$

سپس قرار می‌دهیم $v(x) = |x|^۲$، آنگاه به‌وضوح $\Delta v = ۲d$ و برای $\eta = \eta_\epsilon^+$ لم منجر می‌شود به:

$$۲d \int_B u\eta_\epsilon^+ dx = \int_B |x|^۲ (\nabla u \cdot \nabla \eta_\epsilon^+) dx - ۲ \int_B u(x \cdot \nabla \eta_\epsilon^+) dx.$$



شکل ۳.۵: تابع η_ϵ^+

با وجود این از آنجایی که $\nabla\eta_\epsilon^+$ دارای تکیه‌گاهی به صورت پوسته کروی شکل $S_\epsilon^+ = \{x : ۱ - \epsilon \int |x| \leq ۱\}$ است، می‌بینیم

$$\int_B |x|^{۲}(\nabla u \cdot \nabla\eta_\epsilon^+)dx \int_B (\nabla u \cdot \nabla\eta_\epsilon^+)x + O(\epsilon),$$

و با توجه به ۲۲.۵ داریم

$$d\int_B u dx = -\lim_{\epsilon\to\circ}\int_B u(x.\nabla\eta_\epsilon^+)dx = \circ, \qquad (۲۳.۵)$$

سرانجام به حالت $v(x) = |x|^{-d+۲}$ برمی‌گردیم، هرگاه $d \geq ۳$ و به ازای $x \neq ۰$، $(\Delta v)(x)$ را محاسبه می‌کنیم و ببینیم که صفر می‌شود. درحقیقت از آنجایی که

$$\partial|x|/\partial x_i = x_j/|x|,$$

توجه می‌کنیم

$$\frac{\partial|x|^\alpha}{\partial x_j} = ax_j|x|^{a-۲} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^۲|x|^۲}{\partial x_j^۲} = a|x|^{a-۲} + a(a-۲)x_j^۲|x|^{a-۴}.$$

با جمع کردن روی j، به‌دست می‌آوریم $\Delta(|x|^a) = [da + a(a-۲)]|x|^{a-۲}$ و این عبارت صفر است، هرگاه $a = -d + ۲$ (یا $a = ۰$). استدلالی مشابه نشان می‌دهد زمانی که $d = ۰$ و $x \neq ۰$، $\Delta(\log|x|) = ۰$.

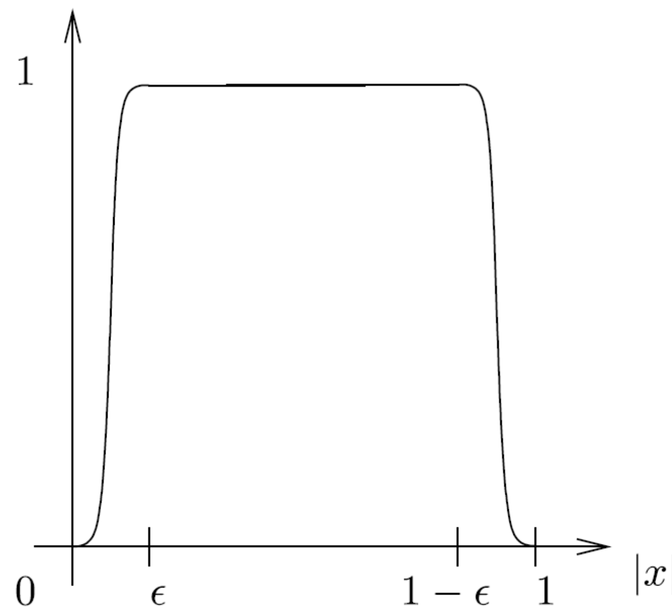
اکنون لم را برای v و $\eta = \eta_\epsilon$ به کار می‌بریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta_\epsilon(x) = ۱ - \chi(|x|/\xi) \qquad \text{برای } |x| \leq \epsilon$$

$$\eta_\epsilon(x) = ۱ \qquad \text{برای } \epsilon \leq |x| \leq ۱ - \epsilon$$

$$\eta_\epsilon(x) = \eta_\epsilon^+(x) = \chi\left(\frac{|x| - ۱ + \epsilon}{\epsilon}\right) \qquad \text{برای } ۱ - \epsilon \leq |x| \leq ۱$$

تصویر η_ϵ به صورت زیر است (تصویر ۴.۵).



شکل ۴.۵: تابع η_ϵ

توجه می‌کنیم که $|\Delta\eta_\epsilon|$، به‌طور کلی $O(1/\epsilon)$ است. اکنون هر دو u و v روی تکیه‌گاه η_ϵ، همساز هستند، و در این حالت $\nabla\eta_\epsilon$ دارای تکیه‌گاهی در نزدیکی کره واحد و در S_ϵ^+ یا در نزدیکی مبدا (روی گوی $B_\epsilon = \{|x| < \epsilon\}$) است. بنابراین طرف راست تساوی لم، دو قسمت را نتیجه می‌دهد، یکی روی S_ϵ^+ و دیگری روی B_ϵ. ما بخش

اول را درنظر می‌گیریم (زمانی که $d \geq ۳$)،

$$\int_{S_\epsilon} u\nabla(|x|^{-d+۲}) \cdot \nabla\eta_\epsilon dx - \int_{S_\epsilon^+} |x|^{-d+۲}(\Delta u \cdot \Delta\eta_\epsilon^+)dx.$$

اکنون انتگرال اول، $(-d+۲)\int_{S_\epsilon^+} u|x|^{-d}(x.\nabla\eta_\epsilon^+)dx$ است، که با توجه به ۲۳.۵ زمانی که $\epsilon \to ۰$، به $c\int_B udx$ میل می‌کند، که در آن c ثابت $(۲-d)d$، است، زیرا روی S_ϵ^+، $|x|^{-d} - ۱ = O(\epsilon)$. به دلیل ۲۲.۵ و این حقیقت که تابع تحت انتگرال روی S_ϵ^+ تکیه می‌کند، وقتی که $\epsilon \to ۰$، جمله دوم به صفر میل می‌کند. استدلال مشابهی برای $d = ۲$ با $v(x) = \log|x|$ به نتیجه $c = ۱$ منجر می‌شود.

با درنظرگرفتن قسمت نزدیک مبدا، که روی B_ϵ است، موقتا فرض اضافی $u(۰) = ۰$ را درنظر می‌گیریم. در این‌صورت از آنجایی که فرض مشتقپذیری برای یک تابع همساز برقرار است، وقتی‌که $|x| \to ۰$ داریم $u(x) = O(|x|)$. اکنون روی B_ϵ دو جمله داریم. جمله اول عبارت است از $\int_{B_\epsilon} u\nabla(|x|^{-d+۲})\nabla\eta_\epsilon dx$، که طبق ۸.۵ در بخش دوم از فصل ۲، به‌وسیله

$$\int_{B_\epsilon} O(\epsilon)|x|^{-d+۱}O(۱/\epsilon)dx \leq O\left(\int_{|x|\leq\epsilon} |x|^{-d+۱}dx\right) \leq O(\epsilon),$$

کنترل می‌شود. این عبارت با ϵ، به صفر میل می‌کند.
جمله دوم، $\int_{B_\epsilon} |x|^{-d+۲}(\nabla u.\nabla\eta_\epsilon)dx$ است که با استفاده از نتیجهٔ بیان

شده اخیر، با
$$\frac{c_۱}{\epsilon}\int_{|x|\leq\epsilon}|x|^{-d+۲}=c_۲\epsilon,$$
کنترل می‌شود. از این حقیقت که ∇u کراندار است و $\nabla\eta_\epsilon$ در سراسر B، $O(۱/\epsilon)$ است استفاده کرده ایم. با فرض $\epsilon\to ۰$ می‌بینیم که این جمله نیز به صفر میل می‌کند. زمانی که $d=۲$ استدلال مشابهی برقرار است.

بنابراین ثابت کرده‌ایم که اگر u دریک همسایگی بستار گوی یکه B همساز باشد و $u(۰)=۰$ آنگاه $\int_B u dx=۰$. می‌توانیم فرض $u(۰)=۰$ را با به کار بردن نتیجه‌ای که همین حالا به آن رسیدیم نادیده بگیریم، کافی است به جای $u(x)$ داشته باشیم $u(x)-u(۰)$. بنابراین ما خاصیت مقدار میانگین ۲۱.۵ را برای گوی واحد یافته‌ایم.

اکنون فرض می‌کنیم $B_r(x_۰)=\{x:|x-x_۰|<r\}$ گویی به شعاع r به مرکز $x_۰$ باشد و $U(x)=u(x_۰+rx)$ را درنظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم که u در $B_r(x_۰)$ همساز باشد، آنگاه به‌وضوح U روی گوی واحد همساز است (درواقع خاصیت همساز بودن تحت انتقال‌های $x\to x+x_۰$ و انبساط‌های $x\to rx$ تغییر نمی‌کند که به آسانی بررسی می‌شود.) بنابر تحت انتقال پایایی اندازه لبگ تحت انبساط ها و انتقال‌ها، اگر u دارای تکیه‌گاه Ω باشد و $B_r(x_۰)\subset\Omega$، آنگاه با استفاده از نتیجه

اخیر ثابت می‌شود $U(\circ) = \frac{\text{۱}}{m(B)} \int_B U(x)dx$، بنابراین بر اساس پایایی نسبی اندازه لبگ نسبت به انبساط ها و انتقال ها داریم

$$\begin{aligned} u(x_\circ) &= \frac{\text{۱}}{m(B)} \int_{|x| \leq \text{۱}} u(x_\circ + rx)dx \\ &= \frac{\text{۱}}{r^d m(B)} \int_{|x| \leq r} u(x_\circ + x)dx \\ &= \frac{\text{۱}}{m(B_r(x,y))} \int_B u(x)dx, \end{aligned}$$

بنابراین در حال کلی ۲۱.۵ را اثبات می‌کند.

خاصیت معکوس

برای اثبات این خاصیت، ابتدا نشان می‌دهیم که خاصیت مقدار میانگین، توسیع مفیدی از خودش را به‌دست می دهد. برای این امر، تابع $\varphi(y)$ را که روی گوی $\{|y| \leqslant \text{۱}\}$ پیوسته و شعاعی است (یعنی برای یک Φ مناسب، $\varphi(y) = \Phi(|y|)$) ثابت در نظر می‌گیریم و زمانی که $|y| > \text{۱}$، φ را با صفر مساوی می‌گیریم. به‌علاوه فرض کنید $\int \varphi(y)dy = \text{۱}$. آنگاه ادعا می‌کنیم:

لم ۱۶.۵. فرض کنیم u در خاصیت مقدار میانگین ۲۱.۵ روی Ω صدق کند، و بستار گوی $\{x : |x - x_\circ| < r_\circ\}$ در Ω قرار گیرد، در این

صورت

$$u(x_\circ) = \int_{\mathbb{R}} u(x_\circ - r_y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} u(x_\circ - r_y)\varphi_r(y)dy = (u*\varphi_r)x_\circ \quad (۲۴.۵)$$

که در آن $\varphi_r(y) = r^{-d}\varphi(y/r)$.
دومین تساوی، نتیجه بلافصل از تغییر متغیرهای $y \longrightarrow y/r$ است، سمت راست تساوی صرفا تعریف $u*\varphi_r$ است.

می‌توانیم (۲۴.۵) را به‌عنوان نتیجه‌ای از یک نکته ساده در مورد انتگرال ثابت کنیم. فرض کنید $\psi(y)$ تابع دیگری روی گوی $\{|y| \leqslant ۱\}$ باشد، که کراندار است. برای هر عدد صحیح مثبت و بزرگ N گوی $\{|y| \leqslant j/N\}$ را با B_j نمایش می‌دهیم. به یاد می‌آوریم که $\varphi(y) = \Phi(|y|)$. در این‌صورت

$$\int \varphi(y)\psi(y)dy = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{j=۱}^{N} \Phi(\frac{j}{N}) \int_{B(j)-B(j-۱)} \psi(y)dy, \qquad (۲۵.۵)$$

برای بررسی این مطلب، توجه می‌کنیم که طرف چپ ۲۵.۵ با

$$\sum_{j=۱}^{N} \int_{B(j)-B(j-۱)} \varphi(y)\psi(y)dy,$$

برابر است. از آنجایی که φ شعاعی و پیوسته است و $\varphi(y) = \Phi(|y|)$ زمانی که $N \longrightarrow \infty$، $\sup_{۱\leq j\leq N} \sup_{y\in B(j)-B(j-۱)} |\varphi(y) - \Phi(j|N)| = \epsilon_N$ به صفر میل می‌کند.

بنابراین طرف چپ (۲۵.۵) با $\sum_{j=1}^{N} \Phi(j/N) \int_{B(j)-B(j-1)} \psi(y)dy$ حداکثر اختلافی برابر با مقدار $\epsilon_N \int_{|y|\leq 1} |\psi(y)|dy$ دارد که، (۲۵.۵) را ثابت می‌کند.

اکنون این را در حالتی به‌کار می‌بریم که $\psi(y) = u(x_\circ - ry)$ و φ مانند بالاست. در این صورت

$$\int u(x_\circ - ry)\varphi(y)dy = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{N} \Phi(\frac{j}{N}) \int_{B(j)-B(j-1)} u(x_\circ - ry)dy,$$

از خاصیت مقدار میانی برای u داریم

$$\int_{B(j)-B(j-1)} u(x_\circ - r_y)dy = u(x_\circ)[m(B(j_1)) - m(B(j-1))].$$

بنابراین، طرف راست بالا با

$$u(x_\circ) \lim_{N\rightarrow\infty} \sum_{j=1}^{N} \phi(\frac{j}{N}) \int_{B(j)-B(j-1)} dy,$$

برابر است و اگر (۲۵.۵) را دوباره به‌کار ببریم، این بار با $\psi = 1$ و توجه به این نکته که $\int \varphi(y)dy = 1$، این عبارت با $u(x_\circ)$ برابر است. بنابراین لم را ثابت کرده‌ایم.

از این مطلب می بینیم که هرتابع پیوسته که در خاصیت مقدارمیانگین صدق می‌کند، منظم سازی از خودش است! به‌طور دقیق تر، هرگاه

$x \in \Omega$ و فاصله‌ی x تا مرز Ω بزرگتر از r باشد، داریم

$$u(x) = (u * \varphi_r)(x). \tag{۲۶.۵}$$

همچنین اکنون اگر بخواهیم $\varphi \in C_\circ^\infty\{|y| < ۱\}$ آنگاه با توجه به بحث بخش اول این فصل، نتیجه می‌گیریم u در سراسر Ω هموار است.

اکنون ثابت می‌کنیم که چنین توابعی همساز هستند. درواقع با توجه به قضیه تیلور، به ازای هر $x_\circ \in \Omega$

$$u(x_\circ + x) - u(x_\circ) = \sum_{j=۱}^{d} a_j x_j + \frac{۱}{۲} \sum_{j,k=۱}^{d} a_{jk} x_j x_k + \epsilon(x), \tag{۲۷.۵}$$

که در آن $|x| \to \circ$، داریم $\epsilon(x) = O(|x|^۳)$.

سپس توجه می‌کنیم به ازای هر k, j که $j \neq k$، $\int_{|x|\leq r} x_j dx = \circ$ و $\int_{|x|\leq r} x_j x_k dx = \circ$. حکم از انتگرال‌گیری ابتدا نسبت به متغیر x_j به‌دست می‌آید و توجه می‌کنیم که انتگرال صفر می‌شود چون x_j تابع فرد است. همچنین با استفاده از تقارن مشهود

$$\int_{|x|\leq r} x_j^۲ dx = \int_{|x|\leq r} x_k^۲ dx$$

و با استفاده از تحت انبساط پایایی نسبی (بخش سوم، فصل ۱ را ببینید) به ازای $c > \circ$، این دو عبارت با

$$r^۲ \int_{|x|\leq r} (x_۱/r)^۲ dx = r^{d+۲} \int_{|x|\leq ۱} x_۱^۲ dx = cr^{d+۲}$$

برابر هستند. اکنون از هر دو طرف ۲۷.۵ روی گوی $\{|x| \leq r\}$ با تقسیم کردن بر r^d و به کار بردن خاصیت مقدار میانگین، انتگرال می‌گیریم. نتیجه این است که

$$\frac{c}{۲}r^{۲}\sum_{j=۱}^{d} a_{jj} = \frac{cr^{۲}}{۲}(\Delta u)(x_{\circ}) = O\left(\frac{۱}{r^d}\int_{|x|\leq r}|\epsilon(x)|dx\right) = O(r^{۳}).$$

فرض کنیم $r \to \circ$، در این‌صورت داریم $\Delta u(x_\circ) = \circ$. از آنجایی که $x_\circ$ یک نقطه دلخواه از Ω است، برهان قضیه ۱۲.۵ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۳.۵ و چند نتیجه

اکنون به برهان قضیه ۱۳.۵ برمی‌گردیم. فرض می‌کنیم u روی Ω به‌طور ضعیف همساز باشد. به ازای هر $\epsilon > \circ$، Ω_ϵ را مجموعه‌ای از نقاط در Ω تعریف می‌کنیم که در فاصله بزرگتری از ϵ از مرز آن هستند:

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega\} : d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

توجه می‌کنیم که Ω_ϵ باز است و اگر ϵ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه هر نقطه از Ω به Ω_ϵ تعلق دارد. لذا منظم‌سازی $u * \varphi_r = u_r$ که در قضیه قبل به آن پرداخته شده، برای $r < \epsilon$ روی Ω_ϵ تعریف می‌شودو همان طور که قبلا اشاره کردیم، در آنجا هموار است. سپس ملاحظه می‌کنیم که روی Ω_ϵ به‌طور ضعیف همساز است. در حقیقت، برای

$\psi \in C_\circ^\infty(\Omega_\epsilon)$ طبق قضیه فوبینی، داریم

$$\begin{aligned}(u_r, \Delta\psi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x-ry)\varphi(y)dy\right)(\Delta\psi)(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\left(\int_{\mathbb{R}} u(x-ry)(\Delta\psi)(x)dx\right)dy,\end{aligned}$$

و انتگرال داخلی برای y هایی که $|y| \leq ۱$، صفر می‌شود، زیرا با $(u, \Delta\psi_r)$ برابر است، که در آن $\psi_r = \psi(x+ry)$. بنابراین داریم

$$(u * \varphi_r, \Delta\psi) = \circ$$

، و لذا $u * \varphi_r$ به‌طور ضعیف همساز است، سپس از آنجایی که این منظم‌سازی به‌طور خودکار هموار است، آنگاه همساز نیز است. به‌علاوه ادعا می‌کنیم

$$(u * \varphi_{r_۱})(x) = (u * \varphi_{r_۲})(x), \qquad (۲۸.۵)$$

هرگاه $x \in \Omega_\epsilon$ و $r_۱ + r_۲ \in \epsilon$. در واقع همان طور که در عبارت بالا (۲۶.۵) نشان داده‌ایم $(u * \varphi_{r_۱}) * \varphi_{r_۲} = u * \varphi_{r_۱}$. هر چند که پیچش‌ها جابجایی هستند (توجه (۶) فصل ۲ را ببینید)، بنابراین

$$(u * \varphi_{r_۱}) * \varphi_{r_۲} = (u * \varphi_{r_۲}) * \varphi_{r_۱} = u * \varphi_{r_۲},$$

و (۲۸.۵) ثابت می‌شود.

اکنون در حالی که $r_۲$ ثابت است، می‌توانیم فرض کنیم $r_۱$ به صفر میل می‌کند. با توجه به خواص تقریب های همانی می دانیم به ازای تقریبا هر x در Ω_ϵ،

$$u * \varphi_{r_۱}(x) \to u(x),$$

بنابراین $u(x)$ به ازای تقریبا هر $x \in \Omega_\epsilon$، با $u_{r_۲}(x)$ برابر است. بنابراین u می‌تواند روی Ω_ϵ طوری تصحیح شود (با مساوی قرار دادن با $u_{r_۲}$)، به‌طوری‌که همساز شود. اکنون از آنجایی که ϵ می‌تواند به اندازه دلخواه کوچک باشد، برهان قضیه کامل است.

نتایج بعدی از قضایای فوق به دست می آیند.

نتیجه ۱۷.۵. هر تابع همساز بی‌نهایت بار مشتقپذیر است.

نتیجه ۱۸.۵. فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله از توابع همساز روی Ω باشد که هرگاه $n \to \infty$ روی زیرمجموعه‌های فشرده Ω به تابع u به‌طور یکنواخت همگراست. آنگاه u نیز همساز است.

قسمت اول این نتایج قبلا به‌عنوان نتیجه‌ای از ۲۶.۵ ثابت شده است. برای قسمت دوم، این حقیقت را که هرگاه B گویی با مرکز $x_\circ$ باشد و $\overline{B} \subset \Omega$، هر u_n در خاصیت مقدارمیانگین

$$u_n(x_\circ) = \frac{۱}{m(B)} \int_B u_n(x)dx,$$

صدق می کند، به کار می بریم. بنابراین، همگرایی یکنواخت نتیجه می‌دهد که u نیز در این خاصیت صدق می‌کند و بنابراین u همساز است.

باید توجه کنیم که این خواص توابع همساز روی $\mathbb{R}^d$ یاد آور خواص مشابه با توابع تحلیلی است. اما ارتباط نزدیک ارائه شده بین این دو رده از توابع در حالت خاص $d = ۲$، تعجب آور نیست.

مسأله مقدار مرزی و اصل دیریکله

مسأله مقدار مرزی دیریکله d بعدی که ما با آن درگیر هستیم، به صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنید Ω مجموعهٔ کراندار بازی در $\mathbb{R}^d$ باشد. تابع پیوسته f روی مرز $\partial\Omega$ داده شده است. می‌خواهیم تابع u را طوری بیابیم که روی $\overline{\Omega}$ پیوسته و روی Ω همساز باشد، به‌طوری‌که روی $\partial\Omega$، $u = f$.

یک نکته‌ی مقدماتی مهم این است که جواب این مسأله اگر موجود باشد، منحصر به فرد است. در واقع اگر، $u_۱$ و $u_۲$ دو جواب باشند، آنگاه $u_۱ - u_۲$ روی Ω همساز است و روی مرز صفر می‌شود. بنابراین طبق اصل ماکزیمم (نتیجه ۱۴.۵) داریم $u_۱ - u_۲ = ۰$ و بنابراین $u_۱ = u_۲$.

به مسأله وجود جواب برمی‌گردیم، اکنون باید روش اصل دیریکله را که پیش‌تر بدان اشاره شد، دنبال کنیم.
رده‌ای از توابع $C^1(\overline{\Omega})$ را در نظر می‌گیریم و این فضا را با ضرب داخلی مجهز می‌کنیم

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v})dx,$$

که در آن یقینا

$$\nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}}.$$

متناظر با این ضرب داخلی، نرم $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ را داریم. توجه می کنیم که $\|u\| = 0$ با $\nabla u = 0$ روی Ω معادل است، که به این معناست که u روی همه مولفه‌های همبند Ω ثابت است. بنابراین می توانیم رده های هم ارزی در $C^1(\overline{\Omega})$ را به پیمانه توابعی که روی مولفه های هم بند Ω ثابت هستند، در نظر بگیریم. این فضا یک فضای پیش هیلبرتی با ضرب داخلی و نرم معرفی شده فوق می سازد.
در مطالعه کامل سازی $\mathcal{H}$ از $\mathcal{H}_0$ و کاربرد آن در مسأله مقدار مرزی، لم زیر ضروری است.

لم ۱۹.۵. فرض کنید Ω یک مجموعه باز و کراندار در $\mathbb{R}^d$ باشد. فرض کنید v به $C^1(\bar{\Omega})$ متعلق است و روی $\partial\Omega$ صفر می شود. در این صورت

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \le c_\Omega \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \qquad (۲۹.۵)$$

برهان. در حقیقت می‌توان این نتیجه را از نکات ارائه شده در لم ۹.۵ استنتاج کرد. ترجیحا این فرم ساده را به صورت جداگانه اثبات می‌کنیم تا ایده‌ی ساده‌ای را که بعدا از آن استفاده خواهیم کرد برجسته سازد. باید توجه کرد که این بحث به تخمین $c_\Omega \le d(\Omega)^2$ منجر می‌شود، که در آن $d(\Omega)$ قطر Ω است.

براساس ملاحظات زیر ادامه می‌دهیم. فرض کنید f تابعی در $C^1(\bar{I})$ باشد، که $I=(a,b)$ بازه‌ای در $\mathbb{R}$ است. فرض کنید که f در یکی از نقاط انتهایی I صفر شود. در این‌صورت

$$\int_I |f(t)|^2 dt \le |I|^2 \int_I |f'(t)|^2 dt, \qquad (۳۰.۵)$$

که $|I|$ طول I را مشخص می‌سازد.

در واقع فرض کنید $f(a)=0$ آنگاه $f(s)=\int_a^s f'(t)dt$، طبق نامساوی کشی-شوارتس داریم،

$$|f(s)|^2 \le |I| \int_a^s |f'(t)|^2 dt \le |I| \int_I |f'(t)|^2 dt.$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه نسبت به s روی I، (۳۰.۵) به‌دست می‌آید.

برای اثبات (۲۹.۵)، می‌نویسیم $x = (x_\backprime, x')$ برای $x_\backprime \in \mathbb{R}$ و $x' \in \mathbb{R}^{d-\backprime}$ و (۳۰.۵) را برای f به کارمی‌بریم که به‌وسیله $f(x_\backprime) = v(x_\backprime, x')$ برای x' ثابت تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم $J(x')$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}$ باشد، که برشی متناظر از Ω است که به‌وسیله $\{x_\backprime \in \mathbb{R} : (x_\backprime, x') \in \Omega\}$ داده می‌شود. مجموعهٔ $J(x')$ به صورت اجتماع مجزایی از زیربازه‌های باز I_j نوشته می‌شود.

(توجه کنید که در حقیقت $f(x_\backprime)$ در هر دو نقطه انتهایی هر I_j صفر می‌شود.) برای هر j، با استفاده از ۳۰.۵ داریم

$$\int_{I_j} |v(x_\backprime, x')|^\Upsilon dx_\backprime \leq |I_j|^\Upsilon \int_{I_j} |\nabla v(x_\backprime, x')|^\Upsilon dx_\backprime.$$

اکنون از آنجایی که $|I_j| \leq d(\Omega)$، مجموع گیری روی بازه‌های مجزای I_j

$$\int_{J(x')} |v(x_\backprime, x')|^\Upsilon dx_\backprime \leq d(\Omega)^\Upsilon \int_{J(x')} |\nabla v(x_\backprime, x')|^\Upsilon dx_\backprime,$$

را می‌دهد و انتگرال‌گیری نسبت به $x' \in \mathbb{R}^d$ به ۲۹.۵ منجرمی‌شود.
□

اکنون فرض می‌کنیم $S_\circ$ زیرفضای خطی $C^\backprime(\overline{\Omega})$ را مشخص می‌سازد که شامل توابعی است که روی مرز Ω صفر می‌شوند. توجه که اعضای

متمایز عناصر مجزای $\mathcal{S}_\circ$، تحت رابطه هم ارزی $\mathcal{H}_\circ$، متمایز باقی می‌مانند. (زیرا ثابت‌ها روی هر مؤلفه که روی مرز صفر می‌شوند، صفر هستند) و بنابراین $\mathcal{S}_\circ$ را می‌توان با زیرفضایی از $\mathcal{H}_\circ$ یکسان در نظر گرفت. بستار این زیرفضا در $\mathcal{H}$ با S نمایش دهید و فرض کنید P_S تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ روی S است.

با این مقدمات، ابتدا می‌کوشیم تا مسأله مقدار مرزی را با f ارائه شده روی $\partial\Omega$ تحت این فرض اضافی که f تحدید تابع F به $\partial\Omega$ در $C^1(\overline{\Omega})$ است، حل کنیم (این‌که چطور این فرض اضافی می‌تواند حذف شود در زیر توضیح داده می‌شود.) طبق اصل دیریکله، به دنبال دنباله $\{u_n\}$ با شرط‌های $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ و $u_n|_{\partial\Omega} = F|_{\partial\Omega}$ هستیم، به‌طوری‌که انتگرال‌های دیریکله $\|u_n\|^2$ به مقدار مینیمم میل می‌کند. این به این معنی است که $u_n = F - v_n$ و $v_n \in S_n$ و این‌که $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|$ فاصله F تا S را مینیمم می‌کند. از آنجایی که $S = \overline{S}$، این دنباله فاصله F تا S را در H نیز مینیمم می‌کند.

اکنون گزاره‌های مقدماتی در مورد تصاویر متعامد به ما چه می‌آموزند؟ طبق برهان لم ۱۷.۴ در فصل قبل نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{v_n\}$ و بنابراین دنباله $\{u_n\}$ نیز هردو درنرم $\mathcal{H}$ همگرا هستند، که اولی حد $P_s(F)$ را دارد. اکنون با به کار بردن لم ۱۹.۵ برای $v_n - v_m$ نتیجه می‌گیریم که $\{v_n\}$ و $\{u_n\}$ در نرم $L^2(\Omega)$ نیز کشی، و بنابراین در

نرم L^2 همگراهستند. قرار می‌دهیم $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. در این صورت

$$u = F - P_s(F). \qquad (۳۱.۵)$$

می‌بینیم u به‌طور ضعیف همساز است. در واقع، هرگاه $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ، و بنابراین طبق (۳۱.۵) ، $< u, \psi >= 0$. بنابراین $< u_n, \psi >\to 0$. اما با انتگرال‌گیری جز به جز همان‌طوری که قبلا دیده‌ایم

$$< u_n, \psi >= \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \overline{\nabla \psi}) = -\int_\Omega u_n \overline{\Delta\psi} dx = -(u_n, \Delta\psi).$$

به‌عنوان نتیجه $(u, \Delta\psi) = 0$ و بنابراین u به‌طور ضعیف همساز است و بنابراین می‌تواند روی مجموعه‌ای با اندازه صفر تصحیح شود تا همساز شود.

این روش راه حلی قابل فهم برای مسأله است. با وجود این، دو موضوع هنوز حل نشده باقی می‌ماند. اول این‌که در حالی که u حد دنباله $\{u_n\}$ از توابع پیوسته در $\overline{\Omega}$ است و برای هر n داریم، $u_n|_{\partial\Omega} = f$، واضح نیست که u خودش روی $\overline{\Omega}$ پیوسته است و $u|_{\partial\Omega} = f$.

موضوع دوم این است که ما بحث فوق را برای f های تعریف شده روی مرز Ω محدود ساخته‌ایم که از تحدید توابع در $C^1(\overline{\Omega})$ به‌دست آمده‌اند.

مشکل دوم راحت‌تر از دیگری است تا بر آن فائق آییم، و می‌تواند

با به کار بردن لم زیر که بر روی مجموعهٔ $\Gamma = \partial\Omega$ اعمال می‌شود، انجام شود،

لم ۲۰.۵. فرض کنید Γ، مجموعه فشرده‌ای در $\mathbb{R}^d$ و f تابع پیوسته‌ای روی Γ باشد. آنگاه دنباله $\{F_n\}$ از توابع هموار روی $\mathbb{R}^d$ وجود دارد، به‌طوری‌که به‌طور یکنواخت روی Γ، $F_n \to f$.

در حقیقت، فرض کنید با موضوع اول سروکار داشته باشیم، در این صورت به صورت زیر ادامه می‌دهیم. توابع U_n را می‌یابیم که روی Ω همساز و روی $\overline{\Omega}$ پیوسته هستند، به‌طوری‌که

$$u_n|_{\partial\Omega} = F_n|_{\partial\Omega}$$

. اکنون از آنجایی که $\{F_n\}$ روی $\partial\Omega$ (به f) به‌طور یکنواخت همگراست، طبق اصل ماکزیمم نتیجه می‌دهد که دنباله $\{v_n\}$ به‌طور یکنواخت به تابعی مانند u همگراست که روی $\overline{\Omega}$ پیوسته است و این خاصیت را دارد که $u|_{\partial\Omega} = f$ و به‌علاوه همساز است (بنابر نتیجه ۱۸.۵) این حکم ما را به هدف می‌رساند.

برهان لم ۲۰.۵ براساس اصل توسیع زیر است.

لم ۲۱.۵. فرض کنید f تابعی پیوسته روی زیر مجموعه فشرده‌ی Γ از $\mathbb{R}^d$ باشد. در این صورت تابع G روی $\mathbb{R}^d$ وجود دارد، به‌طوری‌که پیوسته است و $G|_{\partial\Gamma} = f$.

برهان. با توجه به این مطلب شروع می‌کنیم که اگر $K_{\circ}$ و K_{1} دو مجموعه فشرده مجزا باشند، تابع پیوسته $\circ \leq g(x) \leq 1$ روی $\mathbb{R}^d$ وجود دارد که مقدار صفر را روی K و ۱ را روی K_{1} را می‌گیرد. در واقع ، اگر $d(x,\Omega)$ فاصله x تا Ω را مشخص کند، مشاهده می‌کنیم که

$$g(x) = \frac{d(x,K_{\circ})}{d(x,K_{\circ}) + d(x,K_{1})},$$

خواص مورد انتظار را دارد.

اکنون، بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که f نامنفی است و با کران ۱ روی Γ کراندار است. قرار می‌دهیم

$$K_{\circ} = \{x \in \Gamma : 2/3 \leq f(x) \leq 1\} \qquad , \qquad K_{1} = \{x \in \Gamma : \circ \leq f(x) \leq 1/3\},$$

بنابراین $K_{\circ}$ و K_{1} مجزا هستند. به وضوح مطلب قبل از لم تضمین می‌کند که تابع $\circ \leq G_{1}(x) \leq 1/3$ روی $\mathbb{R}^d$ وجود دارد، به طوری که روی $K_{\circ}$ مقدار ۱/۳ و روی K_{1} مقدار K_{1} را می‌گیرد. آنگاه مشاهده می‌کنیم که

$$\circ \leq f(x) - G_{1}(x) \leq \frac{2}{3} \qquad \forall x \in \Gamma,$$

اکنون استدلال را با f به جای $f - G_{1}$ تکرار می‌کنیم. در قدم نخست از $\circ \leq f \leq 1$ تا $\circ \leq F - G_{1} \leq 2/3$ را انجام می‌دهیم در نتیجه یک تابع

پیوسته $G_۲$ روی $\mathbb{R}^d$ می‌یابیم، به‌طوری‌که

$$\circ \leq f(x) - G_۱(x) - G_۲(x) \leq (\frac{۲}{۳})^۲ \qquad \Gamma \text{روی},$$

و $\circ \leq G_۲ \leq \frac{۱}{۳}\frac{۲}{۳}$. با تکرار این فرایند تابع پیوسته G_n روی $\mathbb{R}^d$ می‌یابیم به‌طوری‌که روی Γ

$$\circ \leq f(x) - G_۱(x) ... - G_N(x) \leq (\frac{۲}{۳})^N,$$

و $\circ \leq G_N \leq \frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۳})^{N-۱}$ روی $\mathbb{R}^d$. اگر تعریف کنیم

$$G = \sum_{n=۱}^{\infty} G_n$$

آنگاه G پیوسته است و با f روی Γ برابر است.

برای کامل کردن برهان لم ۲۰.۵ استدلال زیر را انجام می‌دهیم. تابع G به‌دست آمده در لم ۲۱.۵ را با تعریف زیر منظم سازی می‌کنیم.

$$F_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} - \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y)\varphi(y/\epsilon)dy = \int_{\mathbb{R}^d} G(y)\varphi_\epsilon(x-y)dy,$$

و $\varphi_\epsilon(y) = \epsilon^{-d}\varphi(y/\epsilon)$ که در آن φ تابع $C_\circ^\infty$ نامنفی است با تکیه‌گاهی در گوی یکه و $\int \varphi(y)dy = ۱$. در این صورت هر F_ϵ یک تابع C^∞ است و داریم

$$F_\epsilon(x) - G(x) = \int (G(y) - G(x))\varphi_\epsilon(x-y)dy.$$

از آنجایی که انتگرال بالا به $|x-y|\leq\epsilon$ محدود می‌شود، می‌بینیم

$$\begin{aligned}|F_\epsilon(x)-G(x)| &\leq \sup_{|x-y|\leq\epsilon}|G(x)-G(y)|\int\varphi_\epsilon(x-y)dy\\ &\leq \sup_{|x-y|\leq\epsilon}|G(x)-G(y)|,\end{aligned}$$

کمیت آخر به ازای ϵ، به خاطر پیوستگی یکنواخت G در نزدیکی Γ به صفر میل می‌کند، و اگر $\epsilon=\frac{1}{n}$ انتخاب کنیم دنباله مورد نظر را می یابیم. $\square$

قضیه دو بعدی

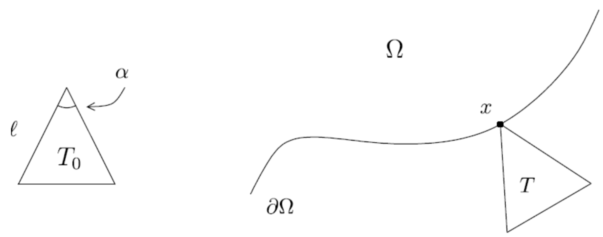
اکنون به این مسأله می‌رسیم که آیا جواب پیشنهاد شده u، مقدار مرزی مورد انتظار را به‌دست می‌دهد. در اینجا بحث را به حالت دو بعدی محدود می‌کنیم، به این دلیل که در حالات با ابعاد بالاتر با سؤالاتی مواجه می‌شویم که مارا به خارج از بحث این کتاب می‌برند. برعکس در بعد دو اگر چه برهان نتیجه زیر اندکی زیرکانه است، ولی در ارتباط با روش‌های فضای هیلبرت است که ما به تصویر کشیده‌ایم.

مسأله دیریکله می‌تواند (دربعد دو همانند ابعاد بالاتر) حل شود، تنها اگر با توجه به ماهیت دامنه Ω، تحدیدهای مشخص اعمال شوند. نظمی که ما باید در نظر بگیریم، در عین حال که بهینه

نیست [1] ولی به اندازه کافی وسیع است که کاربردهای فراوانی را شامل شود و فرم هندسی ساده‌ای دارد. به شکل زیر توصیف می شود. یک مثلث اولیه T_0 را در $\mathbb{R}^2$ ثابت می‌گیریم. به‌طور دقیق‌تر فرض می‌کنیم T_0 مثلث متساوی الساقین است که دو ضلع مساوی آن طول l را دارد و زاویه‌ی α را در راس مشترکشان می‌سازد. مقادیر دقیق l و α مهم نیستند، ممکن است که هر دو به قدری که می‌خواهیم کوچک باشند، اما باید در سراسر بحث‌ما ثابت گرفته شوند. بنابراین، با مشخص کردن شکل T_0، می‌گوییم T یک **مثلث ویژه** است، هرگاه با T_0 متجانس باشد. به این معنی که از طریق انتقال و دوران، T از T_0 حاصل می‌شود. **راس** T اشتراک دو ضلع مساوی تعریف می‌شود.

خاصیت منظم بودن Ω که فرض کردیم ،**شرط مثلث خارجی**، در زیر می‌آید. با l و α ثابت، به ازای هر x در مرز Ω، مثلث ویژه با راس x وجود دارد، به طوری که درون آن خارج از Ω قرار می‌گیرد. (تصویر ۵.۵ را ببینید.)

۱. شرایط بهینه سازی با مفهوم ظرفیت مجموعه‌ها درگیر می‌شود.



شکل ۵.۵: مثلث $T_\circ$ و مثلث ویژه‌ی T

قضیه ۲۲.۵. فرض کنید Ω مجموعه کراندار بازی در $\mathbb{R}^۲$ باشد که شرط مثلث خارجی را برقرار می‌کند. اگر f تابع پیوسته‌ای روی $\partial\Omega$ باشد، آنگاه مسأله مقدار مرزی $\Delta u = \circ$ برای تابع پیوسته u روی $\overline{\Omega}$ و $u|_{\partial\Omega} = f$، همیشه به‌طور منحصر به فرد قابل حل است.

برخی از پیشنهادات به این ترتیب هستند.

۱. اگر Ω با یک منحنی چند ضلعی محصور شده باشد، در شرایط قضیه صدق می کند.

۲. به‌طور کلی‌تر اگر Ω با تعداد متناهی از منحنی‌های لیپ شیتس یا به خصوص خم‌های $C^۱$ محصور باشد، شروط همچنان برقرار است.

۳. مثال‌های ساده‌ای وجود دارد که در آن‌ها مسأله حل شدنی

نیست. به‌عنوان نمونه، اگر Ω دیسک سوراخ داری باشد. البته این مثال در شرط مثلث خارجی صدق نمی‌کند.

۴. شرایط روی Ω در این قضیه بهینه نیستند: می‌توان مثال‌هایی از Ω ساخت که مسأله برای آن حل شدنی باشد و در آن نظم فوق تحقق نیابد.

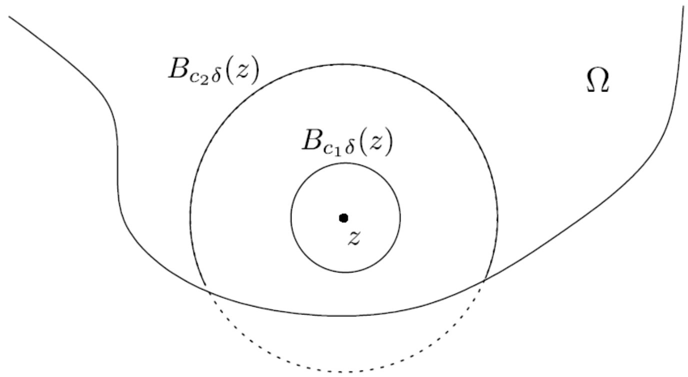
برای جزئیات بیشتر در مورد بالا تمرین ۱۹ و مسأله ۴ را ببینید.

به برهان قضیه برمی‌گردیم که بر گزاره زیر استوار است و می تواند به‌عنوان صورتی از لم ۱۹.۵ درنظر گرفته شود.

گزاره ۲۳.۵. برای هر مجموعه باز کراندار Ω در $\mathbb{R}^۲$ که در شرط مثلث خارجی صدق کند، ثابت‌های $c_۱ > ۱$ و $c_۲ > ۱$ وجود دارند، به‌طوری‌که موارد زیر برقرارند. فرض کنید z نقطه‌ای در Ω باشد، که فاصله‌اش از $\partial\Omega$ برابر با δ است. در این صورت زمانی که v به $C^۱(\overline{\Omega})$ تعلق دارد و $v|_{\partial\Omega} = ۰$ داریم

$$\int_{B_{c_۱\delta(z)}} |v(x)|^۲ dx \leq C\delta^۲ \int_{B_{c_۲\delta(z)\cap\Omega}} |\nabla v(x)|^۲ dx. \qquad (۳۲.۵)$$

کران C می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که تنها به قطر Ω و پارامترهای l و α که مثلث‌های T را تعیین می‌کنند، بستگی داشته باشد.



شکل ۶.۵: موقعیت قضیه ۲۳.۵

اکنون ببینیم که چگونه گزاره قضیه را ثابت می کند. پیش از این نشان دادیم که کافی است فرض کنیم f تحدید تابعی مانند F متعلق به $\partial\Omega$ است. $C^1(\overline{\Omega})$ دنباله مینیمم کننده $u_n = F - v_n$ را با $v_n \in C^1(\overline{\Omega})$ و $v_n|_{\partial\Omega} = 0$ به یاد می‌آوریم. به‌علاوه این دنباله در نرم H و $L^2(\Omega)$ به حد v می‌گراید، به‌طوری‌که $u = F - v$ روی Ω همساز است. در این‌صورت از آنجایی که (۳۲.۵) برای هر v_n برقرار است، برای $v = F - u$ نیز برقرار است، به این معنا که

$$\int_{B_{c_1\delta(z)}} |(F-u)(x)|^2 dx \leq C\delta^2 \int_{B_{c_2\delta(z)\cap\Omega}} |\nabla(F-u)(x)|^2 dx. \qquad (۳۳.۵)$$

برای اثبات قضیه کافی است به پیوستگی u روی Ω توجه کنیم، تا

نشان دهیم که اگر y نقطه ثابتی در ∂z و z نقطه متغیری در Ω باشد، آنگاه وقتی که $z \to y$، $u(z) \to f(y)$. فرض می‌کنیم $\delta = \delta(z)$ فاصله z از مرز را مشخص سازد. آنگاه $\delta(z) \leq |z-y|$ و بنابراین وقتی که $z \to y$، $\delta(z) \to ۰$. اکنون میانگین‌های F و u را که روی دیسک‌هایی به مرکز z به شعاع $c_۱\delta(z)$ گرفته می‌شوند، در نظر می‌گیریم (به یاد آورید که $c_۱ < ۱$). این میانگین‌ها را به‌ترتیب با $Av(F)(z)$ و $Av(u)(z)$ مشخص می‌کنیم. آنگاه طبق نامساوی کشی-شوارتس داریم

$$|Av(f)(z) - Av(u)(z)|^۲ \leq \frac{۱}{\pi(c_۱\delta)^۲}\int_{B_{c_۱\delta(z)}\cap\Omega}|F-u|^۲dx,$$

که با توجه به (۳۳.۵) به‌وسیله

$$C'\int_{B_{c_۲\delta(z)}\cap\Omega}|\nabla(F-u)|^۲dx,$$

کنترل می‌شود.

از آنجایی که $m(B_{c_۲\delta}) \to ۰$، پیوستگی مطلق انتگرال تضمین می کند که انتگرال آخر با δ به صفر میل کند. در این حالت طبق خاصیت مقدارمیانگین،

$$Av(u)(z) = u(z)$$

در حالی‌که از پیوستگی F در $\overline{\Omega}$ نتیجه می‌شود که

$$Av(F)(z) = \frac{1}{m(B_{c_1\delta(z)})}\int_{B_{c_1\delta(z)}} F(x)dx \to f(y),$$

زیرا $F|_{\partial\Omega} = f$ و $z \to y$. تمام این حقایق با هم نتیجه می دهند، $u(z) \to f(y)$ و گزاره ثابت می‌شود.

برای اثبات قضیه، برای هر $z \in \Omega$ که فاصله‌ی آن از $\partial\Omega$، برای δ به قدر کافی کوچک برابر δ است، یک مستطیل R با این خواص می‌سازیم:

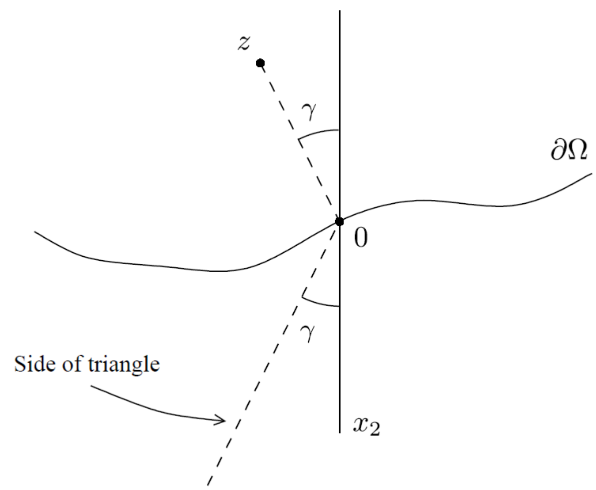
۱. R اضلاعی به طول‌های $2c_1\delta$ و $M\delta$ (با $c_1 \leq 1/2$ و $M \leq 4$) دارد.

۲. $B_{c_1\delta(z)} \subset R$

۳. هر پاره خط در R، که با ضلع بلند موازی است و طولی برابر با آن دارد، با مرز Ω اشتراک دارد.

برای به دست آوردن R، y را نقطه‌ای در $\partial\Omega$ فرض می‌کنیم، به‌طوری‌که $\delta = |z-y|$ و شرط مثلث خارجی را در y به کار می‌بریم. در نتیجه خط متصل کننده z به y و یکی از اضلاع مثلث ویژه که راسی در y دارد، باید زاویه $\beta < \pi$ را بسازد. (در حقیقت $\beta \leq \pi - \alpha/2$، که به آسانی دیده می‌شود.) اکنون بعد از دوران و انتقال مناسب، فرض

می‌کنیم $y = \circ$ و زاویه محور $x_۲$ و خط متصل کننده z تا صفر با زاویه ضلع مثلث تا محور $x_۲$ برابر است. این زاویه γ فرض می‌شود و $\gamma > \alpha/۴$.(تصویر ۷.۵ راببینید)



شکل ۷.۵: جابابی مستطیل R

احتمال دیگری وجود دارد که با تصویر منعکس شده روی محور $x_۲$ اتفاق می‌افتد.

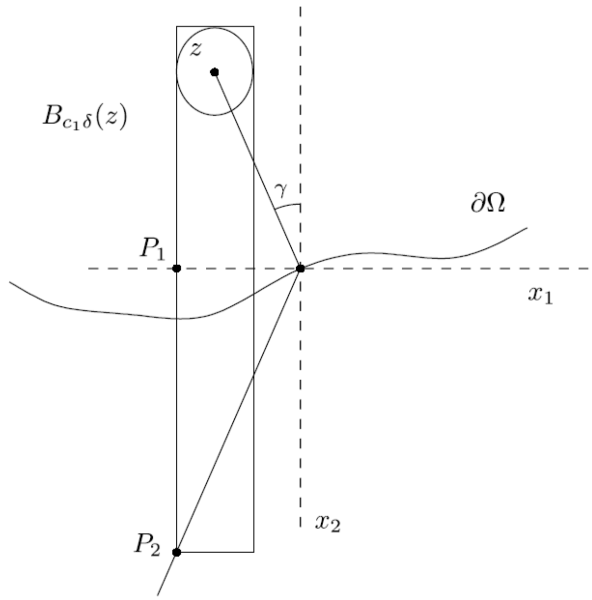
با این تصویر در ذهن مستطیل R را به صورتی که در تصویر ۸.۵ نشان داده شده، می‌سازیم.

ضلع بلند آن با محور $x_۲$ موازی است، شامل دیسک $B_{c_۱\delta(z)}$ است

و هر پاره خط R که با محور x_2 موازی است با (امتداد) ضلع مثلث اشتراک دارد.

توجه کنید که مختصات z، $(-\delta\sin\gamma, \delta\cos(\gamma))$ هستند. $c_1 < \sin\gamma$ انتخاب می‌کنیم، آنگاه $B_{c_1\delta(z)}$ در نیم صفحه (چپ) مشترک با z قرار می‌گیرد.

سپس روی دو نقطه تمرکز می‌کنیم: P_1 که روی محور x_1 در قسمت اشتراک این محور با ضلع بلند مستطیل قرار دارد، و P_2 که در قسمت گوشه‌ای آن ضلع مستطیل قرار دارد، به این معنا که در اشتراک (امتداد) ضلع مثلث خارجی و ضلع دیگر مستطیل است. مختصات P_1، $(-a, 0)$ است که در آن $a = \delta c_1 + \delta\sin\gamma$. مختصات P_2، $(-a, -a\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma})$ است. توجه می‌کنیم که فاصله P_2 از مبدا $a/\sin\gamma$ است، که برابر است با $\delta + c_1\delta/\sin\gamma$ و از 2δ کمتر است زیرا $c_1 < \sin\gamma$. اکنون ملاحظه می‌کنیم که طول ضلع بزرگتر مستطیل، مجموعی از قسمتی که بالای محور x_1 و قسمتی که پایین محور x_1 قرار می‌گیرد، است. قسمت بالایی طولی برابر با مجموع شعاع دیسک به اضافه ارتفاع z دارد و برابر است با $c_1\delta + \delta\cos\gamma$ که از 2δ کوچکتر است. قسمت کوچکتر طولی برابر با $a/\tan\gamma$ دارد، که با $\delta\cos\gamma + \delta c_1\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$ برابر است و از آنجایی که c_1 از $\sin\gamma$ کوچکتر است، بنابراین طول ضلع آن را می‌یابیم که کمتر از 4δ است.



شکل ۸.۵: دیسک $B_{c_1\delta}(z)$ و مستطیل R شامل آن

اکنون از نحوه ساخت واضح است که هر قطعه خط عمودی در R که از دیسک $B_{c_1\delta}(z)$ شروع می‌شود و در سراشیبی به صورت موازی با محور x_2 ادامه می‌یابد، با خط متصل کننده صفر به P_2 اشتراک دارد (که در امتداد ضلع مثلث است). به‌علاوه اگر طول l از این ضلع مثلث بیش از فاصله P_2 از مبدا باشد، آنگاه قطعه خط با مثلث اشتراک دارد. زمانی که این اشتراک با پاره خط شروع شده از $B_{c_2\delta}(z)$ اتفاق می‌افتد، باید با مرز Ω نیز اشتراک داشته باشد.

زیرا مثلث خارج از Ω واقع شده است. بنابراین اگر $l \geq ۲\delta$ آنگاه اشتراک مورد نظر اتفاق می‌افتد و هریک از نتایج (آ)و (ب) و (ج) برقرار می‌شود. (محدودیت $\delta \leq l/۲$ را به موقع مرتفع خواهیم کرد.)

اکنون روی پاره خط‌های موازی با محور $x_۲$ در R انتگرال می‌گیریم که قسمتی از آن شامل $B_{c_۱\delta}(z)$ می‌شود، و در سراشیبی قرار می گیرد تا به $\partial\Omega$ برسد. آن را پاره خط $I(x_۱)$ بنامید.حال با به کار بردن (۳۰.۵) می‌بینیم

$$\int_{I(x_۱)} |v(x_۱, x_۲)|^۲ dx_۲ \leq M^۲\delta^۲ \int_{I(x_۱)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_۲}(x_۱, x_۲)\right|^۲ dx_۲,$$

و از انتگرال گیری نسبت به $x_۱$ داریم

$$\int_{R\cap\Omega} |v(x)|^۲ dx \leq M\delta^۲ \int_{R\cap\Omega} |\nabla v(x)|^۲ dx.$$

همچنان توجه می کنیم اگر $c_۲ \geq ۲$ آنگاه $B_{c_۱\delta}(z) \subset R$ و

$$B_{c_۲\delta}(z) \supset R$$

. بنابراین نامساوی مورد انتظار، (۳۲.۵) برقرار می‌شود، همچنان تحت این فرض که، δ کوچک است، یعنی $\delta \leq l/۲$. زمانی که

$$\delta > l/۲$$

کافی است صرفا تخمین (۲۸.۵) را به کار ببریم و قضیه ثابت می‌شود. بنابراین برهان قضیه کامل است.

۵.۵ تمرین‌ها

۱. فرض کنید $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ و $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(آ) نشان دهید که تقریبا به ازای هر x،

$$(f * k)(x) = \int f(x-y)k(y)dy$$

همگراست.

(ب) ثابت کنید $\|f * k\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

(ج) ثابت کنید تقریبا به ازای هر ξ، داریم $(\widehat{f * k})(\xi) = \hat{k}(\xi)\hat{f}(\xi)$.

(د) عملگر $Tf = f*k$ عملگر ضربگر فوریه با ضربگر $m(\xi) = \hat{k}(\xi)$ است.

راهنمایی: تمرین ۲۱ فصل ۲ را ببینید.

۲. **تبدیل ملین**[1] را درنظر بگیرید، که در ابتدا برای توابع پیوسته

1. Mellin

با تکیه‌گاه فشرده روی $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}, \quad t > ۰\}$ و $x \in \mathbb{R}$ به صورت

$$\mathcal{M}f(x) = \int_۰^\infty f(t)t^{ix-۱}dt,$$

تعریف شده است.

ثابت کنید $(۲\pi)^{-۱/۲}\mathcal{M}$ به یک عملگر یکانی از $L^۲(\mathbb{R}^+, dt/t)$ به $L^۲(\mathbb{R})$ توسیع می‌یابد. تبدیل ملین روی R^+ با ساختار ضربی‌اش، مشابه با هدف تبدیل فوریه روی $\mathbb{R}$، با ساختار جمعی آن تعریف می شود.

۳. فرض کنید $F(z)$ تابع تحلیلی کراندار روی نیم صفحه باشد. به هر یک از دو روش نشان دهید که به ازای تقریبا هر x، $\lim_{y\to ۰} F(x+iy)$ وجود دارد.

(آ) با به کار بردن این قانون که $F(z)/(z+i)$ در $H^۲(\mathbb{R}^۲_+)$ است.

(ب) با توجه به این‌که، $G(z) = F\Big(i\dfrac{۱-z}{۱+z}\Big)$ یک تابع تحلیلی کراندار روی دیسک واحد است ، همچنین تمرین ۱۷ فصل قبل را به کار ببرید.

۴. تابع $F(z) = e^{iz}/(z+i)$ را روی نیم صفحه بالایی در نظر بگیرید. توجه کنید که به ازای هر $y \geq ۰$ و $y = ۰$، داریم $F(x+iy) \in L^۲(\mathbb{R})$.

همچنین ملاحظه کنید، وقتی که $|z| \to 0$، $F(z) \to 0$. با این وجود چرا $F \notin H^2(\mathbb{R}^2_+)$؟

۵. برای $a < b$، فرض کنید $S_{a,b}$، نوار $\{z = x + iy,\ a < y < b\}$باشد. $H^2(S_{a,b})$ را فضای توابع همدیس F در $s_{a,b}$ در نظربگیرید، به‌طوری‌که

$$\|F\|^2_{H^2(S_{a,b})} = \sup_{a<y<b} \int_{\mathbb{R}^2} |F(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

$H^2(S_{a,\infty})$ و $H^2(S_{-\infty,b})$ را صورت های بدیهی از فضاهای هاردی به ترتیب برای نیم صفحه‌های $\{z = x + iy,\ y > a\}$ و

$$\{z = x + iy,\ y < b\}$$

در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید که $F \in H^2(S_{a,b})$، اگر و فقط اگر F به صورت

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i z \xi} d\xi,$$

نوشته شود، که در آن

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 (e^{4\pi a \xi} + e^{4\pi b \xi}) d\xi < \infty.$$

(ب) ثابت کنید که هر $F \in H^2(S_{a,b})$ به صورت $F = G_1 + G_2$ تجزیه می‌شود، که در آن $G_1 \in H^2(S_{a,\infty})$ و $G_2 \in H^2(S_{-\infty,b})$.

(ج) نشان دهید $\lim_{a<y<b, y\to a} F(x+iy) = F_a(x)$ در نرم $L^۲$ به صورت تقریبا همه جا موجود است. همچنین تقریبا همه‌جا، نتیجه مشابهی برای $\lim_{a<y<b, y\to b} F(x+iy)$ برقرار است.

۶. فرض کنید Ω مجموعه‌ای باز در $\mathbb{C} = \mathbb{R}^۲$ باشد و فرض کنید $\mathcal{H}$ زیرفضای $L^۲(\Omega)$ باشد که شامل توابع تحلیلی روی Ω می‌شود. نشان دهید که $\mathcal{H}$ یک زیرفضای بسته از $L^۲(\Omega)$ و بنابراین یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_\Omega f(z)\overline{g}(z)dxdy,$$

است که در آن $z = x + iy$.

راهنمایی: ثابت کنید که برای $f \in \mathcal{H}$ ، با به کاربردن خاصیت مقدار میانگین ۹.۵، برای $z \in \Omega$ داریم $|f(z)| \leq \frac{c}{d(z, \Omega^c)}\|f\|$ که در آن

$$c = \pi^{-۱/۲}$$

. بنابراین اگر $\{f_n\}$ یک دنباله کشی در $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی Ω همگرای یکنواخت است.

۷. در ادامه تمرین قبل، ثابت کنید:

(آ) اگر $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه از $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه به ازای $z\in\Omega$،

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(z)|^2\leq\frac{c^2}{d(z,\Omega^c)}.$$

(ب) مجموع

$$B(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n}(w),$$

برای $(z,w)\in\Omega\times\Omega$ همگرای مطلق است و از انتخاب پایه متعامد یکه $\{\varphi_n\}$ برای $\mathcal{H}$ مستقل است.

(ج) برای اثبات (ب) بهتر است که تابع $B(z,w)$ که **هسته برگمن** نامیده می شود، را با خاصیت زیر شناسایی کنیم. فرض کنید T تبدیل خطی روی $L^2(\Omega)$ باشد که با

$$Tf(z)=\int_{\Omega}B(z,w)f(w)dudv,$$

و $w=u+iv$ تعریف می‌شود. در این صورت، T تصویر متعامد از $L^2(\Omega)$ به $\mathcal{H}$ است.

(د) فرض کنید Ω یک دیسک یکه است. در این صورت، $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ به $\mathcal{H}$ متعلق است، دقیقا زمانی که

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2(n+1)^{-1}<\infty.$$

همچنین دنباله $\left\{\frac{z^n(n+1)}{\pi^{1/2}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه $\mathcal{H}$ است. به‌علاوه در این حالت

$$B(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}.$$

۸. در ادامه‌ی تمرین ۶، فرض کنید Ω نیم صفحه بالایی $\mathbb{R}^2_+$ باشد. آنگاه هر تابع $f \in \mathcal{H}$ نمایشی به صورت

$$f(z) = \sqrt{4\pi}\int_0^{\infty} \hat{f}_0(\xi)e^{2\pi i\xi z}d\xi, \qquad (۳۴.۵)$$

برای $z \in \mathbb{R}^2_+$ دارد، که در آن، $\int_0^{\infty}|\hat{f}_0(\xi)|^2\frac{d\xi}{\xi} < \infty$ به‌علاوه، نگاشت $\hat{f}_0 \to f$ که به‌وسیله ۳۴.۵ ارائه می‌شود نگاشت یکانی از $L^2((0,\infty), d\xi/\xi)$ به $\mathcal{H}$ است.

۹. فرض کنید H تبدیل هیلبرت باشد. ثابت کنید

(آ) $H^* = -H$، $H^2 = -I$ و H یکانی است.

(ب) اگر T_h عملگر انتقال $\tau_h(f)(k) = f(x-h)$ باشد، آنگاه H با τ_h جابجا می‌شود $\tau_h H = H\tau_h$.

(ج) اگر δ_a عملگر انبساط را مشخص کند، و $\delta_a(f)(x) = f(ax)$ برای $a > 0$ باشد، آنگاه H با δ_a جابجا می‌شود، $\delta_a H = H\delta_a$. برعکس آن در مسأله ۵ ارائه شده است.

۱۰. فرض کنید $f \in L^{۲}(\mathbb{R})$ و فرض کنید $u(x,y)$ انتگرال پواسون f باشد، به این معنا $u = (f * \mathcal{P}_y)(x)$ که در ۱۰.۵ ارائه شده است. فرض کنید $v(x,y) = (Hf * \mathcal{P}_y)(x)$ انتگرال پواسون تبدیل هیلبرت f باشد. ثابت کنید:

(آ) $F(x+iy) = u(x,y) + iv(x+y)$ در نیم صفحه $\mathbb{R}^{۲}_{+}$ تحلیلی است، به‌طوری که u و v توابع همساز مزدوج هستند. همچنین داریم

$$f = \lim_{y \to ۰} u(x,y)$$

و

$$Hf = \lim_{y \to ۰} v(x,y)$$

.

(ب) $F(z) = \frac{۱}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{dt}{t-z}$.

(ج) $v(x,y) = f * \mathcal{Q}_y$ که در آن $\mathcal{Q}_y(x) = \frac{۱}{\pi} \frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}$ هسته پواسون مزدوج است.

راهنمایی: توجه کنید $\frac{i}{\pi z} = \mathcal{P}_y(x) + i\mathcal{Q}_y(x)$، $z = x + iy$

۱۱. نشان دهید که

$$\left\{ \frac{۱}{\pi^{۱/۲}(i+z)} \left(\frac{i-z}{i+z})^{n} \right) \right\}_{n=۰}^{\infty}$$

پایه متعامد یکه $H^{\text{۲}}(\mathbb{R}^{\text{۲}}_{+})$ است.
توجه کنید $\left\{\frac{\text{۱}}{\pi^{\text{۱/۲}}(i+x)}\left(\frac{i-x}{i+x})^n\right)\right\}_{n=\circ}^{\infty}$ پایه متعامد یکه $L^{\text{۲}}(\mathbb{R})$ است، تمرین ۹ فصل قبل را ببینید.
راهنمایی: کافی است نشان دهید که اگر $F \in H^{\text{۲}}(\mathbb{R}^{\text{۲}}_{+})$، به ازای $n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$،

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{(x+i)^n}{(x-i)^{n+\text{۱}}}dx = \circ,$$

آنگاه $F = \circ$. با استفاده از فرمول انتگرال کشی ثابت کنید

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n (F(z)(z+i)^{\text{۲}})|_{z=i} = \circ,$$

و بنابراین به ازای $n = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots$ داریم، $F^{(n)}(i) = \circ$.

۱۲. بررسی می‌کنیم که آیا برای مجموعه‌های باز و کراندار Ω، نامساوی

$$\|u\|_{L^{\text{۲}}(\Omega)} \leq c\|L(u)\|_{L^{\text{۲}}(\Omega)}$$

برقرار است یا نه.

(آ) فرض کنید $d \geq \text{۲}$، نشان دهید به ازای هر عملگر دیفرانسیل جزئی با ضریب ثابت L، مجموعه‌های باز همبند و بی‌کران Ω وجود دارند، به‌طوری که برای آن‌ها عبارت بالا به ازای هر $u \in C_\circ^{\infty}(\Omega)$ برقرار است.

(ب) نشان دهید به ازای هر $u \in C_\circ^\infty(\mathbb{R}^d)$، $\|u\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)} \leq c\|L(u)\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)}$
اگر و فقط اگر برای هر ξ داشته باشیم، $|P(\xi)| \geq c > \circ$، که
در آن P، چند جمله‌ای مشخصه L است.
راهنمایی: برای (آ) ابتدا $L = (\partial/\partial x_۱)^n$ و نوار

$$\{x : -۱ < x_۱ < ۱\}$$

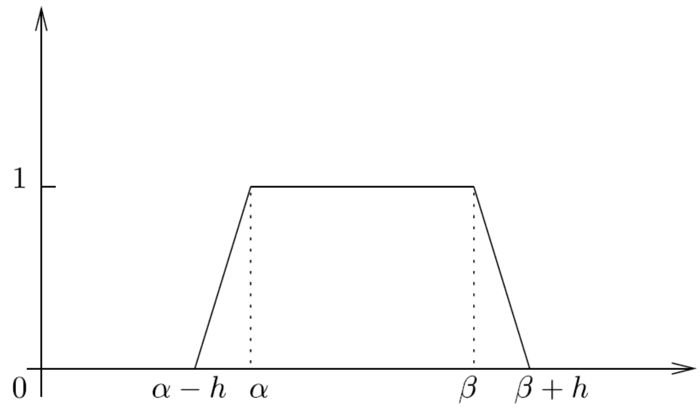
را در نظر بگیرید.

۱۳. فرض کنید L عملگر دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت باشد. نشان دهید که هرگاه $d \geq ۲$ فضای خطی جواب‌های u از $L(u) = \circ$ با شرط $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$، از بعد متناهی نیست.

راهنمایی: صفرهای ζ از $P(\zeta)$، $\zeta \in \mathbb{C}^d$ را در نظر بگیرید که در آن P چند جمله‌ای مشخصه L است.

۱۴. فرض کنید F و G دو تابع انتگرالپذیر روی بازه کراندار $[a, b]$ باشند. نشان دهید که G مشتق ضعیف F است، اگر و فقط اگر F روی مجموعه‌ای با اندازه صفر تصحیح شود، به‌طوری‌که F پیوسته مطلق باشد و تقریبا به ازای هر x، $F'(x) = G(x)$.

راهنمایی: اگر G مشتق ضعیف F باشد، تقریبی را به کار ببرید



شکل ۹.۵: تابع φ در تمرین ۱۴

که نشان دهد رابطه

$$\int_a^b G(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx,$$

برای تابع φ که در تصویر ۹.۵ نشان داده شده است، برقرار است.

۱۵. فرض کنید $f \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$. ثابت کنید $g \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) = g(x)$$

به معنی ضعیف برقرار است، اگر و فقط اگر

$$(۲\pi i\xi)^{\alpha}\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \in L^{۲}(\mathbb{R}^d).$$

۱۶. **قضیه نشاندن سوبولوف**[1]. فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح باشد که بزرگتر از $d/۲$ است. اگر به ازای هر α که $۱ \leq |\alpha| \leq n$، به مفهوم ضعیف داشته باشیم

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) \in L^{۲}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{و} \qquad f \in L^{۲}(\mathbb{R}^d)$$

آنگاه f می‌تواند روی مجموعه‌ای با اندازه صفر اصلاح شود، به‌طوری‌که f پیوسته و کراندار باشد.

راهنمایی: f را بر حسب $\hat{f}$ تعریف کنید و به کمک نامساوی کشی-شوارتس نشان دهید $\hat{f} \in L^{۱}(\mathbb{R}^d)$.

۱۷. نتیجه قضیه سوبولوف در حالتی که $n = d/۲$، برقرار نیست. حالت $d = ۲$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $f(x) = (\log ۱/|x|)^{\alpha}\eta(x)$ که در آن η تابعی تکه ای هموار است که به ازای هر x در نزدیکی مبدا $\eta = ۱$ و برای $|x| \geq ۱/۲$، $\eta(x) = ۰$. قرار دهید $۰ < \alpha < ۱/۲$.

(آ) بررسی کنید $\partial f/\partial x_۱$ و $\partial f/\partial x_۲$ به صورت ضعیف در $L^۲$ هستند.

(ب) نشان دهید که f نمی‌تواند روی مجموعه‌ای با اندازه صفر

1. Sobolev

تصحیح شود، به‌طوری که تابع حاصل در مبدا پیوسته باشد.

۱۸. عملگر مشتق جزئی خطی

$$L = \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha,$$

را در نظر بگیرید. در این صورت،

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq n} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha,$$

چند جمله‌ای مشخصه L نامیده می‌شود. عملگر مشتق L بیضوی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای یک $c > 0$ و همه ξ های به قدرکافی بزرگ داشته باشیم،

$$|P(\xi)| \geq c|\xi|^n.$$

(آ) بررسی کنید L بیضوی است، اگر و فقط اگر $\sum_{|\alpha|=n} a_\alpha (2\pi\xi)^\alpha$ تنها برای $\xi = 0$، صفر شود.

(ب) اگر L بیضوی باشد، ثابت کنید به ازای یک $c > 0$ نامساوی

$$\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\Big(\|L\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big)$$

برای هر $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ و $|\alpha| \leq n$ برقرار است.

(ج) برعکس، اگر (ب) برقرار باشد، آنگاه L بیضوی است.

۱۹. فرض کنید u روی دیسک یکه سوراخ دار

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < |z| < ۱\}$$

، همساز است.

(آ) نشان دهید که اگر u در مبدا پیوسته باشد، آنگاه u روی سرتاسر گوی یکه، همساز است.
راهنمایی: نشان دهید u به‌صورت ضعیف همساز است.

(ب) ثابت کنید، در حالت کلی مسأله دیریکله برای گوی یکه سوراخ دار حل نشدنی است.

۲۰. فرض کنید F تابع پیوسته‌ای روی بستار $\overline{D}$ از گوی یکه باشد. فرض کنید F روی دیسک (باز) $\mathbb{D}$ تابعی در $C^۱$ باشد و

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla F|^۲ < \infty$$

.

فرض کنید $f(e^{i\theta})$ تحدید F به دایره یکه باشد و بنویسید

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

، ثابت کنید $\sum_{-\infty}^{\infty}|n||a_n|^۲ < \infty$.

راهنمایی: بنویسید $F(re^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(r)e^{in\theta}$، و $F_n(۱) = a_n$. کمیت $\int_{\mathbb{D}}|\nabla F|^۲$ را در مختصات قطبی توصیف کنید و ازاین حقیقت استفاده کنید که به ازای $L \geq ۲$

$$\frac{۱}{۲}|F(۱)|^۲ \leq L^{-۱}\int_{۱/۲}^{۱}|F'(r)|^۲dr + L\int_{۱/۲}^{۱}|F(r)|^۲dr.$$

این رابطه را برای $L = |n|$ و $F = F_n$ به کار ببرید.

۶.۵ مسائل

۱. فرض کنید $F_\circ(x) \in L^۲(\mathbb{R})$. شرط لازم و کافی برای وجود یک تابع تام تحلیلی که به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ و تقریبا به ازای هر x، $F_\circ(x) = F(x)$، $|F(z)| \leq Ae^{a|z|}$. این است که هرگاه

$$|\xi| > a/۲\pi$$

، داشته باشیم $\hat{F}_\circ(\xi) = \circ$. راهنمایی: منظم سازی

$$F^\epsilon(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-t)\varphi_\epsilon(t)$$

را در نظر بگیرید و ملاحظات قضیه ۳،۳ فصل ۴ جلد ۲ را به کار ببرید.

۲. فرض کنید Ω زیرمجموعه باز و کرانداری در $\mathbb{R}^۲$ باشد. **قوس لیپ شیتس مرزی** γ بخشی از $\partial\Omega$ است،که بعد از یک دوران محورها به‌صورت

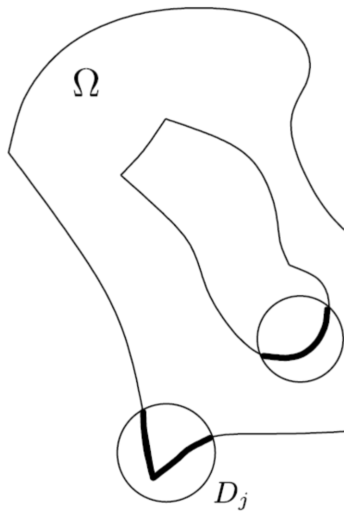
$$\gamma = \{(x_۱, x_۲) : x_۲ = \eta(x_۱), a \leq x_۱ \leq b\}$$

نمایش داده می‌شود که در آن $a < b$ و $\gamma \subset \partial\Omega$. همچنین فرض می‌شود که هرگاه $x_۱, x'_۱ \in [a, b]$،

$$|\eta(x_۱) - \eta(x'_۱)| \leq M|x_۱ - x'_۱|, \qquad (۳۵.۵)$$

و به‌علاوه اگر $\gamma_\delta = \{(x_۱, x_۲) : x_۲ - \delta \leq \eta(x_۱) \leq x_۲\}$، آنگاه برای یک $\delta > ۰$، $\gamma_\delta \cap \Omega = \emptyset$. (توجه کنید، اگر $\eta \in C^۱([a, b])$، آنگاه شرط ۳۵.۵ برقرار می‌شود).

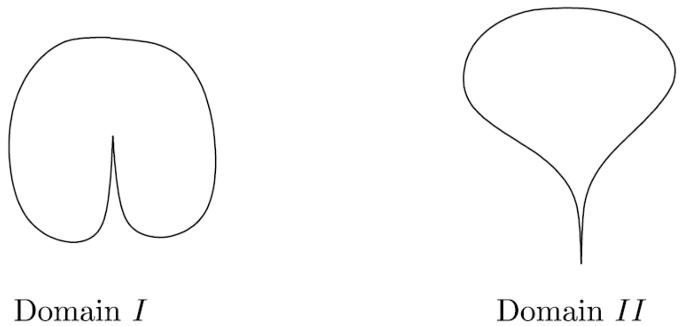
فرض کنید Ω در شرط زیر صدق کند. تعداد متناهی دیسک باز $D_۱, \cdots, D_N$ وجود دارد با این خاصیت که $\cup_j D_j$ شامل $\partial\Omega$ است و به ازای هر j، $\partial\Omega \cap D_j$ یک قوس لیپ شیتس مرزی است. (تصویر ۱۰.۵ را ببینید) در این صورت Ω شرط مثلثی خارجی قضیه ۲۲.۵ را تأیید و حل‌پذیری مسأله مقدار مرزی را تضمین می‌کند.



شکل ۱۰.۵: دامنه‌ای با قوس لیپ شیتس مرزی

۳*. فرض کنید دامنه کراندار Ω، یک خم پیوسته‌ی ساده‌ی بسته را به‌عنوان مرز خود دارد. آنگاه مسأله مقدار مرزی برای Ω حل پذیر است. این حکم به خاطر وجود یک نگاشت همدیس ϕ از دیسک یکه $\mathbb{D}$ به Ω است که به یک نگاشت دوسویی پیوسته از $\overline{\mathbb{D}}$ به $\overline{\Omega}$ توسیع می‌یابد. (بخش ۱,۳ و مسأله ۶ در فصل ۸ جلد ۲ را ببینید)

۴. دو دامنه Ω در $\mathbb{R}^2$ که با تصویر ۱۱.۵ ارائه می‌شوند را درنظر



شکل ۱۱.۵: دامنه‌هایی با تیزی

بگیرید. مجموعه I یک خم هموار را به‌عنوان مرز خودش دارد، به استثنا یک نقطه تیزی (به تو). مجموعه II نیز مشابه است، به استثنا این که یک تیزی به سمت بیرون دارد. هردو I و II در حیطه‌ی نتیجهٔ مسأله ۳ قرار می‌گیرند، و بنابراین مسأله مقدار مرزی به هر صورت حل شدنی است. با این وجود، II در شرط مثلث خارجی صدق می کند، در حالی که I چنین است.

۵. فرض کنید T یک عملگر ضربگر فوریه روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشد. فرض کنید تابع کراندار m وجود دارد، به‌طوری‌که به ازای

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

، $(\widehat{Tf})(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi).$ در این صورت T با انتقال‌ها جابجا

می‌شود، به این معنا که به ازای هر $h \in \mathbb{R}^d$، $\tau_h T = T\tau_h$، که در آن $T_h(f)(x) = f(x-h)$.

برعکس هر عملگر کراندار روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ که با انتقال ها جابجا می شود، عملگر ضربگر فوریه است.

راهنمایی: کافی است ثابت کنید اگر عملگر $\hat{T}$ با عملگر ضرب به وسیله نمایی‌های $e^{2\pi i\xi\cdot h}$، $h \in \mathbb{R}^d$ جا بجا شود، آنگاه m وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$، $\hat{T}g(\xi) = m(\xi)g(\xi)$. برای مشاهده این امر، ابتدا نشان دهید هرگاه $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ برای هر $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{T}(\phi g) = \phi\hat{T}(g).$$

سپس برای N به قدر کافی بزرگ، ϕ را به گونه‌ای انتخاب کنید که روی $|\xi| \le N$ برابر با ۱ باشد. آنگاه به ازای $|\xi| \le N$، $m(\xi) = \hat{T}(\phi)(\xi)$.

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه نشان دهید که اگر T عملگر کرانداری روی $L^2(\mathbb{R})$ باشد، که با انتقال‌ها جابجا می‌شود (همانند تمرین ۹ بالا) آنگاه

(آ) اگر $(Tf)(-x) = T(f(-x))$، آنگاه $T = cI$، که در آن c ثابت مناسبی است و I عملگر همانی است.

(ب) اگر $(Tf)(-x) = -T(f(-x))$, آنگاه $T = cH$، که در آن C ثابت مناسبی است و H تبدیل هیلبرت است.

۶. این مسأله مثالی از تفاوت بین آنالیز روی $L^1(\mathbb{R}^d)$ و $L^2(\mathbb{R}^d)$ است. به یاد آورید که اگر f روی $\mathbb{R}^d$ موضعا انتگرالپذیر باشد، تابع ماکزیمال f^* به صورت

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy,$$

تعریف می‌شود، که در آن سوپریمم روی همه گوی‌های شامل نقطه x گرفته می‌شود.

طرح زیر را تکمیل نمایید، تا ثابت کنید که ثابت C وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\|f^*\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

به عبارت دیگر نگاشتی که f را به f^* می نگارد، اگر چه غیر خطی است، ولی روی $L^2(\mathbb{R}^d)$ کراندار است. این مورد تفاوت آشکاری با حالت $L^1(\mathbb{R}^d)$ دارد، که در فصل ۳ به آن اشاره کردیم.

(آ) به ازای هر $\alpha > 0$ ثابت کنید، اگر $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$، آنگاه

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{2A}{\alpha} \int_{|f|>\alpha/2} |f(x)|dx,$$

در این جا $A = 3^d$ کارا است.

راهنمایی: فرض کنید $f_1(x) = f(x)$ اگر $|f(x)| \geq \alpha/2$ و در غیر این صورت مساوی صفر است. بررسی کنید $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ و

$$\{x : f^*(x) > \alpha\} \subset \{x : f_1^*(x) > \alpha/2\}.$$

(ب) نشان دهید

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f^*(x)|^2 dx = 2 \int_0^\infty \alpha m(E_\alpha) d\alpha$$

که در آن $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$.

(ج) ثابت کنید که در آن $\|f^*\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

اج

فصل ۶

اندازه مجرد و نظریه انتگرال‌گیری

مطلبی که بی‌درنگ خود را نمایان می‌کند، این است که با ذات این خواص مشخصه، از طریق تعریف و مطالعه اشیاء انتزاعی که لازم نیست در شرایط دیگری به جز نظریه‌های مورد نیاز توسعه یابند، به‌عنوان عوامل اصلی تحقیق برخورد می‌شود.

این روش توسط ریاضیدانان–کم و بیش آگاهانه– در هر دوره استفاده شده است. هندسه اقلیدس و جبر در سده شانزدهم و هفدهم به این صورت رشد کردند. اما تنها در سال‌های اخیر است که روش‌های «اصول موضوعی» به طور مداوم توسعه یافتند و مسیر منطقی خود را طی کردند.

هدف این است که نظریه‌های اندازه و انتگرال را با ابزار روش‌های اصول موضوعی همان‌گونه که شرح دادیم، مطالعه کنیم.

لی. کاراتئودوری، ۱۹۱۸

در بخش‌های زیادی از ریاضیات، انتگرالگیری نقش اساسی بازی می‌کند. این مفهوم وقتی با سؤالاتی در آنالیز فضاهای متفاوت سروکار داریم، به شکل‌های مختلف به کار می‌رود. در حالی که

بعضی از مواقع کافی است تا از توابع پیوسته یا ساده روی این فضاها انتگرال بگیریم، بررسی عمیق تعداد دیگری از مسایل، به انتگرالگیری با ایده‌های انتزاعی در نظریه اندازه نیاز دارد. توسیع این ایده‌ها که از ساختار فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ فراتر می‌رود، هدف این فصل است.

نقطه شروع، چشم انداز مفیدی از قضیه‌های کاراتئودوری و نتایج آن است که به ساختن اندازه در شرایط کلی تر منجر می‌شود. پس از دست یابی به این امر، استنتاج حقایق اساسی در نظریه انتگرال‌گیری در صورت کلی آن حاصل خواهد شد.

ما نظریه‌ای مجرد را به‌کار می‌بریم تا نتایج مفیدی را بیابیم: نظریه اندازه‌های حاصلضربی؛ فرمول انتگرالگیری در مختصات قطبی، که نتیجه‌ای از آن است؛ ساختن انتگرال لبگ- اشتیلیس و اندازه بورل متناظر آن روی خط حقیقی و مفهوم کلی پیوستگی مطلق. در انتها، بعضی از قضیه‌های مقدماتی حد از نظریه ارگودیگ را شرح می‌دهیم. این تنها یک تصویر از چهارچوب مجرد ساخته شده نیست، بلکه ارتباطی را با قضیه‌های مشتق فراهم می‌کند که در فصل ۳ مطالعه کردیم.

۱.۶ فضاهای اندازه مجرد

یک **فضای اندازه**، یک مجموعهٔ X همراه با دو شیء اساسی است:

۱. σ –جبر $\mathcal{M}$ از مجموعه‌های «اندازه پذیر»، که گردایه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X است که تحت متمم‌ها و اجتماع‌ها و اشتراک‌های شمارا بسته است.

۲. اندازه $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ با خاصیت تعریف شده در زیر :
اگر E_1 و E_2 و ... خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشند، آنگاه

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

یک فضای اندازه اغلب با سه تایی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ مشخص می‌شود، تا بر سه عضو اصلی آن تأکید شود. هرچند گاهی اوقات، زمانی که هیچ ابهامی موجود نباشد، این مفهوم را در نمایش فضای اندازه به صورت (X, μ) یا به طور ساده X خلاصه می‌کنیم.

یک ویژگی که فضای اندازه اغلب از آن برخوردار است، خاصیت σ– **متناهی** بودن است. این مفهوم به این معنی است که X می تواند به صورت اجتماعی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر شمارا از اندازه

متناهی نوشته شود. در نخستین گام، تنها دو مثال از فضاهای اندازه ارائه می‌دهیم :

۱. اولین مثال، مثال گسسته در مورد مجموعه شمارای X است، که در آن $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\mathcal{M}$ گردایه‌ای از همه زیر مجموعه‌های X است و اندازه μ به‌وسیله $\mu(x_n) = \mu_n$ **تعیین** می‌شود، که در آن $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی (توسعه یافته) را مشخص می‌کند. توجه کنید $\mu(E) = \sum_{x_n \in E} \mu_n$. زمانی که به ازای هر n، $\mu_n = 1$، μ را **اندازه شمارشی** می‌نامیم و با $\#$ نیز نمایش می‌دهیم. در این حالت انتگرالگیری حاوی هیچ چیزی جز مجموع گیری از سری های (به طور مطلق) همگرا نیست.

۲. در این مثال، $X = \mathbb{R}^d$ و $\mathcal{M}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ است و $\mu(E) = \int_E f dx$ که در آن f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی داده شده روی $\mathbb{R}^d$ است. حالت $f = 1$ با اندازه لبگ متناظر است. به‌طور شمارا جمعپذیری μ، از خواص جمعپذیری و حد گیری معمولی توابع نامنفی که در فصل ۲ ثابت شد، به دست می‌آید. ساختن فضاهای اندازه با کاربردهای بیشتر به ایده‌های زیر نیاز دارد و هم اکنون به آن می‌پردازیم.

۱.۱.۶ اندازه‌های خارجی و قضیه کاراتئودوری

برای شروع به ساختن یک اندازه و مجموعه‌های اندازه‌پذیر متناظر با آن در حالت کلی، مثل حالت خاص اندازه لبگ که در فصل ۲ مطالعه شد، به یک مفهوم پیش‌نیاز اندازه خارجی نیاز است، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید X یک مجموعه باشد. یک **اندازه بیرونی (یا اندازه خارجی)** μ_* روی X تابع m_* ازگردایه همه‌ی مجموعه‌های X به $[۰,\infty]$ است، که در شرایط زیر صدق می کند:

الف. $\mu_*(\varnothing) = ۰$.

ب. اگر $E_۱ \subset E_۲$، آنگاه $\mu_*(E_۱) \leqslant \mu_*(E_۲)$.

ج. اگر $E_۱, E_۲, ...$ خانواده شمارایی از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\mu_*(\bigcup_{j=۱}^{\infty} E_j) \leqslant \sum_{j=۱}^{\infty} \mu_*(E_j).$$

به‌عنوان نمونه، اندازه لبگ بیرونی m_* در $\mathbb{R}$، که در فصل ۱ بیان شد، از تمامی خواص برخوردار است. در حقیقت این مثال به رده بزرگی از اندازه‌های بیرونی تعلق دارد به‌طوری که با به کاربردن «پوشش‌ها» به وسیله خانواده‌ای از مجموعه‌های خاص به دست

می‌آید و اندازه‌های آن‌ها دانسته فرض می‌شوند. این ایده به وسیله مفهوم پیش اندازه که در بخش ۳.۱.۶ بیان خواهد شد، قاعده‌مند می‌شود. یک مثال متفاوت، اندازه هاسدروف α-بعدی خارجی m_α^* است که در فصل ۷ تعریف می‌شود.

با داشتن اندازه خارجی μ_*، مشکلی که با آن مواجه هستیم، این است که چطور مفهوم متناظر مجموعه‌های اندازه‌پذیر را می‌توان تعریف کرد. در مورد اندازه لبگ در $\mathbb{R}^d$ چنین مجموعه‌هایی به وسیله تفاضلشان از مجموعه‌های باز (یا بسته) مشخص می‌شدند، زمانی که برحسب μ_* در نظر گرفته می‌شدند. برای حالت کلی، کاراتئودری یک شرط جایگزین مبتکرانه را می‌یابد که به صورت زیر است.

مجموعه E در X **اندازه‌پذیر کاراتئودری** یا به طور ساده اندازه‌پذیر است، هرگاه به ازای هر $A \subset X$،

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A). \qquad (۱.۶)$$

به عبارت دیگر، E هر مجموعهٔ A را به دو قسمت تقسیم می‌کند که باتوجه به اندازه خارجی μ^* خوش رفتار است. به این دلیل، گاهی اوقات (۱.۶) شرط جداسازی نامیده می شود. می‌توان نشان داد که با اندازه خارجی لبگ روی $\mathbb{R}^d$، مفهوم اندازه‌پذیری (۱.۶) با تعریف اندازه‌پذیری لبگ ارائه شده در فصل ۱ معادل است. (تمرین ۳را ببینید.)

اولین نتیجه ای که به آن می‌رسیم، این است که برای این‌که ثابت کنیم یک مجموعه اندازه‌پذیر است، کافی است تأیید کنیم:

به ازای هر $A \subset X$، $\mu_*(A) \geqslant \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$.

زیرا عکس نامساوی به طور خودکار از خاصیت زیر جمعپذیری ویژگی (ج) از اندازه بیرونی حاصل می‌شود. بلافاصله از تعریف مشاهده می‌کنیم مجموعه‌های با اندازه خارجی صفر، لزوما اندازه پذیرند.

گزاره قابل توجه در مورد تعریف (۱.۶) در قضیه بعد خلاصه می‌شود.

قضیه ۱.۶. یک اندازه بیرونی μ_* روی مجموعهٔ X داده شده است، گردایه $\mathcal{M}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر کارا تئودوری یک σ -جبر تشکیل می‌دهند. به‌علاوه تحدید μ_* به $\mathcal{M}$ یک اندازه است.

برهان. به وضوح، $\varnothing$ و X متعلق به $\mathcal{M}$ است و تقارن به ارث رسیده از شرط (۱.۶) نشان می‌دهد $E^c \in \mathcal{M}$ هرگاه $E \in \mathcal{M}$. بنابراین $\mathcal{M}$ تهی نیست و تحت متمم‌ها بسته است. حال ثابت می‌کنیم $\mathcal{M}$ تحت اجتماع‌های متناهی مجموعه‌های مجزا بسته است و μ_* روی $\mathcal{M}$ به طور متناهی جمعپذیر است. در واقع اگر، $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ و A یک زیر

مجموعهٔ X باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\mu_*(A) &= \mu_*(E_2 \cap A) + \mu_*(E_2^c \cap A)\\ &= \mu(E_1 \cap E_2 \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2 \cap A)\\ &+ \mu_*(E_1 \cap E_2^c \cap A) + \mu_*(E_1^c \cap E_2^c \cap A)\\ &\geqslant \mu_*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu_*((E_1 \cup E_2)^c \cap A),\end{aligned}$$

که در آن در دو خط اول شرط اندازه‌پذیری را روی E_2 و سپس E_1 به کار می‌بریم و نامساوی پایانی با به کاربردن زیر جمعپذیری μ_* و قانون

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)$$

به دست می‌آید. بنابراین داریم $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ و اگر E_1 و E_2 مجزا باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}\mu_*(E_1 \cap E_2) &= \mu_*(E_1 \cap (E_1 \cap E_2)) + \mu_*(E_1^c \cap (E_1 \cup E_2))\\ &= \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2).\end{aligned}$$

سرانجام، کافی است نشان دهیم $\mathcal{M}$، تحت اجتماع‌های شمارای مجموعه‌های مجزا بسته است و μ_* روی $\mathcal{M}$ به طور شمارا جمعپذیر است. فرض کنید E_1 و E_2 و... گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ را مشخص کند و تعریف می‌کنیم

$$G_n=\bigcup_{j=1}^{n}E_j \quad \text{و} \quad G=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j.$$

به ازای هر n، مجموعهٔ G_n گردایه‌ای متناهی از مجموعه‌ها در $\mathcal{M}$ است، بنابراین $G_n\in\mathcal{M}$. به‌علاوه به ازای هر $A\subset X$، داریم

$$\begin{aligned}\mu_*(G_n\cap A)&=\mu_*(E_n\cap(G_n\cap A))+\mu_*(E_n^c\cap(G_n\cap A))\\&=\mu_*(E_n\cap A)+\mu_*(G_{n-1}\cap A)\\&=\sum_{j=1}^{n}\mu_*(E_j\cap A),\end{aligned}$$

تساوی آخر به وسیله استقرا به‌دست می‌آید. از آنجایی که می‌دانیم، $G_n\in\mathcal{M}$ و $G^c\subset G_n^c$، درمی‌یابیم،

$$\mu_*(A)=\mu_*(G_n\cap A)+\mu_*(G_n^c\cap A)\geqslant\sum\mu_*(E_j\cap A))+\mu_*(G^c\cap A).$$

وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، داریم

$$\begin{aligned}\mu_*(A)\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)&\geqslant\mu_*(G\cap A)+\mu_*(G^c\cap A)\\&\geqslant\mu_*(A).\end{aligned}$$

بنابراین، همه نامساوی‌های بالا به صورت تساوی برقرارند و نتیجه می‌گیریم که $G\in\mathcal{M}$، همان‌طور که انتظار داشتیم. به‌علاوه با قرار

دادن $A = G$ در فرمول‌های بالا داریم که μ_* روی $\mathcal{M}$ به طور شمارا جمعی است . $\square$

نتیجه قبل که مجموعه‌هایی با اندازه بیرونی صفر، اندازه‌پذیر کاراتئودوری هستند، نشان می‌دهد فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ به دست آمده در قضیه کامل است. هرگاه $F \in \mathcal{M}$ در شرط $\mu(F) = \circ$ و $E \subset F$ صدق کند، آنگاه $E \in \mathcal{M}$.

۲.۱.۶ اندازه‌های بیرونی متری

اگر مجموعهٔ زمینه‌ای X با یک « تابع فاصله» یا «متر» سرو کار داشته باشد، یک رده به خصوص از اندازه‌های بیرونی وجود دارد که در عمل قابل توجه است. اهمیت اندازه‌های بیرونی در این است که آن‌ها، اندازه‌های روی σ −جبر طبیعی را که به وسیله‌ی مجموعه‌های باز در X تولید شوند، به دست می‌دهند.

یک **فضای متری**، یک مجموعهٔ X است که با تابع $d : X \times X \to [\circ, \infty]$ سرو کار دارد و در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(x, y) = \circ$، اگر و فقط اگر $x = y$.

۲. به ازای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$.

۳. به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, z) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$.

ویژگی آخر نامساوی مثلثی نامیده می‌شود و تابع d که در همه این شرایط صدق کند، یک **متر** روی X نامیده می‌شود. برای مثال، مجموعهٔ $\mathbb{R}^d$ با

$$d(x, y) = |x - y|$$

یک فضای متری است. مثال دیگر به وسیله فضای توابع پیوسته روی مجموعه فشرده K با $d(f, g) = \sup_{x\in K} |f(x) - g(x)|$ فراهم می‌شود.

فضای متری (X, d) به طور طبیعی با خانواده‌ای از گوی‌های باز سرو کار دارد. در اینجا

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

گوی باز به شعاع r و به مرکز x را مشخص می‌کند. به‌علاوه می‌گوییم مجموعهٔ $\mathcal{O} \subset X$ **باز** است، هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{O}$، $r > ۰$ وجود داشته باشد، به طوری که گوی باز $B_r(x)$ مشمول در $\mathcal{O}$ باشد. یک مجموعه **بسته** است، اگر متمم آن باز باشد. با این تعاریف، به راحتی می‌توان بررسی کرد، اجتماع « دلخواهی» از مجموعه‌های باز، باز است و اشتراک مشابهی از مجموعه‌های بسته، بسته است. سر انجام روی فضای متری، همانند بخش ۳.۱ فصل ۱، **σ-جبر بورل** $\mathcal{B}_X$ را که کوچک‌ترین σ -جبر از مجموعه‌های X است و شامل مجموعه‌های باز X می‌شود، می‌توانیم تعریف کنیم. به عبارت دیگر $\mathcal{B}_X$ اشتراک

همه σ −جبرهایی است که شامل مجموعه‌های باز می‌شوند. عناصر $\mathcal{B}_x$ مجموعه‌های **بورل** نامیده می‌شوند.

اکنون توجه خویش را به اندازه‌های خارجی روی X با خاصیت ویژه‌ی جمعپذیر بودن روی مجموعه‌هایی معطوف می‌کنیم که « به خوبی جدا شدنی » باشند. نشان می‌دهیم این خاصیت تضمین می‌کند که این اندازه خارجی یک اندازه روی σ −جبر بورل تعریف می کند. این حقیقت با ثابت کردن این که همه مجموعه‌های بورل، اندازه‌پذیر کاراتئودوری هستند، به‌دست می‌آید.

دو مجموعهٔ A و B در فضای متری (X, d) داده شده اند، **فاصله** بین A و B با

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\},$$

تعریف می‌شود. در این صورت اندازه‌ی خارجی μ_* روی X یک **اندازه خارجی متری** است، اگر در

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B) \text{ ، \textbf{هرگاه} } d(A, B) > \circ$$

صدق کند. این خاصیت نقش کلیدی را در مورد اندازه لبگ خارجی بازی می‌کند.

قضیه ۲.۶. اگر μ_* یک اندازه خارجی متری روی فضای متری X باشد، آنگاه مجموعه‌های بورل، اندازه‌پذیر هستند. بنابراین μ_* تحدید به $\mathcal{B}_x$ یک اندازه است.

برهان. طبق تعریف $\mathcal{B}_x$ کافی است ثابت کنیم مجموعه‌های بسته در X، اندازه‌پذیر کاراتئودوری هستند. بنابراین فرض کنید F یک مجموعهٔ بسته را مشخص کند و A زیر مجموعه‌ای از X با $\mu_*(A) < \infty$ باشد. به ازای هر $n > ۰$ فرض کنید

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : d(x, F) \geqslant \frac{۱}{n}\},$$

آنگاه $A_n \subset A_{n+۱}$ و از آنجایی که F بسته است، داریم $F^c \cap A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$. همچنین، فاصله بین $F \cap A$ و A_n بزرگتر از $\frac{۱}{n}$ است و از آنجایی که μ اندازه خارجی متری است، داریم

$$\mu_*(A) \geqslant \mu_*((F \cap A) \cup A_n) = \mu_*(F \cap A) + \mu_*(A_n). \qquad (۲.۶)$$

حال ادعا می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \mu_*(A_n) = \mu_*(F^c \cap A), \qquad (۳.۶)$$

برای مشاهده این امر، فرض کنید $B_n = A_{n+۱} \cap A_n^c$ و توجه کنید

$$d(B_{n+۱}, A_n) \geqslant \frac{۱}{n(n+۱)}.$$

در واقع اگر $x \in B_{n+۱}$ و $d(x, y) < \frac{۱}{n(n+۱)}$، نامساوی مثلثی نشان می‌دهد که $d(y, F) < \frac{۱}{n}$. بنابراین $y \notin A_n$ پس

$$\mu_*(A_{۲k+۱}) \geqslant \mu_*(B_{۲k} \cup A_{۲k-۱}) = \mu_*(B_{۲k}) + \mu_*(A_{۲k-۱}),$$

و این به این معنا است که

$$\mu_*(A_{۲k+۱}) \geqslant \sum_{j=۱}^{k} \mu_*(B_{۲j}).$$

استدلالی مشابه نیز نتیجه می‌دهد

$$\mu_*(A_{۲k}) \geqslant \sum_{j=۱}^{k} \mu_*(B_{۲j-۱}).$$

از آنجایی که $\mu_*(A)$ متناهی است، در می‌یابیم هر دو سری $\sum \mu_*(B_{۲j})$، $\sum \mu_*(B_{۲j-۱})$ همگرا هستند. سر انجام می‌نویسیم

$$\mu_*(A_n) \leqslant \mu_*(F^c \cap A) \leqslant \mu_*(A_n) + \sum_{j=n+۱}^{\infty} \mu_*(B_j),$$

و این حد ، ۳.۶ را ثابت می‌کند. با فرض این‌که n در نامساوی ۲.۶ به بی‌نهایت میل می‌کند در می‌یابیم، $\mu_*(A) \geqslant \mu_*(F \cap A) + \mu_*(F^c \cap A)$ و بنابراین F اندازه‌پذیر است. □

برای فضای متری X داده شده، از اندازه‌ی μ که روی مجموعه‌های بورل X **تعریف** شده‌اند، با نام **اندازه‌ی بورل** یاد می‌شود. اندازه‌های بورلی که که به گوی های (با شعاع متناهی) اندازه متناهی نسبت می دهند،در یک خاصیت منظم بودن مفید صدق می کنند. شرط

این‌که برای همه گوی‌های B، $\mu(B) < \infty$ در بسیاری از شرایط (اما نه در همه) در عمل برقرار است.[1] زمانی که این شرط برقرار باشد، قضیه زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۶. فرض کنید اندازه بورل μ روی همه گوی‌های با شعاع متناهی موجود در X، متناهی باشد. در این صورت برای هر مجموعهٔ بورل E و هر

$$\varepsilon > \circ$$

، مجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ و مجموعه بسته F وجود دارند، به طوری که $E \subset \mathcal{O}$ و $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$ و $F \subset E$ و $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

برهان. به پیش نیازهای زیر احتیاج داریم. فرض کنید $F^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ که در آن F_k ها مجموعه‌های بسته هستند. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$، مجموعهٔ بسته $F^* \supset F$ را می‌یابیم، به‌طوری که $\mu(F^* \setminus F) < \varepsilon$. برای اثبات این امر می‌توانیم فرض کنیم که دنباله $\{F_k\}$ از مجموعه ها صعودی هستند. نقطه $x_\circ \in X$ را ثابت می‌گیریم، و فرض می‌کنیم B_n گوی $\{x : d(x, x_\circ) < n\}$ را مشخص کند و $B_\circ = \{\varnothing\}$. چون $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$،

۱. این محدودیت همیشه برای اندازه‌های هاسدورفی که در فصل بعد مطالعه می‌شوند، برقرار نیست.

داریم
$$F^* = \bigcup F^* \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1}).$$
اکنون به ازای هر n، $F^* \bigcap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})$ حد دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های بسته $F_k \bigcap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})$ است، زمانی که $k \to \infty$. بنابراین (با یادآوری این که $\overline{B_n}$ اندازه متناهی دارد) می‌توانیم $N = N(n)$ را بیابیم، به طوری که
$$(F^* \setminus F_{N(n)}) \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})$$
، اندازه‌ای کمتر از $\frac{\varepsilon}{2^n}$ داشته باشد. اگر اکنون قرار دهیم
$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{N(n)} \cap (\overline{B_n} \setminus B_{n-1})).$$
اندازه $F^* \setminus F$ کمتر از $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$ به دست می‌آید. همچنین ملاحظه می‌کنیم که $F \cap \overline{B}_k$ بسته است. چرا که اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته است. بنابراین F خودش بسته است، همان‌طور که به آسانی دیده می شود هر مجموعهٔ F بسته است، هرگاه مجموعه‌های $F \cap \overline{B}_k$ به ازای هر k بسته باشند.

با اثبات نتیجه، $\mathcal{C}$ را گردایه‌ای از همه مجموعه‌هایی می‌نامیم که در شرایط گزاره صدق می‌کنند. ابتدا توجه کنید اگر E متعلق به $\mathcal{C}$ باشد، آنگاه به طور خودکار متمم آن نیز چنین است.

اکنون فرض می‌کنیم $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$، و $E_k \in \mathcal{C}$. آنگاه مجموعه‌های باز $\mathcal{O}_k$، $\mathcal{O}_k \supset E_k$ و $\mu(\mathcal{O} \backslash k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ موجود هستند. در این صورت اگر $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$، آنگاه $\mathcal{O} \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{O} \setminus k - E_k)$ و بنابراین

$$\mu(\mathcal{O} \setminus E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

سپس مجموعه‌های بسته $E_k \subset F_k$ با شرط $\mu(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ موجود هستند. بنابراین اگر $F^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$، همانند گذشته می‌بینیم $\mu(E \setminus F^*) < \varepsilon$. در این حالت، F^* لزوما بسته نیست، بنابراین می‌توانیم نتیجه اولیه را به کار ببریم تا مجموعه ی بسته $F \subset F^*$ را با شرط $\mu(F^* \setminus F) < \varepsilon$ بیابیم. پس $\mu(E \setminus F) < 2\varepsilon$. از آنجایی که ε دلخواه است، این ثابت می‌کند $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ متعلق به $\mathcal{C}$ است.

سرانجام توجه می‌کنیم هر مجموعه‌ی باز $\mathcal{O}$ در $\mathcal{C}$ است. خاصیت مربوط به شمول مجموعه‌های باز، بلافاصله نتیجه می شود. برای یافتن مجموعه ی بسته $\mathcal{O} \supset F$ به طوری که $\mu(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$، قرار دهید $F_k = \{x \in \overline{B_k} : d(x, \mathcal{O}^c) \geqslant \frac{1}{k}\}$. در این صورت واضح است هر F_k بسته است و $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. پس تنها کافی است دوباره نتیجه را به کار ببریم، تا مجموعه F مورد نیاز را بیابیم. بنابراین نشان داده‌ایم $\mathcal{C}$ یک σ−جبر است که شامل مجموعه‌های باز و در نتیجه همه مجموعه‌های بورل می‌شود. $\square$

۳.۱.۶ قضیه توسیع

همان‌طور که دیده‌ایم، هنگامی‌که با یک اندازه خارجی داده شده شروع می‌کنیم، رده‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر روی X ساخته می‌شود. هرچندکه تعریف اندازه خارجی معمولا به ایده‌ای مقدماتی‌تر از اندازه بستگی دارد، که روی رده ساده‌تری از مجموعه‌ها تعریف می‌شود. این موضوع نقش یک پیش اندازه را در زیر تعریف می‌نماید. نشان می‌دهیم هر پیش اندازه به اندازه‌ای روی X توسیع داده می‌شود.

فرض کنید X یک مجموعه باشد. یک جبر در X گردایه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X است که تحت متمم‌ها و اجتماع‌های متناهی بسته است. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر در X باشد. یک پیش اندازه روی جبر $\mathcal{A}$ تابع $\mu_\circ : \mathcal{A} \to [\circ, \infty]$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) $\mu_\circ(\varnothing) = \circ$.

(ب) اگر E_1 و E_2 و ... گردایه‌ای شمارا از مجموعه های مجزا در $\mathcal{A}$ باشند، به طوری که $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\mu_\circ(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\circ(E_k).$$

به خصوص، $\mu_\circ$ روی $\mathcal{A}$ به طور متناهی جمعپذیر است.

پیش اندازه‌ها به شکلی طبیعی به اندازه‌های خارجی بدل می‌شوند.

لم ۴.۶. اگر $\mu_\circ$ یک پیش اندازه روی جبر $\mathcal{A}$ باشد، روی هر زیر مجموعه‌ی E از X، μ_* را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mu_*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_\circ(E_j) : E_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\}.$$

آنگاه μ_* یک اندازه خارجی روی X است، که در شرایط زیر صدق می کند:

(الف) برای هر $E \in \mathcal{A}$، $\mu_*(E) = \mu_\circ(E)$.

(ب) همه مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ به معنای ۱.۶ اندازه‌پذیر هستند.

برهان. ثابت کردن این‌که μ_* یک اندازه خارجی است، بدون مشکل پیش می رود. برای مشاهده این‌که چرا تحدید μ_* به $\mathcal{A}$ بر $\mu_\circ$ منطبق است، فرض کنید که $E \in \mathcal{A}$. به وضوح از آنجایی که E خودش را می‌پوشاند، داریم

$$\mu_*(E) \leqslant \mu_\circ(E)$$

. برای اثبات عکس نامساوی فرض کنید $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ که به ازای هر j، $E_j \in \mathcal{A}$. در این صورت اگر قرار دهیم

$$E'_k = E \cap (E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j),$$

مجموعه‌های E'_k ، اعضای مجزای $\mathcal{A}$ هستند، $E'_k \subset E_k$ و $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k$. طبق (ب) در تعریف پیش اندازه، داریم

$$\mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E'_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k),$$

و $\mu_0(E) \leqslant \mu_*(E)$، همان‌طور که می خواستیم.

سر انجام باید اثبات کنیم مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ نسبت به μ_* اندازه‌پذیر هستند. فرض کنید A یک زیر مجموعه‌ی X باشد، $E \in \mathcal{A}$ و $\varepsilon > 0$. طبق تعریف، گردایهٔ شمارای E_1 و E_2 و... از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ موجود هستند، به طوری که

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_j)$$

و

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) \leqslant \mu_*(A) + \epsilon.$$

از آنجایی که μ_0 پیش اندازه است، روی $\mathcal{A}$ به طور متناهی جمع‌پذیر است و بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E \cap E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap E_j) \\ &\geqslant \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).\end{aligned}$$

از آنجایی که ε دلخواه است، نتیجه می‌گیریم

$$\mu_*(A) \geqslant \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A).$$

□

σ –جبر تولید شده به‌وسیله جبر $\mathcal{A}$ طبق تعریف، کوچکترین σ –جبری است که شامل $\mathcal{A}$ می‌شود. بنابراین لم بالا تا حدی گام ضروری برای توسیع $\mu_\circ$ روی $\mathcal{A}$ به روی σ–جبر تولید شده به وسیله‌ی $\mathcal{A}$ را فراهم می‌کند.

قضیه ۵.۶. فرض کنید $\mathcal{A}$ جبری از مجموعه‌ها در X، $\mu_\circ$ یک پیش اندازه روی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{M}$، σ –جبر تولید شده به وسیله $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت یک اندازه μ روی $\mathcal{M}$ وجود دارد که $\mu_\circ$ را توسیع می دهد.

قابل توجه است که اگر $\mu_\circ$، یک اندازه σ–متناهی باشد، آنگاه μ تنها توسیع $\mu_\circ$ است.

برهان. اندازه خارجی μ_* تولید شده به وسیله‌ی $\mu_\circ$ یک اندازه μ روی σ –جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر کاراتئودوری تعریف می‌کند. بنابراین طبق نتیجه لم قبل، μ نیز روی $\mathcal{M}$ یک اندازه است که توسیع $\mu_\circ$ است. (دقت می‌کنیم به طور کلی رده $\mathcal{M}$ به بزرگی رده همه مجموعه‌هایی که به معنای (۱.۶) اندازه‌پذیر هستند، نیست.)

برای اثبات این که هرگاه μ، σ -متناهی باشد،این توسیع منحصر به فرد است به‌صورت زیر بحث می‌کنیم. فرض کنید ν اندازه دیگری روی $\mathcal{M}$ باشد که با $\mu_\circ$ روی A برابر است و فرض کنید $F \in \mathcal{M}$ اندازه متناهی دارد. ادعا می‌کنیم $\mu(F) = \nu(F)$. اگر $\bigcup E_j \supset F$، که در آن $E_j \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\nu(F) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\circ(E_j),$$

بنابراین $\nu(F) \leqslant \mu(F)$. برای اثبات عکس نامساوی توجه کنید اگر $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$، آنگاه از این‌که μ و ν روی $\mathcal{A}$ دو اندازه مساوی هستند، داریم

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \mu(E).$$

اگر مجموعه‌های E_j به گونه‌ای انتخاب شوند که $\mu(E) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$، آنگاه از این که $\mu(F) < \infty$ نتیجه می‌گیریم $\mu(E \setminus F) \leqslant \varepsilon$ و بنابر این

$$\begin{aligned}\mu(F) \leqslant \mu(E) = \nu(E) = \nu(F) + \nu(E \setminus F) &\leqslant \nu(F) + \mu(E \setminus F)\\ &\leqslant \mu(F) + \varepsilon.\end{aligned}$$

از آنجایی که ε دلخواه است، در می‌یابیم $\mu(F) \leqslant \nu(F)$ همان‌طور که مطلوب بود.

سر انجام نتیجه پایانی را به کار می‌بریم تا ثابت کنیم، اگر μ، σ-متناهی باشد آنگاه $\mu=\nu$. در واقع می‌نویسیم $X=\bigcup E_j$ که E_1 و E_2 و... گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های مجزای $\mathcal{A}$ است که $\mu(E_j)<\infty$. آنگاه به ازای هر $F\in\mathcal{M}$ داریم

$$\mu(F)=\sum\mu(F\cap E_j)=\sum\nu(F\cap E_j)=\nu(F),$$

و منحصر به فردی ثابت می‌شود. □

برای کاربردهای آتی، نکته‌ی بعدی درباره‌ی پیش‌اندازه μ_0 روی جبر $\mathcal{A}$ و اندازه به دست آمده μ_* که طبق بحث بالا به طور ضمنی وجود دارد را بیان می‌کنیم. جزئیات برهان به عهده خواننده است.

$\mathcal{A}_\sigma$ را گردایه مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم که از اجتماع‌های شمارایی از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}$ حاصل می شوند، و $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ را به‌عنوان مجموعه‌هایی در نظر می گیریم که به صورت اشتراک شمارا، از مجموعه‌ها در $\mathcal{A}_\sigma$ هستند.

قضیه ۶.۶. برای هر مجموعه ی E و هر $\varepsilon>0$ ، مجموعه‌های $E_1\in\mathcal{A}_\sigma$ و $E_2\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ موجودند، به طوری که $E\subset E_1$ و $E\subset E_2$ و $\mu_*(E_1)\leqslant\mu_*(E)+\varepsilon$، در حالی که $\mu_*(E_2)=\mu_*(E)$.

۲.۶ انتگرالگیری روی یک فضای اندازه

به محض این‌که خواص اولیه فضای اندازه X را ثابت کردیم، نتایج اساسی در مورد توابع اندازه‌پذیر و انتگرالگیری از توابع روی X مشابه با اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^d$ می‌تواند حاصل شود. در واقع نتایج قسمت ۳.۱ فصل ۱ و همه قسمت‌های فصل ۲ با برهان‌هایی که تقریبا کلمه به کلمه یکسان است، به حالت کلی تعمیم می یابند. به این دلیل ما این مباحث را تکرار نمی‌کنیم و خودمان را به بیان ساده‌ای از نکات اصلی محدود می‌سازیم. خواننده هیچ مشکلی در پر کردن جزئیات باقی مانده نخواهد داشت.

برای اجتناب از پیچیدگی‌های غیر ضروی در سراسر این بحث، فرض می‌کنیم که فضای اندازه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ مورد نظر σ -متناهی است.

توابع اندازه‌پذیر

تابع F روی X با مقادیر در مجموعه ی اعداد حقیقی توسعه یافته **اندازه‌پذیر** است، هرگاه

$$\text{به ازای هر}\ a \in \mathbb{R}،\ f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}.$$

با این تعریف، خواص اولیه توابع اندازه‌پذیر مطالعه شده در حالت $\mathbb{R}^d$ با اندازه لبگ، همچنان برقرار است. (در فصل ۱ خاصیت

۳۲٫۱ از میان ۶ خاصیت موجود در مورد توابع اندازه‌پذیر توجه کنید.) به‌عنوان مثال، خانواده توابع اندازه‌پذیر تحت اعمال جبری اولیه و همچنین حد نقطه‌ای توابع اندازه‌پذیر، بسته است.
مفهوم « تقریبا همه جا» که اکنون به کار می‌بریم با توجه به اندازه μ است. به‌عنوان مثال اگر f و g توابع اندازه‌پذیر روی X باشند، تقریبا همه جا $f = g$، هرگاه

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = ۰.$$

یک **تابع ساده** روی X به فرم زیر است،

$$\sum_{k=۱}^{N} a_k \chi_{E_k},$$

که در آن E_k ها مجموعه‌های با اندازه متناهی و a_k ها اعداد حقیقی هستند. تقریب با توابع ساده نقش مهمی را درتعریف انتگرال بازی می‌کنند. خوشبختانه این نتایج در صورت انتزاعی نیز برقرار هستند.
• فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی فضای اندازه $(X, \mathcal{M}, \mu)$ باشد، در این صورت دنباله‌ای از توابع ساده $\{\varphi_k\}_{k=۱}^{\infty}$ موجود است، به طوری که

برای هر x، $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+۱}(x)$ و $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$.

به طور کلی، اگر f تنها اندازه‌پذیر باشد، دنباله‌ای از توابع ساده $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد، به طوری که این شرط را برقرار می‌سازد:

برای هر x، $|\varphi_k(x)| \leqslant |\varphi_{k+1}(x)|$ و $\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x) = f(x)$.

برهان این نتیجه با اصلاحات کوچک واضحی از برهان قضایای ۳۶.۱ و ۳۷.۱ در فصل ۱ به دست می‌آید. در اینجا می‌توان شرط تکنیکی اعمال شده روی X را به کار برد، که آن شرط σ -متناهی بودن است. در واقع، اگر بنویسیم $X = \cup F_k$ که در آن $F_k \in \mathcal{M}$ ها از اندازه‌ی متناهی هستند، آنگاه مجموعه‌های F_k نقش مکعب‌های Q_k در برهان قضیه ۳۶.۱ ، فصل ۱ را بازی می‌کنند.

نتیجه مهم دیگری که به سرعت تعمیم می‌یابد، قضیه ایگوروف است.

• فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد که روی مجموعه اندازه‌پذیر $E \subset X$ با $\mu(E) < \infty$ تعریف می شوند و تقریبا همه جا $f_k \to f$ آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ی A_ε با شرط های $A_\varepsilon \subset E$ و $\mu(E \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ موجود است، به طوری که به طور یکنواخت روی A_ε، $f_k \to f$.

۱.۲.۶ تعریف و خواص اصلی انتگرال

روش چهار مرحله‌ای برای ساخت انتگرال لبگ که با تعریف آن روی توابع ساده در فصل ۲ ارایه شد، به حالت فضای اندازه σ-

متناهی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ گسترش می یابد. این امر به مفهوم انتگرال نسبت به اندازه μ از توابع اندازه‌پذیر نامنفی f روی X منجر می‌شود. این انتگرال به وسیله‌ی

$$\int_X f(x) d\mu(x),$$

نمایش داده می شود که امکان اشتباه نباشد، گاهی آن را به صورت $\int_X f d\mu(x)$ یا $\int f$ ساده می‌کنیم. سرانجام، می‌گوییم تابع اندازه‌پذیر f **انتگرالپذیر** است، هرگاه

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$

خواص اولیه‌ی انتگرال، مثل خطی بودن و یکنوایی در حالت کلی همچنان برقرارند، درست مثل قضایای اولیه حد که همچنان برقرار هستند.

لم ۷.۶. لم فاتو

الف. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی X باشد، آنگاه

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

ب. همگرایی یکنوا. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی

باشد و $f_n \nearrow f$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

ج. همگرایی تسلطی. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد و تقریبا همه جا $f_n \to f$. به طوری که برای یک تابع انتگرالپذیر g، داشته باشیم $|f_n| \le g$، آنگاه

$$\int |f_n - f| d\mu \to \infty, \quad n\to\infty$$ وقتی که ،

و در نتیجه

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu, \quad n\to\infty$$ وقتی که .

۲.۲.۶ فضای $L^1(X,\mu)$ و $L^2(X,\mu)$

رده‌های هم ارزی (به پیمانه توابع تقریبا همه جا صفر) از توابع انتگرالپذیر روی $(X,\mathcal{M},\mu)$ یک فضای برداری تشکیل می‌دهند که مجهز به یک نرم است. این فضا به وسیله‌ی $L^1(X,\mu)$ مشخص می‌شود و نرم آن

$$||f||_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f(x)| d\mu(x), \tag{۴.۶}$$

است. به طور مشابه می‌توانیم تعریف کنیم $L^{2}(X,\mu)$ رده های هم ارزی از توابع اندازه‌پذیر است که $\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$. نرم آن به صورت

$$||f||_{L^{2}(X,\mu)} = (\int_X |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}, \tag{۵.۶}$$

است. یک ضرب داخلی روی این فضا به وسیله

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x),$$

داده می‌شود.
برهان‌های گزاره‌ی ۱۴.۲ و قضیه ۱۵.۲ در فصل ۲، و همچنین نتایج بخش ۱.۴ فصل ۴ به این حالت کلی توسیع می‌یابند و احکام زیر را به دست می‌دهند:

- فضای $L^{1}(X,\mu)$ فضای برداری نرمدار کامل است.
- فضای $L^{2}(X,\mu)$ یک فضای هیلبرت (احتمالا جدایی ناپذیر) است.

۳.۶ مثال‌ها

اکنون در مورد چند مثال مفید از نظریه عمومی بحث می‌کنیم.

۱.۳.۶ اندازه‌های حاصلضربی و قضیه فوبینی کلی

مثال اول ما، در ارتباط با ساختن اندازه‌های حاصلضربی است و به شکل کلی قضیه‌ای منجر می‌شود که یک انتگرال چندگانه را بر حسب انتگرال‌های مکرر بیان می‌کند، که حالت فضای اقلیدسی را که در بخش ۳.۲ فصل ۲ مطالعه شد، تعمیم می دهد.

فرض کنید $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ و $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ یک جفت از فضاهای اندازه هستند. مایلیم تا اندازه حاصلضربی $\mu_1 \times \mu_2$ را روی فضای $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ توصیف کنیم.

در این جا فرض می‌کنیم که دو فضای اندازه، کامل و σ -متناهی هستند.

با در نظر گرفتن مستطیل‌های اندازه‌پذیر شروع می‌کنیم: اینها زیر مجموعه‌هایی از X به صورت $A \times B$ هستند، با مجموعه‌های اندازه‌پذیر A و B یعنی $A \in \mathcal{M}_1$ و $B \in \mathcal{M}_2$. سپس $\mathcal{A}$ را طوری قرار می‌دهیم که گردایه‌ای از تمام مجموعه‌ها در X باشد، به‌طوری‌که اجتماع‌های متناهی از مستطیل‌های اندازه‌پذیر مجزا هستند. به آسانی می‌توان بررسی کرد که $\mathcal{A}$ یک جبر از زیر مجموعه‌های X است (در واقع، متمم یک مستطیل اندازه‌پذیر اجتماعی از سه مستطیل مجزا است. در حالی که اجتماع دو مستطیل اندازه‌پذیر، اجتماع

مجزایی از حداکثر شش مستطیل است.) از حالا به بعد اصطلاحی را که به مستطیل‌های اندازه‌پذیر برمی‌گردد به صورت «مستطیل‌ها» خلاصه می‌کنیم.

روی مستطیل‌ها تابع μ_0 را به صورت $\mu_0(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ تعریف می‌کنیم. اکنون این حقیقت که μ_0 یک توسیع منحصر به فرد روی جبر $\mathcal{A}$ دارد که برای آن μ_0 یک پیش اندازه می‌شود، نتیجه‌ای از این اصل است: هرگاه یک مستطیل $A \times B$ اجتماع مجزایی از یک گردایه شمارایی از مستطیل‌های $\{A_j \times B_j\}$ به صورت

$$A \times B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$$

باشد، آنگاه

$$\mu_0(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \times B_j). \tag{۶.۶}$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم اگر $x_1 \in A$ ، آنگاه به ازای هر $x_2 \in B$ ، نقطه (x_1, x_2) دقیقا به یک $A_j \times B_j$ تعلق دارد. بنابراین می‌بینیم B اجتماع مجزایی از B_j هاست که $x_1 \in A_j$. با استفاده از خاصیت جمعپذیری شمارای اندازه μ_2 ، این یک نتیجه بلافصل

رابطه

$$\chi_A(x_۱)\mu_۲(B) = \sum_{j=۱}^{n} \chi_{A_j}(x_۱)\mu_۲(B_j)$$

است.

بنابراین با انتگرالگیری نسبت به $x_۱$ و به کاربردن قضیه همگرایی یکنوا داریم $\mu_۱(A)\mu_۲(B) = \sum_{j=۱}^{\infty} \mu_۱(A_j)\mu_۲(B_j)$ که همان ۶.۶ است.

اکنون می‌دانیم $\mu_۰$ یک پیش اندازه روی $\mathcal{A}$ است، از قضیه ۵.۶ یک اندازه (که با $\mu = \mu_۱ \times \mu_۲$ مشخص می‌شود) روی σ -جبر $\mathcal{M}$ از مجموعه‌های تولید شده به وسیله جبر $\mathcal{A}$ از مستطیل‌های اندازه‌پذیر به دست می‌آوریم. در این روش فضای اندازه حاصلضربی $(X_۱ \times X_۲, \mathcal{M}, \mu_۱ \times \mu_۲)$ را تعریف می‌کنیم.

برای مجموعه‌ی E داده شده در $\mathcal{M}$، اکنون برش‌های

$$E_{x_۱} = \{x_۲ \in X_۲ : (x_۱, x_۲) \in E\} \text{ و } E^{x_۲} = \{x_۱ \in X_۱ : (x_۱, x_۲) \in E\},$$

را در نظر می‌گیریم.

تعاریفی را یادآوری می‌کنیم که در آن $\mathcal{A}_\sigma$ گردایه‌ای از مجموعه‌هایی را که اجتماع شمارایی از عناصر $\mathcal{A}$ هستند، مشخص می‌کند و $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ از اشتراک‌های شمارایی از مجموعه‌های $\mathcal{A}_\sigma$ به دست می‌آید. آنگاه اصل کلیدی زیر را داریم.

قضیه ۸.۶. اگر E متعلق به $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ باشد، آنگاه $E^{x_۲}$ به ازای هر $x_۲$، $\mu_۱$ -اندازه‌پذیر است، همچنین $\mu_۱(E^{x_۲})$ یک تابع $\mu_۲$ -اندازه‌پذیر است. همچنین

$$\int_{X_۲} \mu_۱(E^{x_۲})d\mu_۲ = (\mu_۱ \times \mu_۲)(E). \tag{۷.۶}$$

برهان. در ابتدا قابل توجه است، وقتی E یک مستطیل (اندازه‌پذیر) باشد، تمامی گزاره‌ها برقرارند. سپس فرض کنید E یک مجموعه در $\mathcal{A}_\sigma$ باشد. آنگاه آن را به صورت اجتماع شمارایی از مستطیل‌های مجزای E_j تجزیه می‌کنیم. (اگر E_j مجزا نباشد، تنها لازم است E_j را با $\bigcup_{k\leqslant j} E_k \setminus \bigcup_{k\leqslant j-۱} E_k$ جایگزین کنیم.) در این صورت به ازای هر $x_۲$ داریم $E^{x_۲} = \bigcup_{j=۱}^{\infty} E_j^{x_۲}$ و ملاحظه می‌کنیم $\{E_j^{x_۲}\}$ مجموعه‌های مجزا هستند. بنابراین با اعمال ۷.۶ بر هر مستطیل E_j و با قضیه همگرایی یکنوا، نتیجه را برای هر $E \in \mathcal{A}_\sigma$ به دست می‌آوریم.

حال فرض کنید $E \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ و $(\mu_۱ \times \mu_۲)(E) < \infty$. آنگاه دنباله $\{E_j\}$ از مجموعه‌ها با شرط‌های $E_j \in \mathcal{A}_\sigma$ ، $E_{j+۱} \subset E_j$ و $E = \bigcap_{j=۱}^{\infty} E_j$ موجود است. فرض می کنیم $f_j(x_۲) = \mu_۱(E_j^{x_۲})$ و $f(x_۲) = \mu_۱(E^{x_۲})$. برای مشاهده این امر که $E^{x_۲}$، $\mu_۱$ -اندازه‌پذیر و $f(x_۲)$ خوش تعریف است. توجه کنید $E^{x_۲}$ حد دنباله ی نزولی مجموعه‌های $E_j^{x_۲}$ است که طبق آنچه بالاتر دیده‌ایم، اندازه‌پذیر هستند. به‌علاوه از آنجایی که $E_۱ \in \mathcal{A}_\sigma$

و $(\mu_1 \times \mu_2)(E_1) < \infty$، ملاحظه می‌کنیم، وقتی که $j \to \infty$ به ازای هر x_2، $f_j(x_2) \to f(x_2)$. بنابراین $f(x_2)$ اندازه‌پذیر است. در این صورت $\{f_j(x_2)\}$ دنباله‌ای نزولی از توابع نامنفی است.
بنابراین

$$\int_{X_2} f(x_2) d\mu_2(x) = \lim_{j\to\infty} \int_{X_2} f_j(x_2) d\mu_2(x),$$

و بنابراین ۷.۶ زمانی که $(\mu_1 \times \mu_2)(E) < \infty$ ثابت می شود. اکنون از آنجایی که فرض کردیم هردو μ_1 و μ_2، σ−متناهی هستند و می‌توانیم دنباله‌های

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_j \subset \cdots \subset X_1$$

و

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_j \subset \cdots \subset X_2$$

را بیابیم، به طوری که $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = X_1$، $\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = X_2$ و به ازای هر j، $\mu_1(F_j) < \infty$ و $\mu_2(G_j) < \infty$. در این صورت صرفا باید E را با $E_j = E \cap (F_j \times G_j)$ جایگزین کنیم و فرض کنیم $j \to \infty$، تا نتیجه کلی را به دست آوریم. $\square$

اکنون نتیجه قضیه بالا را به یک مجموعه اندازه‌پذیر دلخواه E در $X_1 \times X_2$ تعمیم می‌دهیم که E متعلق به $\mathcal{M}$، σ−جبر تولید شده به وسیله مستطیل‌های اندازه‌پذیر است.

قضیه ۹.۶. اگر E یک مجموعه ی اندازه‌پذیر دلخواه در $X_۱ \times X_۲$ باشد، آنگاه نتایج قضیه ۸.۶ هنوز صحیح هستند، به جز این‌که تصریح می کنیم $E^{x_۲}$، $\mu_۱$ -اندازه‌پذیر است و $\mu_۱(E)^{x_۲}$ به ازای تقریبا هر $x_۲ \in X_۲$ تعریف می‌شود.

برهان. ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که E یک مجموعه با اندازه صفر است. آنگاه طبق قضیه ۶.۶ می‌دانیم که مجموعه‌ی $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ موجود است که $E \subset F$ و $(\mu_۱ \times \mu_۲)(F) = ۰$. از آنجایی که به ازای هر $x_۲$، $E^{x_۲} \subset F^{x_۲}$ و تقریبا به ازای هر $x_۲$ ، $F^{x_۲}$، $\mu_۱$ -اندازه صفر دارد. با به کار بردن ۷.۶ برای ۴.۶ ، کامل بودن مفروض اندازه $\mu_۲$ نشان می‌دهد $E^{x_۲}$ اندازه‌پذیر است و برای این اعضای $x_۲$ ، اندازه صفر دارد. بنابراین نتیجه مورد انتظار برای E در حالتی‌که اندازه صفر دارد، برقرار است.

اگر این فرض را از روی E برداریم، می‌توانیم قضیه ۶.۶ را دوباره به کاربربریم تا $F \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ و $F \supset E$ را بیابیم به طوری که $F \setminus E = Z$ از اندازه صفر باشد. از آنجایی که $F^{x_۲} \setminus E^{x_۲} = Z^{x_۲}$ ، می‌توانیم حالتی را که به تازگی ثابت شده است به کار بگیریم و تقریبا به ازای همه $x_۲$ ها، مجموعه‌ی $E^{x_۲}$ را بیابیم، که اندازه‌پذیر است و $\mu_۱(E^{x_۲}) = \mu_۱(F^{x_۲}) - \mu_۱(Z^{x_۲})$. □

اکنون نتیجه مهمی را می‌یابیم که تعمیم قضیه فوبینی در فصل ۲ است.

قضیه ۱۰.۶. در موارد فوق، فرض کنید $f(x_1, x_2)$ یک تابع انتگرالپذیر روی

$$(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

باشد.

الف. به ازای تقریبا هر $x_2 \in X_2$ برش $f^{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ روی (X_1, μ_1) انتگرالپذیر است.

ب. $\int_{x_1} f(x_1, x_2) d\mu_1$ یک تابع انتگرالپذیر روی x_2 است.

ج. $\int_{X_2}(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1) d\mu_2 = \int_{X_1 \times X_2} f d\mu_1 \times \mu_2$.

برهان. توجه کنید اگر نتایج مورد انتظار برای تعداد متناهی تابع برقرار باشد، آنگاه برای ترکیبات خطی شان نیز برقرار است. به خصوص کافی است فرض کنید که f نامنفی است. وقتی که $f = \chi_E$، که در آن E یک مجموعه با اندازه متناهی است، نتیجه مطلوب مشمول در قضیه ۹.۶ است. بنابراین حکم مورد نظر نیز برای توابع ساده برقرار است. پس طبق قضیه همگرایی یکنوا، برای همه توابع نامنفی معین نیز ثابت می‌شود . □

توجه می‌کنیم به طور کلی فضای حاصلضربی ساخته شده $(X, \mathcal{M}, \mu)$ کامل نیست. با این وجود، اگر فضای کامل شده‌ی $(\overline{X}, \overline{M}, \mu)$ را به همان صورتی که در تمرین ۲ است تعریف کنیم، قضیه در مورد فضای کامل شده برقرار است. برهان تنها به اصلاح ساده‌ای از گزاره در قضیه ۹.۶ نیاز دارد.

۲.۳.۶ فرمول انتگرالگیری برای مختصات قطبی

مختصات قطبی نقطه x در $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$، زوج (r, γ) است، که در آن $0 < r < \infty$ و γ به کره واحد $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ متعلق است. این کمیت ها به وسیله

$$r = |x|, \gamma = \frac{x}{|x|}, \text{و نیز به وسیله } x = r\gamma \qquad (۸.۶)$$

تعیین می شوند. در این جا هدف ما سروکار داشتن با فرمولی است که با تعاریف مناسب و تحت مفروضات مناسب، بیان می‌کند:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{s^{d-1}} \left(\int_0^\infty f(r\gamma) r^{d-1} dr \right) d\sigma(\gamma). \qquad (۹.۶)$$

برای مشاهده این امر زوج زیر از فضای اندازه‌پذیر را در نظر می‌گیریم. ابتدا $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ که در آن $X_1 = (0, \infty)$، $\mathcal{M}_1$ گردایه مجموعه‌های

اندازه‌پذیر لبگ روی $(0,\infty)$ است و $d\mu_1(r) = r^{d-1}dr$، به این معنا که $\mu_1(E) = \int_E r^{d-1}dr$. سپس X_2 گوی یکه S^{d-1} است و اندازه μ_2 همان است که به‌وسیله‌ی ۹.۶ با $\mu_2 = \sigma$ تعیین می‌شود. در واقع برای هر مجموعه‌ی $E \subset S^{d-1}$ داده شده، فرض می کنیم مجموعه «قطعه‌ای» $\tilde{E} = \{x \in \mathbb{R}^d : \frac{x}{|x|} \in E, 0 < |x| < 1\}$ در گوی یکه باشد که «نقاط انتهایی» آن در E هستند. می‌گوییم $E \in \mathcal{M}_2$، دقیقا هنگامی‌که $\tilde{E}$ زیر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ از $\mathbb{R}^d$ است و تعریف می کنیم $\mu_2(E) = \sigma(E) = d \cdot m(\tilde{E})$، که در آن m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^d$ است.

بنابر این واضح است که هر دو $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ و $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ همه خواص فضاهای اندازه کامل σ -متناهی را برقرار می‌کنند. توجه می‌کنیم کره S^{d-1} دارای یک متر است که به‌وسیله $d(\gamma, \gamma') = |\gamma - \gamma'|$ برای $\gamma, \gamma' \in S^{d-1}$ داده می شود. اگر E یک مجموعه‌ی باز (با توجه به این روش) در S^{d-1} باشد، آنگاه $\tilde{E}$ در $\mathbb{R}^d$ ، باز است و بنابراین E یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر در S^{d-1} است.

قضیه ۱۱.۶. فرض کنید f یک تابع انتگرالپذیر روی $\mathbb{R}^d$ باشد. در این‌صورت تقریبا برای هر $\gamma \in S^{d-1}$ برش f^γ که به‌وسیله $f^\gamma(r) = f(r\gamma)$ تعریف می‌شود، نسبت به اندازه $r^{d-1}dr$ تابع انتگرالپذیر است. به‌علاوه $\int_0^\infty f^\gamma(r) r^{d-1}dr$ روی S^{d-1} انتگرالپذیر است و تساوی ۹.۶

برقرار است.

نتیجهٔ متناظری موجود است که طبق آن ترتیب انتگرالگیری r و γ معکوس می شود.

برهان. اندازه حاصلضربی $\mu = \mu_۱ \times \mu_۲$ روی $X_۱ \times X_۲$ را که با قضیه ۱۰.۶ داده می‌شود در نظر می‌گیریم. چون فضای $X_۱ \times X_۲ = \{(r, \gamma) : ۰ < r < \infty, \gamma \in S^{d-۱}\}$ با $\mathbb{R}^d \setminus \{۰\}$ یکریخت می‌شود، می‌توانیم فرض کنیم μ به صورت اندازه‌ای روی این فضا باشد و هدف اصلی ما این است که آن‌را با (تحدید) اندازه لبگ روی آن فضا مشخص کنیم. ابتدا ادعا می‌کنیم

$$m(E) = \mu(E), \tag{۱۰.۶}$$

هرگاه E مستطیل اندازه‌پذیر $E = E_۱ \times E_۲$ باشد و در این حالت $\mu(E) = \mu_۱(E_۱) \times \mu_۲(E_۲)$. در حقیقت این حکم برای $E_۲$ که یک زیر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر دلخواه از $S^{d-۱}$ است و $E_۱ = (۰, ۱)$، برقرار است. زیرا $E = E_۱ \times E_۲$، قطعه $\tilde{E}_۲$ است در حالی که $\mu_۱(E_۱) = \frac{۱}{d}$.

به خاطرپایایی نسبی اندازه لبگ نسبت به انبساط، ۱۰.۶ زمانی که

$$E = (۰, b) \times E_۲$$

و نیز $b > 0$ برقرار است. یک حدگیری ساده نتیجه را برای مجموعه‌های $E_1 = (0, a]$ و $E_2 = (a, b)$ و از طریق تفاضل برای تمامی بازه‌های و بنابراین تمام مجموعه‌های بازثابت می کند. برای همه مجموعه‌های باز ، همه مجموعه‌های بسته و یا همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ E_1 و E_2 داریم

$$m(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

(در حقیقت می‌توانیم مجموعه‌های $F_1 \subset E_1 \subset \mathcal{O}_1$ با F_1 بسته و $\mathcal{O}_1$ باز را بیابیم، به طوری که

$$m_1(\mathcal{O}_1) - \varepsilon \leqslant m_1(E_1) \leqslant m_1(F_1) + \varepsilon$$

و نتایج بالا را برای $F_1 \times E_2$ و $\mathcal{O}_1 \times E_2$ به کار می‌بریم.) بنابراین تساوی ۱۰.۶ را برای همه مستطیل‌های اندازه‌پذیر و به‌عنوان نتیجه‌ای برای اجتماع‌های متناهی از مستطیل‌های اندازه‌پذیر ثابت کرده‌ایم. این جبر $\mathcal{A}$ است که در برهان قضیه ۱۰.۶ اتفاق می‌افتد، و بنابراین طبق تساوی قضیه ۵.۶، تساوی به σ -جبر تولید شده به‌وسیله‌ی $\mathcal{A}$ تعمیم می‌یابد که σ -جبر $\mathcal{M}$ است که اندازه μ روی آن تعریف می‌شود. به طور خلاصه هرگاه $E \in \mathcal{M}$، عبارت ۹.۶ برای $f = \chi_E$ برقرار است.

برای پیشروی بیشتر در موضوع توجه می کنیم که هر مجموعه باز در $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ به صورت اجتماع شمارایی از مستطیل‌های $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j$

نوشته می‌شود که A_j و B_j به ترتیب در $(0,\infty)$ و S^{d-1} باز هستند. (این نکته تکنیکی کوچک از تمرین ۱۲ به دست می‌آید) نتیجه می شود هر مجموعه باز و لذا بورل در $\mathcal{M}$ است و بنابراین ۹.۶ برای هر تابع $f=\chi_E$ که در آن E مجموعه بورل است نیز نیز برقرار است. در این صورت این نتیجه به هر مجموعه اندازه‌پذیر لبگ $E' \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ تسری می‌یابد. زیرا چنین مجموعه‌ای به صورت اجتماع مجزایی $E'=E\cup Z$ نوشته می‌شود، که در آن E مجموعه‌ی بورل است و $Z\subset F$ و F یک مجموعه‌ی بورل با اندازه صفر است. برای اتمام برهان مراحل مشابهی را، با نتیجه گرفتن ۹.۶ برای توابع ساده و سپس طبق همگرایی یکنوا برای توابع انتگرالپذیر نامنفی و حالت کلی دنبال می‌کنیم. $\square$

۳.۳.۶ اندازه‌های بورل روی $\mathbb{R}$ و انتگرال لبگ اشتیل یس

انتگرال اشتیل یس معرفی شد تا تعمیمی از انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ را به دست دهد، که در آن تغییرات dx با تغییرات $dF(x)$ برای تابع صعودی داده شده F روی $[a,b]$ جایگزین می‌شود. مایلیم تا این ایده را از دیدگاه عمومی آن در این فصل پیگیری کنیم. بنابراین پرسشی

که بر می‌آید پرسش مشخص کردن اندازه‌های روی $\mathbb{R}$ است که از این روش به دست می‌آیند و به خصوص اندازه‌هایی که روی مجموعه‌های بورل روی خط حقیقی تعریف شده‌اند.

برای داشتن یک تناظر منحصر به فرد بین اندازه‌ها و توابع صعودی همان‌گونه که در ادامه داریم، ابتدا باید این توابع را به شیوه مناسبی نرمال سازیم. به یاد آورید که تابع صعودی F می‌تواند حداکثر در تعداد شمارا نقطه ناپیوسته باشد. اگر $x_\circ$ یک نقطه ناپیوستگی باشد، آنگاه

$$\lim_{\substack{x>x_\circ \\ x\to x_\circ}} F(x) = F(x_\circ^+) \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x<x_\circ \\ x\to x_\circ}} F(x) = F(x_\circ^+),$$

هر دو موجودند، در حالی که $F(x_\circ^-) < F(x_\circ^+)$ و $F(x_\circ)$ بین $F(x_\circ^-), F(x_\circ^+)$ قرار دارد. اکنون F را در $x_\circ$ اصلاح می‌کنیم، در صورت لزوم، قرار می‌دهیم

$$F(x_\circ) = F(x_\circ^+)$$

و این کار را برای هر نقطه ناپیوستگی انجام می‌دهیم. اکنون تابع F صعودی است و در هر نقطه از راست پیوسته است و می‌گوییم این توابع **نرمال شده** هستند. نتیجه مهم در ادامه به دست می‌آید.

قضیه ۱۲.۶. فرض کنید F تابع صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد که نرمال شده است. آنگاه اندازه منحصر به فرد μ (که به‌وسیله dF مشخص می‌شود) روی مجموعه‌های بورل $\mathcal{B}$ روی $\mathbb{R}$ وجود دارد، به طوری که اگر $a < b$، $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. برعکس، اگر μ یک اندازه روی $\mathcal{B}$ باشد که روی بازه‌های کراندار، متناهی است آنگاه F را چنین تعریف می کنیم. به ازای $x > ۰$، $F(x) = \mu((۰, x])$، $F(۰) = ۰$ و برای $x < ۰$، $F(x) = -\mu((-x, ۰])$. در این صورت F صعودی و نرمال شده است.

قبل از ورود به برهان، توجه می‌کنیم متناهی بودن μ روی بازه‌های کراندار، شرط لازم است. در حقیقت اندازه‌های هاسدورفی که در فصل بعد، مطالعه می‌شوند، مثال‌هایی از اندازه‌های بورل روی $\mathbb{R}$ فراهم می‌کنند که نسبت به آن‌هایی که در قضیه معرفی شده‌اند، ماهیت خیلی متفاوتی دارند.

برهان. تابع μ_* را روی همه زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ به‌وسیله‌ی

$$\mu_*(E) = \inf \sum_{j=۱}^{\infty} (F(b_j) - F(a_j)),$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن اینفیمم روی همه پوشش‌های E به شکل $\bigcup_{j=۱}^{\infty} (a_j, b_j]$ گرفته می‌شود.

به راحتی بررسی می‌شود که μ_* روی $\mathbb{R}$ اندازه خارجی است. سپس ملاحظه می‌کنیم که اگر $a < b$، $\mu_*((a, b]) = (F(b) - F(a))$. به وضوح $\mu_*((a, b]) \leqslant F(b) - F(a)$، زیرا $(a, b]$ خودش را می‌پوشاند. بنابراین فرض کنید که $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]$، بازه $(a, b]$ را بپوشاند، آنگاه به ازای هر $a < a' < b$، بازه $[a', b]$ را نیز می‌پوشاند. در این صورت طبق پیوستگی از راست F اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، همیشه می توانیم $b'_j > b_j$ را طوری انتخاب کنیم که $F(b'_j) \leq F(b_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. اکنون اجتماع بازه‌های باز $\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(a_j, b'_j\right)$، بازه $[a', b]$ را می‌پوشاند. باتوجه به فشردگی این بازه، $\bigcup_{j=1}^{N}\left(a_j, b'_j\right)$ برای یک N بازه $[a', b]$ را می‌پوشاند. بنابراین از آنجایی که F صعودی است، داریم

$$F(b) - F(a') \leqslant \sum_{j=1}^{N} F(b'_j) - F(a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{N}(F(b_j) - F(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j})$$
$$\leqslant \mu_*((a, b]) + \varepsilon.$$

بنابراین با فرض این‌که $a' \to a$ و با دوباره به کاربردن پیوستگی از راست تابع F می‌بینیم که $F(b) - F(a) \leqslant \mu_*((a, b]) + \varepsilon$. از آنجایی که ε دلخواه بود، لذا رابطه $F(b) - F(a) = \mu_*((a, b])$ ثابت می‌شود.

سپس می‌بینیم که μ_* اندازه خارجی متری (برای متر معمولی $d(x, x') = |x - x'|$ روی خط حقیقی) است. از آنجایی که μ_* یک اندازه خارجی است، داریم $\mu_*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2)$ بنابراین کافی

است برقراری عکس نامساوی وقتی که $d(E_1, E_2) \geqslant \delta$ برای یک $\delta > 0$ را بررسی کنیم.

فرض کنید که عدد مثبت ε داده شده و $\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]$ پوششی از $E_1 \cup E_2$ است، به طوری که

$$\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j) \leqslant \mu_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

بعد از تقسیم کردن بازه‌های $(a_j, b_j]$ به بازه‌های نیم باز کوچکتر، فرض کنیم که هر بازه در پوشش طولی کمتر از δ دارد. زمانی که این شرط برقرار باشد، هر بازه حداکثر با یکی از دو مجموعه‌ی E_1 و E_2 می‌تواند اشتراک داشته باشد. اگر مجموعه اندیس های نیم بازه‌های $(a_j, b_j]$ را که به ترتیب با E_1 و E_2 اشتراک داشته باشند را با J_1 و J_2 نمایش دهیم، آنگاه $J_1 \cap J_2$ تهی است؛ به‌علاوه، داریم $E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1}(a_j, b_j]$ همچنین $E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2}(a_j, b_j]$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\mu_*(E_1) + \mu_*(E_2) &\leqslant \sum_{j \in J_1} F(b_j) - F(a_j) + \sum_{j \in J_2} F(b_j) - F(a_j) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} F(b_j) - F(a_j) \leqslant \mu_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

از آنجایی که ε دلخواه بود، می‌بینیم $\mu_*(E_1) + \mu_*(E_2) \leqslant \mu_*(E_1 \cup E_2)$ که مورد نظر ما است.

اکنون می توانیم از قضیه ۵.۶ کمک بگیریم. این قضیه وجود یک اندازه μ را که نسبت به آن مجموعه های بورل اندازه‌پذیر باشند، تضمین می کند. به‌علاوه داریم $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$، زیرا $(a,b]$ یک مجموعه بورل است و پیش از این دیده ایم که $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$.

برای اثبات این‌که μ روی $\mathbb{R}$ اندازه بورل منحصر به فردی است که در شرط $\mu_*((a,b]) = F(b) - F(a)$ صدق می کند، فرض می‌کنیم ν اندازه بورل دیگری با این خاصیت باشد. اکنون کافی است نشان دهیم روی همه مجموعه‌های بورل داریم $\nu = \mu$.

برعکس، اگر با اندازه بورل μ روی $\mathbb{R}$ که روی بازه‌های کراندار ، متناهی است شروع کنیم می‌توانیم تابع F ی را که در صورت قضیه صدق کند، تعریف کنیم. در این صورت به وضوح F صعودی است. برای مشاهده این‌که از راست پیوسته است، توجه می کنیم که اگر به‌عنوان نمونه $x_\circ > \circ$ ، مجموعه‌های $E_n = \left(\circ, x_\circ + \frac{1}{n}\right]$ هنگامی‌که $n \to \infty$ ، به $E = (\circ, x_\circ]$ نزول می کنند، بنابراین از آنجایی که $\mu(E_1) < \infty$، $\mu(E_n) \to \mu(E_1)$.

این به این معنی است که $F(x_\circ + \frac{1}{n}) \to F(x_\circ)$. چون F صعودی است، این نتیجه می‌دهد که در $x_\circ$ از راست پیوسته است. به ازای هر $x_\circ \leqslant \circ$ بحث مشابهی برقرار است . □

ملاحظات: چند نکته در مورد قضیه به ترتیب بیان می کنیم.

۱. دو تابع صعودی F و G اندازه یکسانی به‌دست می‌دهند، هرگاه $F-G$ ثابت باشد. برعکس آن نیز درست است. اگر به ازای هر $a<b$، $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ آنگاه $F-G$ ثابت است.

۲. اندازه μ ساخته شده در برهان قضیه روی σ -جبرهای بزرگتری نسبت به مجموعه‌های بورل تعریف شده است و در حقیقت کامل است. با این وجود در اغلب کاربردها، تحدیدهای آن به مجموعه‌های بورل کفایت می‌کند.

۳. اگر F یک تابع نرمال شده صعودی باشد که روی بازه بسته $[a,b]$ داده شده است، می‌توانیم با تعریف $F(x)=F(a)$ برای $x<a$ و $F(x)=F(b)$ برای $x>b$ آن را به $\mathbb{R}$ توسیع دهیم. برای اندازه μ حاصل، بازه‌های $(-\infty,a]$ و (b,∞) اندازه صفر دارند. اغلب می‌توان برای هر تابع انتگرالپذیر f نسبت به μ نوشت

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)=\int_a^b f(x)dF(x).$$

اگر F از یک تابع صعودی $F_\circ$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ به دست آمده باشد، می‌توان به محاسبه هر پرش احتمالی $F_\circ$ در a امیدوار بود. در این حالت گاهی اوقات کافی است

$\int_{a-}^b f(x)dF(x)$ را به صورت $\int_a^b f(x)d\mu_\circ(x)$

تعریف کنیم که در آن $\mu_\circ$ یک اندازه روی $\mathbb{R}$ متناظر با $F_\circ$ است.

۴. توجه کنید که تعریف بالا از انتگرال لبگ - اشتیل یس زمانی تعمیم می‌یابد که F با تغییر کراندار باشد. در واقع فرض کنید F تابع مختلط مقداری روی $[a,b]$ باشد، به‌طوری که $F=\sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j F_j$ که هر F_j صعودی و نرمال شده است و ε_j ها، ± 1 یا $\pm i$ هستند. آنگاه می‌توانیم $\int_a^b f(x)dF(x)$ را به‌صورت $\sum_{j=1}^{4}\varepsilon_j\int_a^b f(x)dF_j(x)$ تعریف کنیم. در اینجا لازم است که f نسبت به اندازه بورل $\mu=\sum_{j=1}^{4}\mu_j$ انتگرالپذیر باشد، که در آن μ_j اندازه متناظر با F_j است.

۵. مقدار این انتگرال‌ها، در حالت‌های زیر به‌صورت سر راست تری محاسبه می‌شود.

الف) اگر F یک تابع پیوسته مطلق روی $[a,b]$ باشد، آنگاه برای هر تابع اندازه‌پذیر بورل f که نسبت به $\mu=dF$ انتگرالپذیر است، داریم

$$\int_a^b f(x)dF(x)=\int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

ب) فرض کنید F یک تابع پرشی با پرش‌های $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ در نقاط $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ مشابه حالتی باشد که در بخش ۲.۳ فصل ۳ مطرح

شد. در این‌صورت هرگاه f خارج یک بازه کراندار، پیوسته باشد و به صفر میل کند، داریم

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\alpha_n.$$

به خصوص برای اندازه μ داریم $\mu(\{x_n\}) = \alpha_n$ و برای همه مجموعه های E که شامل هیچ یک از x_n ها نیستند، $\mu(E) = 0$.
ج) یک حالت خاص زمانی است که داریم $F = H$، و تابع هویساید[1] تعریف می شود، که به ازای $x \geqslant 0$، به صورت $H(x) = 1$ به ازای $x < 0$، به صورت $H(x) = 0$ است. در این حالت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dH(x) = f(0).$$

که بیان دیگری برای تابع دلتای دیراک است که در بخش ۱.۳ فصل ۳ مطالعه شد.

جزئیات بیشتری در مورد (۵) در تمرین ۱۱ یافت می‌شود.

1. Heaviside

۴.۶ پیوستگی مطلق اندازه‌ها

برای تعمیم مفهوم پیوستگی مطلق که در فصل ۳ بیان شد، به توسیع ایده اندازه برای مطالعه توابع مجموعه‌ای نیازمندیم که مثبت یا منفی مقدار است. ابتدا این مفهوم را تشریح می‌کنیم.

۱.۴.۶ اندازه‌های علامت دار

به‌طور مختصر یک اندازه علامت‌دار همه خواص یک اندازه را دارد، به جز این که مقادیر مثبت یا منفی می‌گیرد. به طور دقیق‌تر یک اندازه علامتدار v روی σ –جبر $\mathcal{M}$، نگاشتی است که در موارد زیر صدق می‌کند:

۱. تابع مجموعه‌ای v مقادیر حقیقی توسعه یافته اخذ می کند، به این معنا که به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ ، $-\infty < v(E) \leqslant \infty$.

۲. اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیر مجموعه‌های مجزای $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه

$$v\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} v(E_j).$$

توجه کنید برای برقراری رابطه فوق، $\sum v(E_j)$ از تجدید آرایش این عبارت مستقل است، بنابراین اگر $v(E)(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ متناهی باشد، آنگاه

سری همگرای مطلق است.

اگر از شرط نامنفی بودن f در عبارت

$$v(E) = \int_E f d\mu,$$

صرف‌نظر کنیم، که در آن $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه است و f، μ -اندازه‌پذیر است، به‌طور طبیعی به این صورت مثال‌هایی از اندازه‌های علامت‌دار به دست می آیند. در حقیقت برای اطمینان یافتن از این‌که v، در (۱) و (۲) صدق می‌کند، تابع f باید نسبت به μ به معنای توسعه یافته انتگرالپذیر باشد. به این معنی که $\int f^- d\mu$ باید متناهی باشد، در حالی که $\int f^+ d\mu$ ممکن است نامتناهی باشد.

برای اندازه علامت‌دار داده شده‌ی v روی X، همیشه ممکن است اندازه‌ای (مثبت) μ پیدا شود که v را کنترل می‌کند، به این معنا که

$$v(E) \leqslant \mu(E) \qquad \text{برای هر } E$$

و به‌علاوه، μ «کوچکترین» اندازه‌ای باشد که این خاصیت را دارد.

این ساختار شکلی انتزاعی از تجزیه‌ی یک تابع با تغییر کراندار به صورت تفاضل دو تابع صعودی است. همان‌طور که در فصل ۳ انجام شد. به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم. تابع $|v|$ روی $\mathcal{M}$ را که تغییر

کلی v نامیده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$|v|(E) = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |v(E_j)|,$$

که در آن سوپریمم روی همه افراز های E گرفته می‌شود، به این معنا که روی همه اجتماع‌های شمارای $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ است که مجموعه‌های E_j مجزا هستند و به $\mathcal{M}$ تعلق دارند.

این اصل که $|v|$ در حقیقت جمعی است، واضح نیست و در برهان پایین داده می شود.

قضیه ۱۳.۶. تغییر کلی $|v|$ از یک اندازه علامتدار v خود یک اندازه (مثبت) است، به طوری که $|v| \leqslant v$.

برهان. فرض کنید $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{M}$ باشد و قرار دهید $E = \bigcup_j E_j$. کافی است ثابت کنیم:

$$|v|(E) \leqslant \sum |v|(E_j) \text{ و } \sum |v|(E_j) \leqslant |v|(E). \tag{۱۱.۶}$$

فرض کنید α_j یک عدد حقیقی باشد، به طوری که $\alpha_j < |v|(E_j)$. طبق تعریف، هر E_j به صورت $E_j = \bigcup_i F_{i,j}$ نوشته می‌شود که $F_{i,j}$ ها مجزا هستند، به $\mathcal{M}$ تعلق دارند و

$$\alpha_j \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |v(F_{i,j})|.$$

از آنجایی که $E = \bigcup_{i,j} F_{i,j}$، داریم

$$\sum \alpha_j \leqslant \sum_{j,i} |v(F_{i,j})| \leqslant |v|(E).$$

در نتیجه، با سوپریمم گرفتن روی اعداد α_j نامساوی اول (۱۱.۶) به دست می‌آید.

برای عکس نامساوی، فرض کنید F_k یک افراز دیگر از E باشد. برای k ثابت، $\{F_k \cap E_j\}_j$ یک افراز از F_k است. بنابراین از آنجایی که v اندازه علامت‌دار است، داریم

$$\sum_k |v(F_k)| = \sum_k \left| \sum_j v(F_k \cap E_j) \right|.$$

به کار بردن نامساوی مثلثی و این اصل که $\{F_k \cap E_j\}_j$ یک افراز E_j است، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \sum_k |v(F_k)| &\leqslant \sum_k \sum_j |v(F_k \cap E_j)| \\ &= \sum_j \sum_k |v(F_k \cap E_j)| \\ &= \sum_j |v(E_j)|. \end{aligned}$$

چون $\{F_k\}$ یک افراز دلخواه E است، نامساوی دوم در (۱۱.۶) را به دست می‌آوریم. $\square$

اکنون می‌توانیم v را به صورت تفاضل دو اندازه (مثبت) بنویسیم. برای مشاهده این امر، **تغییر مثبت** و **تغییر منفی** v را با

$$v^{-} = \frac{۱}{۲}(|v| - v) \quad \text{و} \quad v^{+} = \frac{۱}{۲}(|v| + v),$$

تعریف می‌کنیم. طبق قضیه مشاهده می‌کنیم که v^{+} و v^{-} اندازه هستند و به وضوح

$$|v| = v^{+} - v^{-}, v = v^{+} + v^{-},$$

برقرار است.

اگر در عبارات بالا، برای مجموعه‌ی E ، $v(E) = \infty$، آنگاه $|v|(E) = \infty$ و $v^{-}(E)$ صفر تعریف می‌شود.

همچنین تعریف زیر را ارائه می‌دهیم: می‌گوییم اندازه علامت‌دار v، σ -متناهی است اگر اندازه $|v|$، σ -متناهی باشد. از آنجایی که $v \leqslant |v|$ و $|-v| = |v|$ در می‌یابیم که

$$-|v| \leqslant v \leqslant |v|.$$

در نتیجه، اگر v، σ -متناهی باشد، آنگاه v^{+} و v^{-} نیز چنین هستند.

۲.۴.۶ پیوستگی مطلق

روابطی که برای دو اندازه تعریف شده روی یک σ-جبر مشترک می تواند موجود باشد را در این بخش تشریح می کنیم. به صورت

عینی‌تر، دو اندازه ν، μ تعریف شده روی σ -جبر $\mathcal{M}$ را در نظر بگیرید. دو سناریوی غایی موجود است.

۱. ν و μ دارای « تکیه‌گاه» با قسمت‌های مجزا در $\mathcal{M}$ هستند.

۲. تکیه‌گاه ν یک قسمت اصلی از تکیه‌گاه μ است.

در این جا این اصطلاح را تعریف می کنیم که گوییم اندازه ν روی مجموعه‌ی A **تکیه می‌کند**، هرگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$، $\nu(E) = \nu(E \cap A)$.

قضیه رادون-نیکودیم - لبگ در پایین بیان می‌کند، که به یک معنای دقیق رابطه‌ی بین هر دو اندازه‌ی ν و μ ترکیبی از دو رخداد بالا است.

۳.۴.۶ اندازه‌های پیوسته مطلق و دو به دو منفرد

دو اندازه علامت دار ν و μ روی $(X, \mathcal{M})$ **دو به دو منفرد** نامیده می شوند، هرگاه زیر مجموعه‌های مجزای A و B در $\mathcal{M}$ موجود باشند، به طوری که

$$\text{به ازای هر } E \in \mathcal{M}،\ \mu(E) = \mu(B \cap E) \text{ و } \nu(E) = \nu(A \cap E)$$

بنابراین ν و μ روی زیر مجموعه‌های مجزا تکیه می کنند. برای این که نشان دهیم این اندازه ها دو به دو منفرد هستند، از نماد $\nu \perp \mu$ استفاده می کنیم.

در مقابل اگر ν یک اندازه علامت دار و μ یک اندازه (مثبت) روی $\mathcal{M}$ باشد، می‌گوییم ν نسبت به μ **پیوسته مطلق** است، هرگاه

$$\nu(E) = 0 \text{، زمانی‌که } E \in \mathcal{M} \text{ و } \mu(E) = 0. \tag{۱۲.۶}$$

بنابراین اگر ν روی مجموعه A تکیه کند، آنگاه A باید قسمت اصلی از تکیه‌گاه μ باشد به این معنا که $\mu(A) > 0$. برای این‌که نشان دهیم ν نسبت به μ پیوسته مطلق است، نماد $\nu \ll \mu$ را به کار می‌بریم. توجه کنید اگر ν و μ دو به دو منفرد باشند و همچنین ν نسبت به μ پیوسته مطلق باشد، آنگاه ν متحدا صفر است.

یک مثال مهم با انتگرالگیری نسبت به μ داده می شود. در واقع اگر

$$f \in L^1(X, \mu)$$

یا اگر f در حالت توسعه یافته صرفا انتگرالپذیر باشد (که در آن $\int f^- < \infty$ اما احتمالا $\int f^+ = \infty$)، آنگاه اندازه علامت‌دار ν که به وسیله‌ی

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \tag{۱۳.۶}$$

تعریف می‌شود، نسبت به μ پیوسته مطلق است. به صورت خلاصه نماد $d\nu = f d\mu$ را به کار می‌بریم، تا نشان دهیم که ν به‌وسیله ۱۳.۶ تعریف می‌شود.

این یک نوع مفهوم پیوستگی مطلق است که در فصل ۳ در حالت خاص $\mathbb{R}$ دیده شد. (با مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ μ و اندازه لبگ $d\mu = dx$). در حقیقت، برای ν تعریف شده طبق (۱۳.۶) و تابع انتگرالپذیر f، دیدیم که به جای (۱۲.۶) عبارت قوی تر زیر را داریم: به ازای هر $\varepsilon > 0$، δ ای موجود است به طوری که $\mu(E) < \delta$ نتیجه می دهد

$$(۱۴.۶) \qquad |\nu(E)| < \varepsilon.$$

در حالت کلی رابطه بین دو شرط ۱۲.۶ و ۱۴.۶ به وسیله نتیجه زیر توضیح داده می‌شود.

قضیه ۱۴.۶. عبارت ۱۴.۶، ۱۲.۶ را نتیجه می‌دهد. بر عکس اگر $|\nu|$ با اندازه متناهی باشد، آنگاه ۱۲.۶، گزاره ۱۴.۶ را نتیجه می‌دهد.

واضح است که ۱۲.۶ نتیجه ۱۴.۶ است زیرا $\mu(E) = 0$ نتیجه می‌دهد به ازای هر $\varepsilon > 0$، $|\nu(E)| < \varepsilon$. برای اثبات عکس مطلب، کافی است با جایگزینی ν با $|\nu|$، حالتی را در نظر بگیریم که در آن ν مثبت است. سپس فرض می‌کنیم ۱۴.۶ برقرار نباشد. و این به این معنی است که گزاره برای یک $\varepsilon > 0$ ثابت برقرار نیست. بنابراین برای هر n، یک مجموعه اندازه‌پذیر E_n با شرط

$\mu(E_n) < ۲^{-n}$ وجود دارد، به طوری که $\nu(E_n) \geqslant \varepsilon$. اکنون فرض کنید $E^* = \lim_{n\to\infty}\sup E_n = \bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n^*$ که در آن $E_n^* = \bigcup_{k\geqslant n} E_k$. در این صورت، از آنجایی که $\mu(E_n^*) \leqslant \sum_{k\geqslant n}\frac{۱}{۲^k} = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$ و دنباله های نزولی از مجموعه ها $\{E_k^*\}$ مشمول در مجموعه‌ای با اندازه متناهی $(E_۱^*)$ می‌شود، به دست می‌آوریم $\mu(E^*) = ۰$. با این وجود $\nu(E_n^*) \geqslant \nu(E_n) \geqslant \varepsilon$ و ν اندازه‌ای است که متناهی فرض می‌شود. بنابراین $\nu(E^*) = \lim_{n\to\infty}\nu(E_n^*) \geqslant \varepsilon$ که به یک تناقض منجر می‌شود.

پس از این مقدمات، می‌توانیم به نتیجهٔ اصلی برویم که در میان موارد دیگر عکس نمایش (۱۳.۶) را تضمین می‌کند. در حالت $\mathbb{R}$ این حکم توسط لبگ و در حالت کلی به وسیله رادون و نیکودیم ثابت شد.

قضیه ۱۵.۶. فرض کنید μ یک اندازه σ -متناهی روی فضای اندازه $(X, \mathcal{M})$ و ν یک اندازه علامت دار σ -متناهی روی $\mathcal{M}$ باشد. آنگاه اندازه‌های علامت دار منحصر به فرد ν_a و ν_s روی $\mathcal{M}$ موجود هستند، به طوری که $\nu_a \ll \mu$ و $\nu_s \perp \mu$ و $\nu = \nu_a + \nu_s$. به‌علاوه اندازه ν_a، به شکل $d\nu_a = fd\mu$ نوشته می‌شود. به این معنی که برای یک تابع μ -انتگرالپذیر توسعه یافته f

$$\nu_a(E) = \int_E f(x)d\mu(x),$$

برقرار است.

به نتیجه زیر توجه کنید. اگر ν نسبت به μ پیوسته مطلق باشد، آنگاه

$$d\nu = f d\mu$$

و این ادعا به صورت تعمیمی از قضیهٔ ۲۹.۳ در فصل ۳ مشاهده می‌شود.

چندین برهان شناخته شده از قضیه بالا موجود است. بحثی که در زیر آورده شده، که منسوب به فون نویمان است، این مزیت را دارد که به شکلی ظریف از کاربرد یک ایده ساده فضای هیلبرت استفاده می‌کند.

با حالتی شروع می‌کنیم که در آن ν و μ مثبت و متناهی هستند. فرض کنید $\rho = \nu + \mu$ و تبدیل ℓ روی $L^{2}(X, \mu)$ در نظر بگیرید که به صورت

$$\ell(\psi) = \int_X \psi(x) d\nu(x),$$

تعریف می‌شود.

نگاشت ℓ یک تابع خطی کراندار را روی $L^{2}(X, \rho)$ را تعریف می‌کند، زیرا

$$\begin{aligned}|\ell(\psi)| &\leqslant \int_X |\psi(x)| d\nu(x) \leqslant \int_X |\psi(x)| d\rho(x)\\ &\leqslant (\rho(X))^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\psi(x)|^{2} d\rho(x)\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

که نامساوی پایانی به‌وسیله‌ی نامساوی کشی-شوارتس برقرار است. اما $L^{۲}(X,\rho)$ فضای هیلبرت است، بنابراین قضیه نمایش ریس (در فصل ۴) وجود $g\in L^{۲}(X,\rho)$ را تضمین می‌کند، به طوری که

$$\int_X \psi(x)d\nu(x)=\int_x \psi(x)g(x)d\rho(x)\quad \text{برای هر } \psi\in L^{۲}(X,\rho)، \tag{۱۵.۶}$$

اگر $E\in\mathcal{M}$ و $\rho(E)>۰$، زمانی که در (۱۵.۶) قرار دهیم $\psi=\chi_E$ و به یاد آوریم که $\nu\leqslant\rho$، در می‌یابیم

$$۰\leqslant \frac{۱}{\rho(E)}\int_E g(x)d\rho(x)\leqslant ۱$$

از این نتیجه می‌گیریم تقریبا به ازای هر x، $۰\leqslant g(x)\leqslant ۱$. (با توجه به اندازه ρ) در حقیقت برای همه مجموعه‌های $E\in M$، $۰\leqslant\int_E g(x)d\rho(x)$ نتیجه می‌دهد که تقریبا همه جا، $g(x)\geqslant ۰$. به روش مشابهی، به ازای هر $E\in M$ ،

$$۰\leqslant\int_E(۱-g(x))d\rho(x),$$

تضمین می‌کند تقریبا همه جا $g(x)\leqslant ۱$. بنابراین به وضوح، به ازای هر x، بدون از دست دادن تساوی (۱۵.۶)، فرض می‌کنیم $۰\leqslant g(x)\leqslant ۱$، که آن را به صورت

$$\int\psi(۱-g)d\nu=\int\psi g d\mu, \tag{۱۶.۶}$$

باز نویسی می‌کنیم.
اکنون دو مجموعه‌ی

$$B = \{x \in X : g(x) = 1\} \quad \text{و} \quad A = \{x \in X : 0 \leqslant g(x) < 1\},$$

را در نظر می‌گیریم و دو اندازه ν_a و ν_s روی $\mathcal{M}$ را با

$$\nu_s(E) = \nu(B \cap E) \quad \text{و} \quad \nu_a(E) = \nu(A \cap E),$$

تعریف می‌کنیم.
برای مشاهده این‌که چرا $\mu \perp \nu$، کافی است توجه کنیم با قرار دادن $\psi = \chi_B$ در (۱۶.۶) نتیجه می‌شود

$$0 = \int \chi_B d\mu = \mu(B).$$

سر انجام، $\psi = \chi_E(1 + g + \cdots + g^n)$ را در (۱۶.۶) قرار می‌دهیم:

$$\int_E (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_E g(1 + ... + g^n) d\mu. \tag{۱۷.۶}$$

از آنجایی که اگر $x \in B$، $(1-g^{n+1})(x) = 0$ و اگر $x \in A$، $(1-g^{n+1})(x) \to 1$، قضیه همگرایی تسلطی نتیجه می‌دهد طرف چپ (۱۷.۶) به

$$\nu(A \cap E) = \nu_a(E)$$

همگراست. همچنین $1+g+\cdots+g^n$ به $\frac{1}{1-g}$ همگراست، همچنین در حد می‌یابیم که

$$\nu_a(E)=\int_E f d\mu \qquad \text{که در آن} \qquad f=\frac{g}{1-g}.$$

توجه کنید $f\in L^1(X,\mu)$، $\nu_a(X)\leqslant \nu(X)<\infty$. اگر μ و ν، σ-متناهی و مثبت باشند، به وضوح مجموعه‌های $E_j\in\mathcal{M}$ را می‌یابیم که $X=\bigcup E_j$ و به ازای هر j،

$$\mu(E_j)<\infty \text{ و } \nu(E_j)<\infty$$

. اندازه‌های مثبت و متناهی روی $\mathcal{M}$ را با

$$\mu_j(E)=\mu(E\cap E_j), \quad \text{و} \quad \nu_j(E)=\nu(E\cap E_j)$$

تعریف می‌کنیم و آنگاه به ازای هر j، می‌نویسیم $\nu_j=\nu_{j,a}+\nu_{j,s}$ که $\nu_{j,s}\perp\mu_j$ و $\nu_{j,a}=f_j d\mu_j$. در این صورت کافی است قرار دهیم

$$f=\sum f_j. \qquad \nu_s=\sum \nu_{j,s}, \qquad \text{و} \qquad \nu_a=\sum\nu_{j,a}$$

سر انجام اگر ν علامت دار باشد، آنگاه بحث را به صورت جدا برای تغییرات مثبت و منفی ν به کار می‌بریم.

برای اثبات منحصر به فردی تجزیه، همچنین فرض کنید

$$\nu=\nu_{a'}+\nu_{s'}$$

که در آن $\nu_{a'} \ll \mu$ و $\nu_{s'} \perp \mu$. در این صورت

$$\nu_a - \nu_a' = \nu_s' - \nu_s,$$

طرف چپ با توجه به μ پیوسته مطلق است و طرف راست با نسبت به μ منفرد است. بنابراین هر دو طرف صفر است و قضیه ثابت می‌شود.

۵.۶ قضیه‌های ارگودیک*

نظریه ارگودیک با مطالعه‌ی مسائل خاصی از مکانیک آماری در قرن نوزدهم شروع شد. از آن موقع به سرعت رشد یافت و اعتبار شگرفی را در مباحث مختلف ریاضی، به خصوص در ارتباط با سیستم‌های دینامیکی و نظریه احتمال به دست آورد. هدف ما تلاش برای ارائه یک نظریه‌ی وسیع و فریبنده نیست. بلکه مباحث‌مان را به بعضی از قضایای اولیه حد محدود می‌کنیم که پایه این نظریه هستند. این قضایا به طبیعی‌ترین شکل در بافت کلی فضاهای اندازه مجرد فرمول بندی شده‌اند و بنابراین برای ما مثال‌هایی عالی ، از چهارچوب کلی که در این فصل ارائه شده است، هستند.

موارد مورد نیاز این نظریه یک فضای اندازه σ –متناهی $(X, \mathcal{M}, \mu)$ است که به یک نگاشت $\tau : X \to X$ مجهز است، به طوری که هرگاه

E زیر مجموعه اندازه‌پذیری از X باشد، آنگاه $\tau^{-1}(E)$ نیز چنین است و $\mu(\tau^{-1}(E)) = \mu(E)$ در اینجا $\tau^{-1}(E)$ تصویر معکوس E تحت τ است، به عبارتی

$$\tau^{-1}(E) = \{x \in X : \tau(x) \in E\}$$

. نگاشت τ با این خواص یک **تبدیل حافظ اندازه** نامیده می‌شود. اگر به‌علاوه برای τ، دو سویی بودن را داشته باشیم و τ^{-1} یک تبدیل حافظ اندازه باشد، آنگاه τ **یکریختی حافظ اندازه** شناخته می‌شود.

توجه می‌کنیم اگر τ یک تبدیل حافظ اندازه باشد، آنگاه $f(\tau(x))$ اندازه‌پذیر است اگر $f(x)$ اندازه‌پذیر باشد و به‌علاوه انتگرالپذیر است، اگر f انتگرالپذیر باشد در این صورت داریم

$$\int_X f(\tau(x))d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x), \qquad (۱۸.۶)$$

در واقع اگر χ_E تابع مشخصه‌ای از مجموعه E باشد، توجه می‌کنیم که $\chi_E(\tau(x)) = \chi_{\tau^{-1}(E)}(x)$ و بنابراین حکم برای تابع مشخصه‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، و در نتیجه برای توابع ساده و بنابراین با کمک بحث حدگیری معمولی برای همه توابع اندازه‌پذیر نامنفی و در نتیجه برای توابع انتگرالپذیر برقرار است. برای اهداف زیر، در اینجا یک گزاره معادل را ارائه می‌کنیم: اگر f یک تابع اندازه‌پذیر حقیقی-مقدار

باشد و α عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\mu(\{x : f(x) > \alpha\}) = \mu(\{x : f(\tau(x)) > \alpha\}).$$

پیش از ادامه بحث، مثال‌هایی از تبدیلات حافظ - اندازه را توصیف می‌کنیم:

۱. در اینجا $X = \mathbb{Z}$، اعداد صحیح و μ اندازه شمارشی است. یعنی، به ازای هر $E \subset Z$، تعداد اعداد صحیح در $E = \#(E) = \mu(E)$. تابع τ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که $\tau : n \to n+1$ تبدیل انتقال واحد باشد. توجه کنید τ یک یکریختی حافظ اندازه‌ی $\mathbb{Z}$ را می‌دهد.

۲. مثال ساده دیگر $X = \mathbb{R}^d$ با اندازه لبگ است و τ تبدیل انتقال، $\tau : x \to x+v$ برای $v \in \mathbb{R}^d$ ثابت. این نگاشت البته یک یکریختی حافظ اندازه است. (مبحثی که در مورد پایایی اندازه لبگ در فصل ۱ آمده است.)

۳. در اینجا X دایره یکه است، که به صورت $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با اندازه داده شده توسط اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ ارائه می‌شود. یعنی X را به‌صورت بازه یکه $[0,1)$ در نظر می‌گیریم. μ را اندازه لبگ تحدید شده به این بازه می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی α ، تبدیل $x \mapsto x+\alpha$

با پیمانه $\mathbb{Z}$ گرفته شده روی $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ خوش تعریف است و حافظ اندازه است. (تمرین مرتبط ۳ در فصل ۲ را ببینید) این تبدیل می‌تواند به صورت دوران دایره به‌وسیله زاویه $2\pi\alpha$ تفسیر شود.

۴. در این مثال X دوباره $[0,1)$ با اندازه لبگ μ است اما τ نگاشت دو برابر کننده $\tau(x) = 2x$، به پیمانه ۱ است. به سهولت بررسی می شود که τ یک تبدیل حافظ اندازه است. در واقع، هر مجموعه‌ی $E \subset [0,1)$ دو پیش نگاره E_1 و E_2 دارد، اولی در $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ و دومی در $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ هر دو با اندازه‌ی $\frac{\mu(E)}{2}$ اگر E اندازه‌پذیر باشد.(تصویر ؟؟ را ببینید) با این وجود؛ τ یک یکریختی نیست، چرا که τ یک به یک نیست.

۵. یک مثال زیرکانه‌تر به‌وسیله تبدیلی ارائه می‌شود که در نظریه کسر مسلسل نقش کلیدی دارد. در این جا $X = [0,1)$ و τ، با $\tau(x) = \langle\frac{1}{x}\rangle$ تعریف می‌شود، که منظور قسمت کسری $\frac{1}{x}$ است و زمانی که $x = 0$ قرار می‌دهیم $\tau(0) = 0$. گاوس ملاحظه کرد، که اندازه $\mu = \frac{1}{1+x}dx$ به‌وسیله تبدیل τ حفظ می‌شود. توجه کنید که هر $x \in (0,1)$ تحت τ تعداد نامتناهی پیش‌نگاره دارد، که عبارت است از $\left\{\frac{1}{(x+k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$. اطلاعات بیشتر درباره‌ی این مثال در مسأله های ۸ تا ۱۰ در زیر یافت می‌شود.

شکل ۱.۶: پیش‌نگاره‌های E_1 و E_2 تحت نگاشت دو برابر کننده

بعد از نشان دادن این مثال‌ها، اکنون به نظریه عمومی بر می‌گردیم. مفاهیم فوق به‌طور جانبی مورد علاقه هستند، زیرا ایده سیستم دینامیکی را مجرد سازی می‌کنند، که مجموع حالت‌های فضای X، توسط هر نقطه $x \in X$، در یک حالت مخصوص سیستم نمایش می‌یابد. در این صورت نگاشت $\tau : X \to X$ تبدیلات سیستم را بعد از یک واحد زمانی سپری شده توصیف می‌کند. برای چنین سیستمی اغلب مفهومی مرتبط با «حجم» یا «جرم» وجود دارد که طی سیر تکاملی تغییری نمی‌یابد و این نقش اندازه پایای μ

است. تکرار $\tau^n = \tau.\tau.....\tau$ (n بار) تکامل سیستم را بعد از n واحد زمانی توصیف می‌کند و یک دغدغه اصلی میانگین رفتار کمیت‌های متفاوت مرتبط با سیستم است وقتی که $n \to \infty$. بنابراین به مطالعه میانگین‌های

$$A_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) \qquad (۱۹.۶)$$

و حدود آن‌ها وقتی که $n \to \infty$ منجر می‌شود. اکنون به این مفهوم بر می‌گردیم.

۱.۵.۶ قضیه ارگودیک میانی

قضیهٔ اول مرتبط با میانگین‌ها، ۱۹.۶، که مورد مطالعه قرار می‌دهیم، به لحاظ ماهیت از جنس فضای هیلبرت محض است. از نظر تاریخی بر هر دو قضیهٔ ۱۸.۶ و ۱۹.۶ مقدم است که در زیر ثابت می‌کنیم.

به دلیل کاربرد قضیه زیر، فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به صورت $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ گرفته می‌شود. برای تبدیل حافظ اندازه داده شده τ روی X، عملگر خطی T را روی $\mathcal{H}$ به صورت

$$T(f)(x) = f(\tau(x)), \qquad (۲۰.۶)$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت T طول پا است، به این معنا که

$$||Tf|| = ||f||, \tag{۲۱.۶}$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم L^2 فضای هیلبرت را مشخص می‌کند، این موضوع از (۱۸.۶) که f به‌وسیله $|f|^2$ جایگزین شده است، واضح است. ملاحظه می‌کنیم اگر τ نیز یک یکریختی حافظ اندازه فرض شود، آنگاه T معکوس پذیر و بنابراین یکانی است، اما این را فرض نمی‌کنیم.

با این فرض که T به صورت بالا است، زیر فضای S را به صورت، $S = \{f \in \mathcal{H} : T(f) = f\}$ از بردارهای پایا در نظر بگیرید. به وضوح، به خاطر ۲۱.۶، زیر فضای S بسته است. فرض کنید P تصویر متعامد روی این زیر فضا باشد. قضیه‌ای که در ادامه می‌یابد با همگرایی در «میانگین» و به معنایی در نرم سرو کار دارد.

قضیه ۱۶.۶. فرض کنید T یک یکریختی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و فرض کنید P تصویر متعامد روی زیر فضای بردارهای پایای T باشد. فرض کنید $A_n = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})$ در این‌صورت به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، وقتی که $n \to \infty$، $A_n(f)$ در نرم به $P(f)$ همگراست.

علاوه بر زیر فضای S تعریف شده در بالا، زیر فضای‌های $S_* = \{f \in \mathcal{H} : T^*(f) = f\}$ و $S_1 = \{f \in \mathcal{H} : f = g - Tg, g \in \mathcal{H}\}$ را در

نظر می‌گیریم، در اینجا T^* نگاشت الحاقی T را مشخص می‌کند. در این‌صورت S_*، مانند S، بسته است اما S_1 لزوما بسته نیست. بستار آن را با $\overline{S_1}$ مشخص می‌کنیم. برهان قضیه بر پایه لم زیر است

لم ۱۷.۶. روابط زیر در میان زیر فضاهای S و S_* و $\overline{S_1}$ برقرار است.

الف) $S = S_*$.

ب) متمم متعامد $\overline{S_1}$، زیرفضای S است.

برهان. ابتدا از آنجایی که T طول پا است، به ازای هر $f, g \in \mathcal{H}$ داریم $(Tf, Tg) = (f, g)$ و بنابراین، $T^*T = I$. (تمرین ۲۲ فصل ۴ را ببنید.) بنابراین اگر $Tf = f$، آنگاه $T^*Tf = T^*f$ که نتیجه می‌دهد $T^*f = f$. برای اثبات عکس شمول، فرض کنید $T^*f = f$. به‌عنوان نتیجه $(f, T^*f - f) = 0$ و بنابراین $(f, T^*f) - (f, f) = 0$، که در نتیجه

$$(Tf, f) = \|f\|^2$$

. بنابراین $\|Tf\| = \|f\|$، بنابراین در موارد فوق، مثالی از تساوی را برای نامساوی کشی - شوارتس داریم. به‌عنوان نتیجه‌ای از تمرین ۲ فصل ۴ داریم $Tf = cf$ که از بالا نتیجه می‌شود $Tf = f$. بنابراین قسمت (الف) ثابت می‌شود.

سپس ملاحظه می‌کنیم ، عضو f در متمم متعامد $\overline{S_1}$ قرار می‌گیرد، دقیقا زمانی که به ازای هر $g \in \mathcal{H}$، $(f, g - Tg) = 0$. این حالت، به این معنی است که به ازای هر $g \in \mathcal{H}$ $(f - T^*f, g) = 0$ و بنابراین $f = T^*f$، که با توجه قسمت (الف) نتیجه می‌دهد $f \in S$.

با اثبات لم برهان قضیه را تمام می‌کنیم.

برای هر $f \in \mathcal{H}$، می‌نویسیم $f = f_0 + f_1$، به طوری که $f_0 \in S$ و $f_1 \in \overline{S_1}$ (زیرا S و $\overline{S_1}$ متمم متعامد هستند.) همچنین $\varepsilon > 0$ را ثابت و $f_1' \in S_1$ را می‌گیریم، به طوری که $\|f_1 - f_1'\| < \varepsilon$. سپس می‌نویسیم

$$A_n(f) = A_n(f_0) + A_n(f_1') + A_n(f_1 - f_1'), \qquad (۲۲.۶)$$

و هر قسمت را به طور جداگانه‌ای در نظر می‌گیریم.

برای قسمت اول، به یاد می‌آوریم که P تصویر متعامد روی S است. بنابراین $P(f) = f_0$ و از آنجایی که $Tf_0 = f_0$ نتیجه می‌گیریم برای هر $n \geqslant 1$،

$$A_n(f_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(f_0) = f_0 = P(f).$$

برای قسمت دوم تعریف S_1 را به یاد می‌آوریم و $g \in \mathcal{H}$ را با شرط

$f_1' = g - Tg$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین

$$A_n(f_1') = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(1-T)(g) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(g) - T^{k+1}(g)$$
$$= \frac{1}{n}(g - T^n(g)).$$

از آنجایی که T یک طول پا است، تساوی فوق نشان می‌دهد که وقتی $n \to \infty$، $A_n(f_1')$ به صفر همگراست. برای قسمت آخر، دوباره از این قانون استفاده می‌کنیم که هر T^k یک طول پا است و داریم

$$\|A_n(f_1 - f_1')\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|T^k(f_1 - f_1')\| \leqslant \|f_1 - f_1'\| < \varepsilon.$$

سر انجام، از (۲۲.۶) و سه ملاحظه فوق، نتیجه می‌گیریم $\limsup_{n\to\infty}\|A_n(f) - P(f)\| \leqslant \varepsilon$. □

۲.۵.۶ قضیه ارگودیک ماکزیمال

اکنون به سؤال تقریبا همه جا همگرایی میانگین‌های (۱۹.۶) بر می‌گردیم. همانند حالت میانگین‌هایی که در قضیه‌های مشتق گیری فصل ۳ اتفاق می‌افتد، نکته‌ی کلیدی در ارتباط با چنین حدود نقطه‌ای، در تقریب توابع ماکزیمال متناظر آن ها قرار دارد. در این

حالت این تابع به‌وسیله‌ی

$$f^*(x) = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |f(\tau^k(x))|, \tag{۲۳.۶}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱۸.۶. هرگاه $f \in L^1(X, \mu)$ تابع ماکزیمال $f^*(x)$ به ازای تقریبا هر x متناهی است.
به‌علاوه ثابت جهانی[1] A وجود دارد، به طوری که به ازای هر $\alpha > 0$

$$\mu(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(X,\mu)}. \tag{۲۴.۶}$$

چند برهان در مورد این قضیه وجود دارد. اما آن برهانی که ما انتخاب کردیم بر ارتباط نزدیکی با تابع ماکزیمال ارائه شده در بخش ۱۰۳ فصل ۳ تأکید می‌کند و در حقیقت قضیه حاضر را از حالت یک بعدی آن فصل نتیجه می‌گیریم. این بحث مقدار $A = 6$ را برای ثابت (۲۴.۶) ارائه می‌دهد. از طریق استدلالی متفاوت می‌توانیم $A = 1$ به‌دست آوریم. اما این بهبود دهی به آنچه که در ادامه می‌آید مربوط نیست.

1. universal

پیش از شروع برهان، به برخی نکات مقدماتی می‌پردازیم. توجه کنید در این حالت، از آنجایی که f^* سوپریمم تعداد شمارایی از توابع اندازه‌پذیر است، به طور خودکار اندازه‌پذیر است. همچنین می‌توانیم فرض کنیم تابع f ما نامنفی است، چرا که در غیر این صورت به جای آن $|f|$ را قرار می‌دهیم.

مرحله ۱ . حالت $X = \mathbb{Z}$ و $\tau : n \to n + ۱$.

برای هر تابع f روی $\mathbb{Z}$، $\tilde{f}$ توسیع آن به $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که برای $n \leqslant x < n + ۱$، $n \in \mathbb{Z}$ به صورت $\tilde{f}(x) = f(n)$ تعریف شده است. (تصویر ؟؟ را ببینید.) به طور مشابه، اگر $E \subset \mathbb{Z}$، $\tilde{E}$ را مجموعه‌ای در $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم که با

$$\tilde{E} = \bigcup_{n \in E} [n, n + ۱)$$

داده می‌شود. توجه کنید به‌عنوان نتیجه‌ای از این تعاریف داریم $m(\tilde{E}) = \#(E)$ و $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)dx = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ و بنابراین $\|f\|_{L^۱(\mathbb{Z})} = \|\tilde{f}\|_{L^۱(\mathbb{R})}$. در اینجا m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است و $\#$ اندازه شمارشی روی $\mathbb{Z}$ است. همچنین توجه کنید

$$\sum_{k=۰}^{m-۱} f(n + k) = \int_۰^m \tilde{f}(n + t)dt.$$

در این حالت، چون هر گاه $x \in [n, n + ۱)$، $\int_۰^m \tilde{f}(n+t)dt \leqslant \int_{-۱}^m \tilde{f}(x+t)dt$،

شکل ۲.۶: توسیع f به $\mathbb{R}$

مشاهده می‌کنیم که اگر $x \in [n, n+1)$،

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(n+k) \leqslant \left(\frac{m+1}{m}\right)\frac{1}{m+1}\int_{-1}^{m} \tilde{f}(x+t)dt.$$

با سوپریمم گرفتن روی همه $m \geqslant 1$ در عبارت بالا و توجه به این‌که $\frac{(m+1)}{m} \leqslant 2$ به‌دست می‌آوریم

(۲۵.۶) هرگاه $x \in [n, n+1)$ ، $f^*(n) \leqslant 2(\tilde{f})^*(x)$.

برای روشن شدن مطلب در اینجا: $f^*(n)$ به معنای تابع ماکزیمال f روی $\mathbb{Z}$ است که طبق ۲۳.۶ تعریف می‌شود و $f(\tau^k(v)) = f(n+k)$ در حالی که $(\tilde{f})^*$ تابع ماکزیمال، از تابع توسعه یافته $\tilde{f}$ روی $\mathbb{R}$ است، همان‌طور که در فصل ۳ تعریف شد. با توجه به (۲۵.۶)

$$\#(\{n : f^*(n) > \alpha\}) \leqslant m(\{x \in \mathbb{R} : (\tilde{f})^*(x) > \frac{\alpha}{2}\}),$$

و بنابراین طبق قضیه ماکزیمال برای $\mathbb{R}$ به‌وسیله $\frac{A'}{(\frac{\alpha}{2})} \int \tilde{f}(x)dx = \frac{2A'}{\alpha}||\tilde{f}||_{L^1(\mathbb{R})}$

کنترل می‌شود. ثابت A' که در آن قضیه وجود دارد (و به‌وسیله A مشخص می‌شود)، می‌تواند ۳ در نظرگرفته شود.

بنابراین داریم

$$\#(\{n : f^*(n) > \alpha\}) \leqslant \frac{6}{\alpha}||f||_{L^1(\mathbb{Z})}, \qquad (۲۶.۶)$$

زیرا $||\tilde{f}||_{L^1(\mathbb{R})} = ||f||_{L^1(\mathbb{Z})}$. این نتیجه حالت ویژه‌ی $X = \mathbb{Z}$ را بدست می دهد.

مرحله ۲. حالت کلی.

با یک تردستی نتیجه برای $\mathbb{Z}$ که به تازگی اثبات شد را به حالت کلی «انتقال» می‌دهیم. به صورت زیر ادامه می‌دهیم.

برای هر عدد صحیح N، تابع ماکزیمال مختصر شده f_N^* را که به صورت

$$f_N^*(x) = \sup_{۱\leqslant m\leqslant N} \frac{۱}{m}\sum_{k=۰}^{m-۱} f(\tau^k(x)),$$

تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم.

از آنجایی که $\{f_N^*(x)\}$ یک دنباله صعودی از N تشکیل می‌دهد و به ازای هر x، $\lim_{N\to\infty} f_N^*(x) = f^*(x)$ کافی است نشان دهیم

$$\mu\{x : f_N^*(x) > \alpha\} \leqslant \frac{A}{\alpha}||f||_{L^۱(X,\mu)}, \qquad (۲۷.۶)$$

که در آن ثابت A مستقل از N است. با فرض $N\to\infty$ به نتیجه مورد نظر می‌رسیم.

بنابراین به جای f^*، f_N^* را تقریب می‌زنیم و برای این‌که مطلب ساده تر شود، اندیس N را کنار می‌گذاریم و آن را به صورت f^* می‌نویسیم. مباحث ما تابع ماکزیمال f^* را با حالت خاصی که از حالت $\mathbb{Z}$ نتیجه می‌شود، مقایسه می‌کند. برای روشن کردن فرمول زیر موقتا مفهوم تابع ماکزیمال دوم را به وسیله‌ی $\mathcal{M}(f)$ مشخص می‌کنیم. بنابراین برای تابع مثبت f روی $\mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{۱\leqslant m} \frac{۱}{m}\sum_{k=۰}^{m-۱} f(n+k).$$

اکنون با شروع از تابع f روی X که انتگرال‌پذیر است، تابع F روی $X \times \mathbb{Z}$ را به‌صورت

$$F(x,n) = \begin{cases} f(\tau^n(x)) & \text{اگر } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{اگر } n < 0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت،

$$A_m(f)(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F(x,k).$$

در عبارت بالا x را با $\tau^n(x)$ جایگزین می‌کنیم، در این صورت از آنجایی که $\tau^k(\tau^n(x)) = \tau^{n+k}(x)$ ، داریم

$$A_m(f)(\tau^n(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F(x,n+k).$$

اکنون عدد مثبت بزرگ a را ثابت می‌گیریم و قرار می‌دهیم $b = a + N$. همچنین برای تابع روی $X \times \mathbb{Z}$، که برای $n < b$ به صورت $F_b(x,n) = F(x,n)$ و در غیر این صورت $F_b(x,n)$ تعریف می‌شود، صورت کوتاه شده F_b را می‌نویسیم. در این صورت داریم

$$\text{اگر } m \leqslant N \text{ و } n < a \qquad A_m(f)(\tau^n(x)) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F_b(x,n+k).$$

بنابراین

(۲۸.۶) اگر $n < a$ $\quad f^*(\tau^n(x)) \leqslant \mathcal{M}(F_b)(x,n)$.

(به یاد آورید که f^* در حقیقت f^*_N است!) این مقایسه‌ای از دو تابع ماکزیمال است که قصد داشتیم به‌دست آوریم. اکنون قرار می‌دهیم $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$ آنگاه با استفاده از مشخصه حافظ اندازه بودن τ داریم،

$$\mu(\{x : f^*(\tau^n(x)) > \alpha\}) = \mu(E_\alpha)$$

. بنابراین روی فضای حاصلضربی $X \times \mathbb{Z}$ اندازه حاصلضربی $\mu \times \#$ از مجموعه‌ی

$$\{(x,n) \in X \times \mathbb{Z} : f^*(\tau^n(x)) > \alpha, \circ \leqslant n < \alpha\}$$

با $\alpha\mu(E_\alpha)$ مساوی است. با وجود این، به خاطر (۲۸.۶) اندازه $\mu \times \#$ این مجموعه بیشتر از

$$\int_X \#(\{n \in \mathbb{Z} : \mathcal{M}(F_b)(x,n) > \alpha\}) d\mu,$$

نیست. به‌دلیل تقریب ماکزیمال (۲۶.۶) برای $\mathbb{Z}$، میبینیم که انتگرال بالا، البته برای $A = ۶$ بیشتر از

$$\frac{A}{\alpha} ||F_b(x,n)||_{L^{۱}(\mathbb{Z})} = \frac{A}{\alpha} \sum_{n=\circ}^{b-۱} f(\tau^n(x)),$$

نیست.
بنابراین با انتگرال‌گیری روی X و یادآوری $\int_X f(\tau^n(x))d\mu = \int_X f(x)d\mu$ نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha\mu(E_\alpha) \leqslant \frac{A}{\alpha}b||f||_{L^۱(X)} = \frac{A}{\alpha}(\alpha + N)||f||_{L^۱(X)}.$$

بنابراین $\mu(E_\alpha) \leqslant \frac{A}{\alpha}(۱ + \frac{N}{\alpha})||f||_{L^۱(X)}$ و با فرض $\alpha \to \infty$ تقریب (۲۷.۶) به‌دست می‌آید. همان‌طور که دیدیم، یک حدگیری نهایی وقتی که $N \to \infty$، برهان را کامل می‌کند.

۳.۵.۶ قضیه ارگودیک نقطه‌ای

سری آخر قضایای حد که بررسی می‌کنیم قضیه **ارگودیک نقطه‌ای (یا انفرادی)** است، که ایده‌هایی از دو قضیه اول را با هم ترکیب می‌کند. در این مرحله این فرض مناسب است که اندازه فضای (X, μ) متناهی است، سپس می‌توانیم اندازه را نرمال کنیم و فرض کنیم که $\mu(X) = ۱$.

قضیه ۱۹.۶. فرض کنید f روی X انتگرال‌پذیر باشد. آنگاه تقریبا به ازای هر $x \in X$ میانگین‌های $A_m(f) = \frac{۱}{m}\sum_{k=۰}^{m-۱} f(\tau^k(x))$، وقتی که $m \to \infty$ همگراست.

نتیجه ۲۰.۶. اگر این حد را با $P'(f)$ مشخص کنیم، داریم

$$\int_X |P'(f)(x)|d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|d\mu(x).$$

به‌علاوه هر گاه $f \in L^۲(X,\mu)$، $P'(f) = P(f)$.

ایده برهان در ادامه می‌آید. ابتدا نشان می‌دهیم که $A_m(f)$ برای مجموعه‌ای از توابع f که در $L^۱(X,\mu)$ چگال است، تقریبا همه جا به یک عدد همگراست. سپس قضیه ماکزیمال را به کار می‌بریم، تا نشان دهیم که حکم برای همه توابع انتگرالپذیر نتیجه می‌شود.

توجه داریم که چون اندازه کلی X، ۱ است. داریم

$$L^۲(X,\mu) \subset L^۱(X,\mu)$$

و $||f||_{L^۱} \leqslant ||f||_{L^۲}$ و به‌علاوه $L^۲(X,\mu)$ در $L^۱(X,\mu)$ چگال است. در حقیقت اگر f متعلق به $L^۱$ باشد، دنباله $\{f_n\}$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید، اگر $|f(n)| \leqslant n$، قرار می‌دهیم $f_n(x) = f(x)$ و در غیر این صورت $f_n(x) = ۰$. آنگاه هر f_n به وضوح در $L^۲$ است در حالی که طبق قضیه همگرایی تسلطی $||f - f_n||_{L^۱} \to ۰$.

اکنون با شروع از یک تابع انتگرالپذیر f و هر $\varepsilon > ۰$ ملاحظه می‌کنیم که می‌توانیم بنویسیم $f = F + H$ که در آن $||H||_{L^۱} < \varepsilon$ و $F = F_۰ + (۱ - T)G$ که در آن هر دو $F_۰$ و G متعلق به $L^۲$ هستند و

$T(F_\circ) = F_\circ$ با $T(F_\circ) = F_\circ(\tau(x))$. برای به‌دست آوردن تجزیه f ابتدا می‌نویسیم $f = f' + h'$ که در آن $f' \in L^2$ و $||h'||_{L^1} < \frac{\varepsilon}{2}$ که می‌توانیم آن را از دیدگاه چگالی L^2 در L^1 که در بالا دیده شد به‌دست آوریم. در مرحله بعد چون زیر فضاهای S و $\overline{S}_1$ در لم ۱۷.۶ متمم‌های متعامد در L^2 هستند، می‌توانیم $F_\circ \in S$ و $F_1 \in S_1$ را بیابیم، به طوری که $f' = F_\circ + F_1 + h$ و $||h||_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. از آنجایی که $F_1 \in S_1$ به صورت خودکار به شکل $F_1 = (1 - T)G$ است، داریم $F = F_\circ + (1 - T)G$ و $H = h + h'$، $f = F + H$. بنابراین $||H||_{L^1} \leqslant ||h||_{L^1} + ||h'||_{L^1}$ و از آنجایی که $||h||_{L^1} \leqslant ||h||_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ تجزیه مورد نظر f را به‌دست می‌آوریم.

اکنون $A_m(F) = A_m(F_\circ)+A_m((1-T)G) = F_\circ+\frac{1}{m}(1-T^m(G))$ همان‌طوری که پیش از این در برهان قضیه ۱۶.۶ دیدیم. توجه کنید $\frac{1}{m}T^m(G) = \frac{1}{m}G(\tau^m(x))$ وقتی که $m \to \infty$ تقریبا به ازای هر $x \in X$، به صفر همگراست. در واقع سری $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}(G(\tau^m(x)))^2$ طبق قضیه همگرایی یکنوا تقریبا همه جا همگراست، زیرا انتگرال آن روی X با مقدار

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}||T^m G||^2_{L^2} = ||G||^2_{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2},$$

برابر است که متناهی است.

در نتیجه به ازای تقریبا هر $x \in X$، $A_m(F)(x)$ همگراست. سرانجام

برای اثبات همگرایی متناظر برای $A_m(f)(x)$ بحث را مشابه قضیه ۱.۳ از فصل ۳ و برای مجموعه

$$E_\alpha = \{x : \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\geqslant N} |A_n(f)(x) - A_m(f)(x)| > \alpha\},$$

ادامه می‌دهیم.

حال کافی است ملاحظه کنیم که به ازای هر $\alpha > 0$، $\mu(E_\alpha) = 0$. با این وجود از آنجایی که $A_n(f)-A_m(f) = A_n(F)-A_m(F)+A_n(H)-A_m(H)$ و $A_m(F)(x)$ هرگاه $m \to \infty$ تقریبا همه جا همگراست، تقریبا هر نقطه از مجموعه‌ی E_α مشمول در E'_α است، که در آن

$$E'_\alpha = \{\sup_{n,m\geqslant N} |A_n(H)(x) - A_m(H)(x)| > \alpha\}$$

و بنابراین $\mu(E_\alpha) \leqslant \mu(E'_\alpha) \leqslant \mu(\{x : 2\sup_m |A_m(H)(x) > \alpha|\})$. کمیت آخر طبق قضیه ۱۸.۶ با $\frac{A}{(\frac{\alpha}{2})}||H||_{L^1} \leqslant 2\varepsilon\frac{A}{\alpha}$ کنترل می‌شود. از آنجایی که ε دلخواه بود می‌بینیم که $\mu(E_\alpha) = 0$ و بنابراین $A_m(f)(x)$ برای تقریبا هر x دنباله‌ای کشی است و قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات نتیجه، ملاحظه می‌کنیم که اگر $f \in L^2(X)$ طبق قضیه ۵.۶ می‌دانیم که $A_m(f)$ در نرم L^2 به $P(f)$ همگراست و بنابراین یک زیر دنباله تقریبا همه جا به حد آن همگراست و این نشان می‌دهد که در این حالت $P(f) = P'(f)$. سپس برای هر f که صرفا انتگرالپذیر

است، داریم

$$\int_X |A_m(f)|dx \leqslant \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \int_X |f(\tau^n(x))|d\mu(x) = \int_X |f(x)|d\mu(x),$$

و بنابراین از آنجایی که تقریبا همه جا $A_m(f) \to P'(f)$ طبق لم فاتو داریم

$$\int_X |P'(f)(x)|d\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|d\mu(x)$$

. بنابراین نتیجه نیز ثابت می‌شود.

می‌توان نشان داد اگر فرض متناهی بودن اندازه فضای X را حذف کنیم، قضیه و نتیجه هنوز برقرار هستند. اصلاحات گزاره که برای رسیدن به این نتیجه کلی تر مورد نیاز است در تمرین ۲۶ آمده است.

۴.۵.۶ تبدیلات حافظ اندازه ی ارگودیک

صفت «ارگودیک» به صورت متداول برای سه قضیه حدی ثابت شده در بالا به کار می‌رود. همچنین کاربردی مرتبط اما مجزا دارد که رده مهمی از تبدیلات فضای X را توصیف می‌کند.

می‌گوییم یک تبدیل حافظ - اندازه τ از X **ارگودیک** است، هرگاه اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و پایا به این معنا باشد که E و

$\tau^{-1}(E)^c$ به اندازه مجموعه‌هایی با اندازه صفر تفاوت داشته باشند، آنگاه E یا E^c اندازه صفر دارد.

بیانی دیگر و مفید از این شرط ارگودیک بودن وجود دارد. برای تعمیم تعریف آورده شده در قسمت ۱.۵.۶، می‌گوییم که تابع اندازه‌پذیر f **پایا** است، هرگاه تقریبا به ازای هر $x \in X$، $f(x) = f(\tau(x))$. در این صورت τ ارگودیک است، دقیقا زمانی که توابع پایا با ثابت‌ها برابر باشند. در حقیقت فرض کنید τ یک تبدیل ارگودیک باشد و فرض کنید f تابعی پایا و حقیقی - مقدار باشد، در این‌صورت همه مجموعه‌های $E_\alpha = \{x : f(x) > a\}$ پایا هستند، بنابراین به ازای هر a، $\mu(E_a) = 0$ یا $\mu(E_a^c) = 0$. بنابراین، اگر f با یک ثابت مساوی نباشد، آنگاه هر دو $\mu(E_a)$ و $\mu(E_a^c)$ باید برای یک a، اندازه اکید مثبت داشته باشند. در جهت عکس، صرفا باید توجه کنیم که اگر همه توابع مشخصه از مجموعه‌های اندازه‌پذیر که پایا هستند باید ثابت باشند، آنگاه τ ارگودیک است.

نتیجه زیر، به‌صورت نتیجه‌ای از قضیه ۱۹.۶ برای تبدیلات ارگودیک به‌دست می‌آید. فرض قضیه را که فضای زمینه X اندازه‌ای مساوی با ۱ دارد، حفظ می‌کنیم.

نتیجه ۲۱.۶. فرض کنید τ یک تبدیل حافظ اندازه ارگودیک باشد. برای هر تابع انتگرالپذیر f داریم $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x))$ تقریبا به ازای هر

$x \in X$، وقتی که $m \to \infty$ به $\int_X f d\mu$ همگراست.

این نتیجه به این معنی است که «میانگین زمانی» f، با «میانگین فضایی آن» مساوی است.

برهان. طبق قضیه ۵.۶ می‌دانیم هرگاه $f \in L^۲$، میانگین‌های $A_m(f)$ به $P(f)$ همگرا هستند، که در آن P تصویر متعامد روی زیر فضای بردارهای پایا است. چون در این حالت، بردارهای پایا یک فضای یک بعدی تولید شده به‌وسیله توابع ثابت را تشکیل می‌دهند، ملاحظه می‌کنیم $P(f) = ۱(f, ۱) = \int_X f d\mu$ که در آن ۱ تابعی را مشخص می‌کند که روی X با تابع ثابت ۱ مساوی است. برای بررسی این مطلب، توجه کنید P روی ثابت‌ها همانی است و همه توابع متعامد با ثابت‌ها را صفر می‌کند. سپس هر $f \in L^۱$ را به‌صورت $g + h$ می‌نویسیم که $g \in L^۲$ و $||h||_{L^۱} < \varepsilon$. در این صورت $P'(f) = P'(g) + P'(h)$. البته، همچنین می‌دانیم که $P'(g) = P(g)$ و طبق نتیجه قضیه ۱۹.۶، $\|P'(h)\| = ||h||_{L^۱} < \varepsilon$. بنابراین

$$P'(f) - \int_X f d\mu = \int_X (g - f) d\mu + P'(h),$$

نتیجه می‌دهد که $||P'(f) - \int_X f d\mu||_{L^۱} \leqslant ||g - f||_{L^۱} + \varepsilon < ۲\varepsilon$. این نشان می‌دهد که $P'(f)$ با $\int_X f d\mu$ برابر است . □

اکنون ماهیت ارگودیک را شرح می‌دهیم و گستردگی آن‌را از

طریق چند مثال بیان می‌کنیم.

الف) دوران‌های دایره

اکنون با مثال توصیف شده در قسمت ج در ابتدای بخش ۵.۶ شروع می‌کنیم. روی دایره یکه $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با اندازه لبگ القایی، عمل τ داده شده با $x \longmapsto x+\alpha$ به پیمانه ۱ را در نظر می‌گیریم. نتیجه بدین شرح است.

- نگاشت τ ارگودیک است، اگر و فقط اگر α گنگ باشد.

برای شروع، اگر α گنگ باشد بنابر قضیه توزیع متوازن می‌دانیم که به ازای هر x اگر f روی $[0,1]$ پیوسته و متناوب باشد ($f(0)=f(1)$)،

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\alpha) \to \int_0^1 f(x)dx, \qquad n\to\infty \text{ وقتی که} \qquad (29.6)$$

استدلال استفاده شده در برهان بدین صورت است: [1] ابتدا بررسی کنیم که هرگاه $n \in \mathbb{Z}$ و $f(x)=e^{2\pi inx}$، با در نظر گرفتن حالت‌های $n=0$ و $n\neq 0$ به طور جداگانه، (۲۹.۶) برقرار است. در این صورت نتیجه می شود که (۲۹.۶) برای هر چند جمله‌ای مثلثاتی معتبر

۱. (همچنین بخش ۲ از فصل ۴ جلد ۱ را ببینید.)

است (یک ترکیب خطی از این نمایی‌ها است). سرانجام هر تابع پیوسته و ارگودیک به طور یکنواخت با چند جمله‌ای‌های مثلثاتی تقریب زده می‌شود، بنابراین (۲۹.۶) به حالت کلی گسترش می یابد.

اکنون اگر P تصویری روی توابع پایا در L^2 باشد، آنگاه قضیه ۱۶.۶ و (۲۹.۶) نشان می‌دهد که وقتی P به توابع متناوب پیوسته تحدید می‌شود، به روی تمام ثابت‌ها تصویر می‌شود. از آنجایی که این زیر فضا در L^2 چگال است، ملاحظه می‌کنیم P تمام L^2 را روی ثابت‌ها تصویر می‌کند. بنابراین توابع پایا در L^2، ثابت‌ها هستند و بنابراین τ ارگودیک است.

از طرف دیگر، فرض می‌کنیم $\alpha = p/q$. مجموعه‌ی $E_0 \subset (0, \frac{1}{q})$ را انتخاب کنید به طوری که $0 < m(E_0) < \frac{1}{q}$ و فرض کنید E اجتماع مجزای $\bigcup_{r=0}^{q-1}(E_0 + \frac{r}{q})$ را مشخص کند. در این صورت به وضوح E تحت $\tau : x \to x + \frac{p}{q}$ پایا است و $0 < m(E) = qm(E_0) < 1$ بنابراین، τ ارگودیک نیست.

خاصیت (۲۹.۶) که از آن استفاده کردیم و شامل وجود حد در تمامی نقاط می‌شود، در حقیقت از ارگودیک بودن قوی تر است و این اندازه $d\mu = dx$ برای نگاشت τ **به طور منحصر به فرد ارگودیک** است ، به این معنی که اگر ν اندازه‌ای روی مجموعه‌های بورل X

باشد که به‌وسیله τ حفظ شود و $\nu(X) = 1$ آنگاه ν با μ برابر است.

برای مشاهده این امر، در حالت کنونی، فرض کنید P_ν تصویر متعامدی باشد که وجود آن با قضیه ۱۶.۶ روی فضای $L^2(X,\nu)$ تضمین می‌شود. در این‌صورت (۲۹.۶) نشان می‌دهد که برد P_ν روی توابع پیوسته و بنابراین روی همه $L^2(X,\nu)$ زیرفضای ثابت‌ها است و بنابراین $P_\nu(f) = \int_0^1 fd\nu$.

همچنین این به این معنی است که هرگاه f پیوسته و متناوب باشد، آنگاه $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 fd\nu$. سپس با یک بحث حد گیری ساده، به این نتیجه می‌رسیم که اندازه $dx = d\mu$ و ν روی همه بازه‌های باز برابر هستند. همان‌طور که دیده‌ایم، این تساوی دو اندازه را ثابت می‌کند.

به طور کلی، تبدیلات حافظ اندازه به طور منحصر به فرد ارگودیک، ارگودیک هستند. اما عکس آن همانطور که در زیر نشان می دهیم لزوما درست نیست.

ب) نگاشت دوگانه

اکنون نگاشت $x \mapsto 2x$ به پیمانه ۱ را برای $x \in [0,1)$ با اندازه لبگ μ در نظر بگیرید که در مثال ۴ در ابتدا بخش ۵.۶ فرض شد. ثابت می‌کنیم τ ارگودیک است و در حقیقت در خاصیت متفاوت و

قوی‌تری که آمیختگی نامیده می‌شود صدق می‌کند.[۱] این خاصیت به صورت زیر، تعریف می‌شود.

اگر τ روی فضای (X,μ) تبدیل حافظ اندازه باشد، **آمیخته** نامیده می‌شود، اگر E و F یک جفت از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشند، آنگاه

$$\mu(\tau^{-n}(E)\cap F) \to \mu(E)\mu(F), \quad n \to \infty \text{ زمانی که}. \tag{۳۰.۶}$$

معنی (۳۰.۶) به صورت زیر فهمیده می‌شود. در نظریه احتمال اغلب با «دنیایی» از وقایع محتمل مواجهیم که با احتمالات تعیین می‌شوند. این وقایع به صورت زیر مجموعه‌های E از فضای (X,μ) با $\mu(X)=1$، نمایش می‌یابند. احتمال هر پیشامد، $\mu(E)$ است. دو پیشامد E و F «مستقل» هستند، اگر احتمال این‌که هر دوی آن‌ها اتفاق بیفتند، به صورت حاصلضربی از احتمالات رخدادهای مجزای آن ها باشد، به این معنا که $\mu(E\cap F)=\mu(E)\mu(F)$. پس توصیف (۳۰.۶) از آمیختگی این است که در حد، وقتی که زمان n به بی‌نهایت میل می‌کند، مجموعه‌های $\tau^{-n}(E)$ و F برای همه انتخاب‌های E و F متناوبا مستقل هستند.

---

۱. این خاصیت اغلب «آمیختگی قوی » نامیده می شود، تا آن را از نوع دیگری از ارگودیک بودن که «آمیختگی ضعیف» نامیده می‌شود، متمایز سازد.

حال ملاحظه می‌کنیم شرط آمیختگی از شرط قوی‌تر

(۳۱.۶) وقتی که $n \to \infty$ $\quad (\tau^n f, g) \to (f, 1)(1, g),$

نتیجه می‌شود، که در آن f و g متعلق به $L^2(X, \mu)$ هستند و

$$T^n(f)(x) = f(\tau^n(x))$$

. این نتیجه بلافاصله با گرفتن $f = \chi_E$، $g = \chi_F$ به‌دست می‌آید. عکس مطلب نیز درست است، اما برهان را به‌عنوان یک تمرین به عهده خواننده می‌گذاریم.

اکنون توجه می‌کنیم شرط آمیختگی شرط ارگودیک بودن τ را نتیجه می‌دهد. در واقع از (۳۱.۶)، داریم

$$(A_n(f), g) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k f, g)$$

به $(f, 1)(1, g)$ همگراست.

این یعنی $(P(f), g) = (f, 1)(1, g)$، و بنابراین $P(f)$ بر تمام g ها که بر ثابت‌ها متعامد هستند، عمود است. این البته به معنی این است که P تصویر متعامد روی ثابت‌ها است و بنابراین τ ارگودیک است.

حال ملاحظه می‌کنیم نگاشت دو برابر کننده، آمیخته است. در واقع اگر

$$f(x) = e^{2\pi i m x}$$

و

$$g(x) = e^{2\pi ikx}$$

آنگاه $(f,1)(1,g) = 0$ به جز این‌که هر دو m و k صفر باشند، که در این حالت این ضرب با ۱ مساوی است. با این وجود در این حالت $(T^n f, g) = \int_0^1 e^{2\pi im2^n x}e^{-2\pi ikx}$ و این برای n به قدر کافی بزرگ به صفر متمایل می شود، به جز زمانی که m و k هر دو، صفر هستند که در این حالت انتگرال با ۱ مساوی است. بنابراین (۳۱.۶) برای همه نمایی‌های $f(x) = e^{2\pi imx}$ و $g(x) = e^{2\pi ikx}$ و بنابراین برای همه چند جمله‌ایهای مثلثاتی f و g برقرار است. از حالا به بعد به سهولت می‌توانیم کامل بودن در فصل ۴ را به کار ببریم تا از همه f و g در $L^2([0,1))$ با تقریب زدن این توابع با نرم L^2 به‌وسیله چند جمله‌ای‌های مثلثاتی بگذریم.

ملاحظه می‌کنیم عمل دوران‌های $\tau : x \mapsto x + \alpha$ از دایره یکه برای عدد گنگ α با وجود ارگودیک بودن، آمیخته نیست. در واقع اگر قرار دهیم $m \neq 0$، $f(x) = g(x) = e^{2\pi imx}$، آنگاه

$$(T^n f, g) = e^{2\pi inm\alpha}(f,g) = e^{2\pi inm\alpha}$$

در حالی که $(f,1) = (1,g) = 0$. بنابراین $(T^n f, g)$ زمانی که $n \to \infty$ به $(f,1)(1,g)$ همگرا نیست.

سر انجام توجه می‌کنیم که نگاشت دو برابر کننده $\tau : x \to 2x$ روی $[0,1)$ به پیمانه ۱ به طور منحصر به فرد ارگودیک نیست. علاوه بر اندازه لبگ، اندازه ν با تعریف $\nu\{1\} = 1$ ولی $\nu(E) = 0$ اگر $1 \notin E$، نیز توسط τ حفظ می‌شود.

مثال‌های بیشتری از تبدیلات ارگودیک در زیر ارائه می‌شود.

۶.۶ ضمیمه: قضیه طیفی*

هدف این ضمیمه نمایش طرح برهانی از قضیه طیفی برای عمگرهای متقارن کراندار روی فضای هیلبرت است. جزئیاتی که برای برهان ضروری نیستند به خواننده علاقمند واگذار می‌شوند. این قضیه کاربردی جالب از ایده‌های مربوط به انتگرال‌های لبگ اشتیل یس را که در این فصل آمده‌اند، فراهم می‌کند.

۱.۶.۶ بیان قضیه

یک مفهوم اولیه **حلال طیفی** (یا **خانواده طیفی**) روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. این مفهوم یک تابع $\lambda \mapsto E(\lambda)$ از $\mathbb{R}$ به تصویرهای متعامد روی $\mathcal{H}$ است، که در شرایط زیر صادق است.

۱. $E(\lambda)$ صعودی است، به این معنا که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $||E(\lambda)f||$ یک تابع صعودی از λ است.

۲. بازه $[a,b]$ وجود دارد، به‌طوری که اگر $\lambda < a$، $E(\lambda) = 0$ و اگر $\lambda \geqslant b$، $E(\lambda) = I$. در اینجا I عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ را مشخص می‌کند.

۳. به ازای هر λ، $E(\lambda)$ از راست پیوسته است و داریم

$$\lim_{\mu\to\lambda,\mu>\lambda} E(\mu)f = E(\lambda)f \qquad \text{برای هر } f \in \mathcal{H}.$$

ملاحظه کنید خاصیت (۱) با هر یک از سه عبارت زیر معادل است (که برای همه زوج‌های μ، λ با $\mu > \lambda$ برقرار است): (الف) برد $E(\mu)$ شامل برد $E(\lambda)$ می‌شود، (ب) $E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda)$، (ج) $E(\mu)-E(\lambda)$ یک تصویر متعامد است.

اکنون برای حلال طیفی $\{E(\lambda)\}$ و یک عضو $f \in \mathcal{H}$ داده شده، توجه کنید که تابع $\lambda \mapsto (E(\lambda)f, f) = ||E(\lambda)f||^2$ صعودی است. در نتیجه تساوی قطبی (بخش ۸.۴ فصل ۴ را ببینید) نشان می‌دهد که به ازای هر زوج $f, g \in \mathcal{H}$، تابع $F(\lambda) = (E(\lambda)f, g)$ با تغییر کراندار و به‌علاوه از راست پیوسته است. با این ملاحظات اکنون می‌توانیم نتیجه اساسی را بیان کنیم.

قضیه ۲۲.۶. فرض کنید T یک عملگر متقارن کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه یک حلال طیفی $\{E(\lambda)\}$ وجود دارد، به طوری

که

$$T = \int_{a^-}^{b} \lambda dE(\lambda)$$

به این معنا که، به ازای هر $f, g \in \mathcal{H}$

$$(Tf, g) = \int_{a^-}^{b} \lambda d(E\lambda f, g) = \int_{a^-}^{b} \lambda dF(\lambda) \tag{۳۲.۶}$$

که انتگرال روی طرف راست به فضای لبگ - اشتیل یس به همان صورت (۳) و (۴) بخش ۲.۳ گرفته می‌شود.

نتیجه، قضیه طیفی را برای عملگرهای متقارن فشرده T را به معنای زیر در برمی‌گیرد. فرض کنید $\{\varphi_k\}$ پایه متعامد یکه از بردارهای ویژه‌ی T متناظر با مقادیر ویژه‌ی λ_k باشد، به همان صورت که وجود آن با قضیه ۲۷.۴ فصل ۴ تضمین می‌شود. در این حالت حلال طیفی را طوری می‌گیریم که از طریق بسط متعامد به وسیله

$$E(\lambda)f \sim \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} (f, \varphi_k)\varphi_k$$

تعریف می‌شود و به سهولت بررسی می‌شود که شروط (۱)، (۲)، (۳)، برقرارند. همچنین توجه می‌کنیم $||E(\lambda)f||^{۲} = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} |(f, \varphi_k)|$ و بنابراین $F(\lambda) = (E(\lambda)f, g)$ یک تابع پرش خالص است، به صورتی که در بخش ۲.۳ فصل ۳، آمده است.

۲.۶.۶ عملگرهای مثبت

برهان قضیه به مفهوم مثبت بودن عملگرها بستگی دارد. می‌گوییم T مثبت است، و می‌نویسیم $T \geqslant 0$، اگر متقارن باشد و به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $(Tf, f) \geqslant 0$. (توجه کنید (Tf,f) اگر T متقارن باشد به صورت خودکار حقیقی است.) می‌نویسیم $T_1 \geqslant T_2$ به این معنی که $T_1 - T_2 \geqslant 0$. توجه کنید برای دو تصویر متعامد داریم $E_1 \geqslant E_2$، اگر و فقط اگر به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، $\|E_1 f\| \geqslant \|E_2 f\|$ و این با خواص متناظر (الف)-(ج) که بالاتر توصیف شده، معادل است. همچنین توجه کنید که اگر S متقارن باشد، آنگاه $S^2 = T$ مثبت است. اکنون برای T متقارن، می‌نویسیم

$$(۳۳.۶)\qquad \text{برای}\ \|f\| \leqslant 1 \qquad a = \min(Tf, f), \quad \text{و} \quad b = \max(Tf, f)$$

گزاره ۲۳.۶. فرض کنید T متقارن باشد. در این‌صورت $\|T\| \leqslant M$، اگر و فقط اگر $-MI \leqslant T \leqslant MI$. در نتیجه $\|T\| = \max(|a|, |b|)$.

این نتیجه‌ای از رابطه(۷.۴) فصل ۴ است.

گزاره ۲۴.۶. فرض کنید T مثبت باشد. در این صورت عملگر متقارن (که به صورت $T^{\frac{1}{2}}$ نوشته می‌شود) موجود است، به طوری که $S^2 = T$ و S با هر عملگری که با T جابجا می‌شود، تعویض می شود.

عبارت آخر به این معنی است که اگر برای عملگر A داشته باشیم $AT = TA$، آنگاه $AS = SA$.

وجود S به صورت زیر دیده می‌شود. بعد از ضرب کردن به‌وسیله اسکالر مثبت مناسب، فرض می‌کنیم $||T|| \leqslant ۱$. بسط دو جمله‌ای از $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$ را در نظر بگیرید که برای $|t| < ۱$ به صورت $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}} = \sum_{k=۰}^{\infty} b_k t^k$ ارائه می‌شود. حقیقت مربوطه‌ای که دراینجا نیاز است، این است که b_k ها حقیقی هستند و $\sum_{k=۰}^{\infty} |b_k| < \infty$. در واقع، با استفاده از محاسبه مستقیم بسط سری‌های توانی $(۱-t)^{\frac{۱}{۲}}$ در می‌یابیم که

$$b_۰ = ۱, b_۱ = -\frac{۱}{۲}, b_۲ = -\frac{۱}{۸}$$

و به‌طور کلی تر، $b_k = -\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲} \cdots \frac{(k-\frac{۳}{۲})}{k!}$ اگر $k \geqslant ۲$، نتیجه می‌شود که $b_k = O(k^{-\frac{۳}{۲}})$. یا به طور ساده تر، از آنجایی که $b_k < ۰$، هرگاه $k \geqslant ۱$، اگر در تعریف قرار دهیم $t \to ۱$ مشاهده می‌کنیم $-\sum_{k=۱}^{\infty} b_k = ۱$، و بنابراین $\sum_{k=۰}^{\infty} |b_k| = ۲$.

اکنون فرض کنید $S_n(t)$ چند جمله‌ای $\sum_{k=۰}^{n} b_k t^k$ را مشخص کند در این‌صورت چند جمله‌ای

$$s_n^۲(t) - (۱-t) = \sum_{k=۰}^{۲n} c_k^n t^k, \qquad (۳۴.۶)$$

وقتی که $n \to \infty$ دارای خاصیت $\sum_{k=۰}^{۲n} |c_k^n| \to ۰$ است. در حقیقت

$s_n(t) = (1-T)^{\frac{1}{2}} - r_n(t)$، که در آن $r_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k t^k$. بنابراین $s_n^2(t) - (1-t) = -r_n^2(t) - 2s_n(t) r_n(t).$ اکنون به وضوح طرف چپ یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از یا مساوی با $2n$ است و بنابراین با مقایسه ضرایب طرف راست نشان می‌دهد که c_k^n به‌وسیله $3\sum_{j>n} |b_j||b_{k-j}|$ کنترل می‌شود. این بلافاصله نتیجه می‌دهد وقتی که $n \to \infty$، $\sum_k |c_k^n| = O(\sum_{j>n} |b_j|) \to 0$ همان طوری‌که بیان شده است.

با به‌کار بردن این مطلب، قرار دهید $T_1 = I - T$. در این صورت $0 \leqslant T_1 \leqslant I$ و بنابراین طبق گزاره ۲۳.۶، $\|T_1\| \leqslant 1$. فرض کنید $S_n = s_n(T_1) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_1^k$ که در آن $T_1^0 = I$. حال به‌وسیله نرم‌های عملگری وقتی که $n, m \to \infty$،

$$\|S_n - S_m\| \leqslant \sum_{k \geqslant min(n,m)} |b_k| \to 0$$

، چون $\|T_1^k\| \leqslant \|T_1\|^k \leqslant 1$. بنابراین S_n به عملگری مانند S همگراست. به وضوحS_n، برای هرn متقارن است و بنابراین S نیز متقارن است. به‌علاوه از (۳۴.۶)، داریم $S_n^2 - T = \sum_{k=0}^{2n} c_k^n T_1^k$ و در نتیجه وقتی که $n \to \infty$، $\|S_n^2 - T\| \leqslant \sum |c_k^n| \to 0$ که نتیجه می‌دهد $S^2 = T$. سر انجام اگر A با T جابجا شود به وضوح با هر چند جمله‌ای از T، و بنابراین با S_n و S جابجا می‌شود.

گزاره ۲۵.۶. اگر $T_۱$ و $T_۲$ عملگرهای مثبتی باشند که جابجا می‌شوند، آنگاه $T_۱T_۲$ نیز مثبت است.

در واقع، اگر S ریشه دوم $T_۱$ ارائه شده در گزاره قبل باشد، آنگاه $T_۱T_۲ = SST_۲ = ST_۲S$ و بنابراین داریم $(T_۱T_۲f, f) = (ST_۲Sf, f) = (T_۲Sf, Sf)$. چون S متقارن است و بنابراین آخرین جمله نیز مثبت است.

گزاره ۲۶.۶. فرض کنید T متقارن باشد و a و b از (۳۳.۶) داده شده باشند. اگر $p(t) = \sum_{k=۰}^{n} c_k t^k$ یک چند جمله‌ای حقیقی باشد که برای $t \in [a, b]$ مثبت است، آنگاه عملگر $ph(T) = \sum_{k=۰}^{n} c_k T^k$ مثبت است.

برای مشاهده این امر بنویسید

$$p(t) = c \prod_j (t - \rho_j) \prod_k (\rho'_k - t) \prod_l ((t - \mu_l)^۲ + \nu_l)$$

که در آن c مثبت است و عامل سوم آن متناظر با ریشه‌های غیر حقیقی $p(t)$ است (که به صورت زوج‌های مزدوج ظاهر شوند) و ریشه‌های حقیقی $p(t)$ در (a, b) قرار می‌گیرند که لزوما از درجه زوج هستند. عامل اول شامل همه ریشه‌های حقیقی ρ_j با شرط $\rho_j \leqslant a$ می‌شود و عامل دوم شامل ریشه‌های حقیقی $\rho_{k'}$ با شرط $\rho_{k'} \geqslant b$

است. از آنجایی که هر یک از فاکتورهای $T-\rho_j I$ و $\rho'_j I - T$ و $(T-\mu_l I)^{۲}+\nu_l^{۲} I$ مثبت هستند و جابجا می‌شوند.

نتیجه ۲۷.۶. اگر $p(t)$ یک چند جمله‌ای حقیقی باشد، آنگاه

$$||p(T)|| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |p(t)|.$$

این یک نتیجه بلافصل است که با به کاربردن قضیه ۲۳.۶ به‌دست می‌آید. از آنجایی که $-M \leqslant p(t) \leqslant M$ که در آن $M=\sup_{t\in[a,b]}|p(t)|$ و بنابراین

$$-MI \leqslant p(T) \leqslant MI$$

.

گزاره ۲۸.۶. فرض کنید $\{T_n\}$ دنباله‌ای از عملگرهای مثبتی باشد که به ازای هر n، در $T_n \geqslant T_{n+۱}$ صدق می‌کند. در این صورت عملگر مثبت T وجود دارد، به‌طوری که وقتی $n\to\infty$ به ازای هر $f\in\mathcal{H}$، $T_n f \to Tf$.

برهان. توجه می‌کنیم به ازای هر $f\in\mathcal{H}$ ثابت، دنباله $(T_n f, f)$ از اعداد مثبت، نزولی و بنابراین همگراست. اکنون ملاحظه کنید برای هر عملگر مثبت S با شرط $||S|| \leqslant M$ داریم

$$||S(f)||^{۲} \leqslant (Sf,f)^{\frac{۱}{۲}} M^{\frac{۳}{۲}} ||f||. \qquad (۳۵.۶)$$

در حقیقت تابع درجه دوم

$$(S(tI+S)f,(tI+S)f) = t^{۲}(Sf,f) + ۲t(Sf,Sf) + (S^{۲}f,Sf)$$

برای هر عدد حقیقی t مثبت است. بنابراین دلتای آن منفی است. یعنی

$$||S(f)||^{۴} \leqslant (Sf,f)(S^{۲}f,Sf)$$

، و (۳۵.۶) به‌دست می‌آید. این حکم را برای $S = T_n - T_m$ با شرط $m \leqslant n$ به کار می‌بریم.در این‌صورت $||T_n - T_m|| \leqslant ||T_n|| \leqslant ||T_۱|| = M$ و وقتی که $n \to \infty$، $((T_n - T_m)f,f) \to ۰$. ملاحظه می‌کنیم وقتی که $n,m \to \infty$،

$$||T_n f - T_m f|| \to ۰$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} T_n(f) = T(f)$ موجود است و T نیز به وضوح مثبت است. □

۳.۶.۶ برهان قضیه

با یک عملگر متقارن داده شده T و با a,b که در (۳۳.۶) ارائه شده، شروع می‌کنیم. اکنون ایده‌ی مربوط کردن یک عملگر متقارن $\Phi(T)$ به هر تابع مناسب Φ روی $[a,b]$ را فراتر می‌بریم. این کار را با پیش روی در راستای یک سری قدم‌های کلی سازی، انجام می‌دهیم. ابتدا

اگر Φ یک چند جمله‌ای حقیقی $\sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ باشد، آنگاه همانند گذشته $\Phi(T)$ به‌صورت $\sum_{k=0}^{n} c_k T^k$ تعریف می‌شود. توجه کنید که این ارتباط یک همریختی است: اگر $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ آنگاه $\Phi(T) = \Phi_1(T) + \Phi_2(T)$، همچنین اگر $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$ آنگاه $\Phi(T) = \Phi_1(T) \cdot \Phi_2(T)$. به‌علاوه چون Φ حقیقی است (و c_k ها حقیقی هستند) $\Phi(T)$ متقارن است.

سپس از آنجایی که هر تابع پیوسته حقیقی مقدار Φ روی $[a, b]$ به طور یکنواخت به‌وسیله چند جمله‌ای‌های p_n تقریب زده می‌شود، (برای نمونه بخش ۱,۸ فصل ۵ جلد ۱ را ببینید.) طبق نتیجه ۲۷.۶ می‌بینیم که دنباله $p_n(T)$ با نرم عملگری همگرا به حدی است که آن را $\Phi(T)$ می‌نامیم و به‌علاوه این حد به دنباله‌ای از چند جمله‌ای‌ها که با Φ تقریب زده می‌شود بستگی ندارد. همچنین $\Phi(T)$ به طور خودکار یک عملگر متقارن است، اگر روی $[a, b]$ ، $\Phi(t) \geq 0$ داشته باشیم همیشه می‌توانیم دنباله تقریب زننده را روی $[a, b]$، مثبت بگیریم و در نتیجه $\Phi(T) \geq 0$.

سرانجام $\Phi(T)$ را برای Φ به‌دست آمده از حد $\Phi(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(t)$ تعریف می‌کنیم، که در آن $\{\Phi_n(t)\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع پیوسته مثبت روی $[a, b]$ است. در حقیقت طبق گزاره ۲۸.۶، حد $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(T)$ با توجه به آنچه که در بالا برای Φ_n اثبات کردیم، موجود است. برای نشان دادن این‌که این حد از دنباله $\{\Phi_n\}$ مستقل است و بنابراین

$\Phi(t)$ به صورت حد بالا، خوش تعریف است، فرض کنید $\{\Phi'_n\}$ دنباله دیگری از توابع پیوسته صعودی باشد که به Φ همگراست. در این صورت، هرگاه $\epsilon > 0$ داده شده و ثابت باشد، برای هر n به قدر کافی بزرگ داریم $\Phi'_n(t) \leq \Phi_k(t) + \epsilon$ بنابراین $\Phi'_n(T) \leq \phi_k(T) + \epsilon I$. برای این n ها، و با عبور به حد ابتدا در n سپس در k، و سپس با میل دادن $\epsilon \to 0$ به این می‌رسیم که $\lim_{n\to\infty} \Phi'_n(T) \leq \lim_{k\to\infty} \Phi_k(T)$. از طریق تقارن، عکس نامساوی برقرار است و دو حد یکسان هستند. همچنین توجه کنید برای یک جفت از این توابع حدی اگر برای $t \in [a,b]$، $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(t)$ آنگاه $\Phi_1(T) \leq \Phi_2(T)$.

توابع پایه‌ای Φ و $\Phi = \varphi^\lambda$ که حلال طیفی را به‌دست می‌دهند برای هر عدد حقیقی λ به صورت زیر تعریف می‌شوند

اگر $t \leq \lambda$، $\varphi^\lambda(t) = 1$ و اگر $\lambda < t$ $\varphi^\lambda(t) = 0$.

توجه می‌کنیم که $\varphi^\lambda(t) = \lim \varphi^\lambda_n(t)$. که در آن اگر $t \leq \lambda$، داریم $\varphi^\lambda(t) = 1$ و اگر $t \geq \lambda + 1/n$، آنگاه $\varphi^\lambda_n(t) = 0$ و برای $t \in [\lambda, \lambda + 1/n]$، $\varphi^\lambda_n(t)$ خطی است. بنابراین هر $\varphi^\lambda(t)$ حد یک دنباله صعودی از توابع پیوسته است. مطابق با تعاریف بالا قرار می‌دهیم

$$E(\lambda) = \varphi^\lambda(t),$$

از آنجایی که هرگاه $\lambda_1 \leq \lambda_2$، $\lim_{n\to\infty} \varphi^{\lambda_1}_n(t)\varphi^{\lambda_2}_n(t) = \varphi^{\lambda_1}_n(t)$، مشاهده

می‌کنیم که $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_1)$. بنابراین برای هر λ، $E(\lambda)^2 = E(\lambda)$ و از آنجایی که $E(\lambda)$ متقارن است، بنابراین یک تصویر متعامد است. به‌علاوه برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$\|E(\lambda_1)f\| = \|E(\lambda_1)E(\lambda_2)f\| \leq \|E(\lambda_2)f\|,$$

بنابراین $E(\lambda)$ صعودی است. به وضوح اگر $\lambda < a$، $E(\lambda) = 0$ چون برای این λ ها، روی $[a, b]$، $\varphi^\lambda(t) = 0$. به طور مشابه برای $\lambda \geq b$، $E(\lambda) = I$.

سپس توجه می‌کنیم $E(\lambda)$ از راست پیوسته است. در حقیقت $f \in \mathcal{H}$ و $\epsilon > 0$ را ثابت نگه دارید. در این صورت برای یک n که اکنون ثابت گرفته شده است، داریم $\|E(\lambda)f - \varphi_n^\lambda(T)f\| < \epsilon$. در این حالت، $\varphi_n^\mu(t)$ وقتی که $\mu \to \lambda$ در t به طور یکنواخت به $\varphi_n^\lambda(t)$ همگراست. اگر $|\mu - \lambda| < \delta$ برای یک δ مناسب، $\sup_t |\varphi_n^\mu(t) - \varphi_n^\lambda(t)| < \epsilon$ و بنابراین $\|E(\lambda)f - \varphi_n^\mu(T)\| < 2\epsilon$. اکنون برای $\lambda \leq \mu$ داریم $E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda)$ و $E(\mu)\varphi_n^\mu(T) = E(\mu)$ در نتیجه اگر $\lambda \leq \mu \leq \lambda + \delta$، آنگاه

$$\|E(\lambda)f - E(\mu)f\| < 2\epsilon$$

. از آنجایی که ϵ دلخواه بود، پیوستگی راست ثابت می‌شود.

سرانجام نمایش طیفی (۳۲.۶) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k = b$ افرازی از $[a, b]$ باشد، به طوری که

$\sup_j(\lambda_j - \lambda_{j-۱}) < \delta$. در این‌صورت، از آنجایی که

$$t = \sum_{j=۱}^{k} t(\varphi^{\lambda_j}(t) - \varphi^{\lambda_{j-۱}}(t)) + t\varphi^{\lambda_۰}(t),$$

توجه می‌کنیم

$$t \leq \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j(\varphi^{\lambda_j}(t) - \varphi^{\lambda_{j-۱}}(t)) + \lambda_۰\varphi^{\lambda_۰}(t) \leq t + \delta.$$

با به کاربردن این توابع برای عملگر T به‌دست می‌آوریم

$$T \leq \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-۱})) + \lambda_۰ E(\lambda_۰) \leq T + \delta I,$$

و بنابراین T در نرم از مجموع بالا با حداکثر مقدار δ اختلاف دارد. در نتیجه

$$\left|(Tf, f) - \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j \int_{(\lambda_{j-۱}, \lambda_j]} d(E(\lambda)f, f) - \lambda_۰(E(\lambda_۰)f, f)\right| \leqslant \delta\|f\|^۲.$$

اما هنگامی که افرازهای $[a, b]$ را تغییر دهیم، با فرض این‌که نرم δ به صفر همگرا باشد، مجموع فوق به $\int_{-a}^{b} \lambda d(E(\lambda)f, f)$ میل می‌کند. بنابراین

$$(Tf, f) = \int_{-a}^{b} \lambda d(E(\lambda)f, f)$$

و اتحاد قطبی، (۳۲.۶) را می‌دهد.

بحثی مشابه نشان می‌دهد که اگر Φ روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه عملگر $\Phi(T)$ یک نمایش طیفی نظیر آن را دارد

$$(\Phi(T)f,g)=\int_{-a}^{b}\Phi(\lambda)d(E(\lambda)f,g). \qquad (۳۶.۶)$$

این رابطه به‌دلیل $|\Phi(t)-\sum_{j=1}^{k}\Phi(\lambda_j)(\varphi^{\lambda_j}(t)-\varphi^{\lambda_{j-1}}(t))-\Phi(\lambda_0)\varphi^{\lambda_0}(t)|<\delta'$ است، که در آن $\delta'=\sup_{|t-t'|\leq\delta}|\Phi(t)-\Phi(t')|$، زمانی که $\delta\to 0$، به صفر میل می‌کند.

این نمایش به Φ های پیوسته که مختلط مقدار هستند نیز توسیع می‌یابد (با در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی‌به طور جداگانه)، یا برای Φ هایی که حدود نزولی توابع پیوسته نقطه به نقطه هستند.

۴.۶.۶ طیف

می‌گوییم یک عملگر کراندار S روی $\mathcal{H}$ معکوس پذیر است، هرگاه S یک دوسویی از $\mathcal{H}$ باشد و معکوس آن، S^{-1} نیز کراندار باشد. توجه کنید S^{-1}، در شرط $S^{-1}S=SS^{-1}=I$ صدق می‌کند. طیف S به‌وسیله $\sigma(S)$ نمایش داده می‌شود، که مجموعه‌ای از اعداد مختلط z است، به‌طوری‌که $S-zI$ برای آن‌ها معکوس پذیر نیست.

گزاره ۲۹.۶. اگر T متقارن باشد، آنگاه $\sigma(T)$ زیر مجموعه بسته‌ای از بازه $[a,b]$ است که به‌وسیله (۳۳.۶) داده می‌شود.

توجه کنید اگر $z \notin [a,b]$، آنگاه تابع $\Phi(t) = (t-z)^{-1}$ روی $[a,b]$ پیوسته است و $\Phi(T)(T-zI) = (T-zI)\Phi(T) = I$. بنابراین $\Phi(T)$ معکوس $T-zI$ است. اکنون فرض کنید $T_0 = T - \lambda_0 I$ معکوس پذیر است. در این‌صورت ادعا می‌کنیم $T_0 - \epsilon I$ برای همه ϵ های (مختلط) که به مقدار کافی کوچک است، معکوس پذیر است. این ثابت می‌کند که متمم $\sigma(T)$ باز است. در واقع $T_0 - \epsilon I = T_0(I - \epsilon T_0^{-1})$ و می‌توانیم عملگر معکوس $(I - \epsilon T_0^{-1})$ را (به طور صوری) به صورت مجموع $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n (T_0^{-1})^{n+1}$ بنویسیم.

از آنجایی که $\sum_{n=0}^{\infty} ||\epsilon^n (T_0^{-1})^{n+1}|| \leqslant \sum |\epsilon|^n ||T_0^{-1}||^{n+1}$، زمانی که $|\epsilon| < ||T_0^{-1}||^{-1}$ همگراست و مجموع با

$$||T_0^{-1}|| \frac{1}{1 - |\epsilon| ||T_0^{-1}||}, \tag{۳۷.۶}$$

کنترل می‌شود.

بنابراین می‌توانیم عملگر $(T_0 - \epsilon I)^{-1}$ را به صورت $\lim_{N\to\infty} T_0^{-1} \sum_{n=0}^{N} \epsilon^n (T_0^{-1})^{n+1}$ تعریف کنیم و این معکوس دلخواه را به‌دست می‌دهد، همان‌طور که به سهولت بررسی شد.

ادعای پایانی ما این‌است که طیف $\sigma(T)$ با حلال طیفی $\{E(\lambda)\}$ مرتبط است.

گزاره ۳۰.۶. به ازای هر $f \in \mathcal{H}$، اندازه لبگ اشتیل یس متناظر با $F(\lambda) = (E(\lambda)f, f)$ دارای تکیه‌گاه $\sigma(T)$ است.

به عبارت دیگر، $F(\lambda)$ روی هر بازه باز از متمم $\sigma(T)$ ثابت است.

برای اثبات فرض کنید، J یکی از بازه‌های باز در متمم $\sigma(T)$، $x_\circ \in J$ و $J_\circ$ زیر بازه‌ای به مرکز $x_\circ$ به طول ۲ϵ با $\epsilon < ||(T - x_\circ I)^{-۱}||$ باشد. ابتدا توجه کنید اگر z قسمت موهومی ناصفری داشته باشد، آنگاه $(T - zI)^{-۱}$ به‌وسیله $\Phi_z(T)$ با $\Phi_z(t) = (t - z)^{-۱}$ داده می‌شود. بنابراین $(T - zI)^{-۱}(T - \overline{z}I)^{-۱}$ با $\psi_z(T)$ به صورت $\psi_z(t) = \frac{۱}{|t - z|^۲}$ ارائه می‌شود. بنابراین با توجه به تقریب ارائه شده در ۳۷.۶ و نمایش ۳۶.۶ و استفاده برای $\Phi = \psi_z$ تا زمانی‌که z مختلط باشد و $|x_\circ - z| < \epsilon$، به‌دست می‌آوریم

$$\int \frac{dF(z)}{|\lambda - z|^۲} \leqslant A'.$$

بنابراین نامساوی مشابهی را برای x های حقیقی نیز به‌دست می‌آوریم. اکنون انتگرال نسبت به $x \in J_\circ$ با به کار بردن این قانون که به ازای هر $\lambda \in J_\epsilon$، داریم $\int_{J_\epsilon} \frac{dx}{|\lambda - x|^۲} = \infty$، نتیجه می‌دهد $\int_{J_\epsilon} dF(\lambda) = \circ$. بنابراین $F(\lambda)$ روی J_ϵ ثابت است. اما از آنجایی که $x_\circ$ نقطه دلخواهی از J

بود، تابع $F(\lambda)$ در سراسر J ثابت است و گزاره ثابت می‌شود.

۵.۶.۶ تمرین‌ها

۱. فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{M}$ گردایه‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد. ثابت کنید اگر $\mathcal{M}$ تحت متمم‌ها و اجتماع‌های شمارای مجموعه‌های مجزا بسته باشد، آنگاه $\mathcal{M}$ σ-جبر است.
راهنمایی: هر اجتماع شمارا از مجموعه‌ها به صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های مجزا نوشته می‌شود.

۲. فرض کنید $(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضای اندازه باشد. می‌توان **کامل سازی** این فضا را به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید $\overline{\mathcal{M}}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های به شکل $E \cup Z$ باشد که $E \in \mathcal{M}$ و $Z \subset F$ و $F \in \mathcal{M}$ و $\mu(F) = 0$. همچنین تعریف کنید $\overline{\mu}(E \cup Z) = \mu(E)$. در این صورت :

الف. $\overline{\mathcal{M}}$ کوچکترین σ جبری است که شامل $\mathcal{M}$ و همه زیرمجموعه‌های اعضای $\mathcal{M}$ با اندازه صفر می‌شود.

ب. تابع $\overline{\mu}$ یک اندازه روی $\overline{\mathcal{M}}$ است و این اندازه کامل است.

راهنمایی: برای اثبات این‌که $\overline{\mathcal{M}}$، σ جبراست کافی است بررسی کنیم اگر $E_1 \in \overline{\mathcal{M}}$، آنگاه $E_1^c \in \overline{\mathcal{M}}$. به ازای $Z \subset E$، E و F در $\mathcal{M}$،

بنویسید $E_1 = E \cup Z$. در این صورت

$$E_1^c = (E \cup F)^c \cup (F - Z).$$

۳. اندازه لبگ خارجی m_* معرفی شده در فصل ۱ را درنظر بگیرید. ثابت کنید مجموعه‌ی E در $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر کاراتئودوری است، اگر و فقط اگر به معنای فصل ۱ اندازه‌پذیر لبگ باشد.

راهنمایی: اگر E اندازه‌پذیر لبگ و A یک مجموعه باشد، مجموعه G_δ ی G را طوری انتخاب کنید که $A \subset G$ و

$$m_*(A) = m(G)$$

. برعکس، اگر E اندازه‌پذیر کارا تئودوری باشد و $m_*(E) < \infty$، مجموعه G_δ ی G را طوری انتخاب کنید، که $E \subset G$، $m_*(E) = m_*(G)$. در این‌صورت $G \setminus E$ اندازه خارجی صفر دارد.

۴. فرض کنید r یک دوران در $\mathbb{R}^d$ باشد. با به کار بردن این قانون که نگاشت $x \mapsto r(x)$ اندازه لبگ را حفظ می‌کند.(مسأله ۴ فصل ۲ و تمرین ۲۶ فصل ۳ را ببینید.) نشان دهید که این نگاشت یک نگاشت حافظ اندازه از فضای S^{d-1} با اندازه $d\sigma$ را القا می‌کند.

عکس مطلب در مسأله ۴ بیان می‌شود.

۵. فرمول مختصات قطبی را به کار ببرید تا موارد زیر را ثابت کنید:

الف. اگر $d=۲$، آنگاه $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|x|^۲}dx = ۱$. از این رابطه برقراری فرمول را برای هر d نتیجه بگیرید.

ب. $\left(\int_۰^\infty e^{-\pi r^۲} r^{d-۱}dr\right)\sigma(S^{d-۱}) = ۱$ و در نتیجه، $\sigma(S^{d-۱}) = ۲\pi^{d/۲}/\Gamma(d/۲)$.

ج. اگر B گوی یکه باشد، $v_d = m(B) = \pi^{d/۲}/\Gamma(d/۲+۱)$، زیرا این مقدار با $\left(\int_۰^۱ r^{d-۱}dr\right)\sigma(S^{d-۱})$ مساوی است(تمرین ۱۴ فصل ۲ راببینید.).

۶. شکلی از فرمول گرین برای گوی یکه B در $\mathbb{R}^d$ به‌صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنید u و v جفتی از توابع در $C^۲(\overline{B})$ باشند. در این صورت داریم

$$\int_B (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{S^{d-۱}} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})d\sigma.$$

در این جا $S^{d-۱}$ کره یکه با اندازه $d\sigma$ تعریف شده در بخش ۲.۳.۶ است، و $\partial u/\partial n$ و $\partial v/\partial n$ مشتق‌های سویی u و v (را به ترتیب) در طول نرمال های درونی به $S^{d-۱}$ مشخص می‌کنند.

نشان دهید می‌توان عبارت بالا را طبق لم ۱۵.۵، از فصل قبل، با قرار دادن $\eta = \eta_\epsilon^+$ و میل دادن $\epsilon \to ۰$ استنتاج کرد.

۷. نوع دیگری از خاصیت مقدار میانگین وجود دارد که در رابطه ۲۱,۵ فصل ۵ آورده شد. می‌تواند به این صورت بیان شود. فرض کنید u روی Ω همساز باشد و B گویی به مرکز $x_\circ$ و شعاع r باشد که بستار آن مشمول در Ω است. در این صورت $u(x_\circ) = c\int_{S^{d-1}} u(x_\circ + ry)d\sigma(y)$ و $c^{-1} = \sigma(S^{d-1})$.

برعکس، یک تابع پیوسته که در خاصیت مقدار میانگین صدق می‌کند، همساز است.

راهنمایی: این می‌تواند به‌عنوان نتیجه‌ای مستقیم از نتیجه متناظر برای میانگین‌ها روی گوی‌ها اثبات شود (قضیه ۴,۲۷ فصل ۵) یا این‌که می‌تواند از تمرین ۶ منتج شود.)

۸. این حقیقت که اندازه لبگ به طور منحصربه فرد به‌وسیله‌ی پایایی انتقال مشخص می‌شود، با گزاره زیر می‌تواند دقیق‌تر شود: اگر μ روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌ی بورل و تحت انتقال پایا، و روی مجموعه‌های فشرده متناهی باشد، در این صورت μ مضربی از اندازه لبگ m است. این قضیه را از طریق قدم‌های زیر اثبات کنید.

الف. فرض کنید Q_a یک انتقال از مکعب

$$\{x : \circ < x_j \leq a, j = \text{۱}, ..., d\}$$

با ضلع به طول a باشد. اگر فرض کنیم $\mu(Q_1) = c$، در این صورت به ازای هر عدد صحیح n، $\mu(Q_{1/n}) = cn^{-d}$.

ب. در نتیجه μ نسبت به m به‌طور مطلق پیوسته است و یک تابع انتگرالپذیر موضعی f موجود است، به طوری که

$$\mu(E) = \int_E f dx.$$

ج طبق قضیه مشتقگیری (نتیجه ۷.۳ فصل ۳) داریم $f(x) = c$ (ت.ه) و بنابراین $\mu = cm$.

راهنمایی: Q_1 می‌تواند به‌صورت اجتماع مجزایی از n^d انتقال $Q_{\frac{1}{n}}$ نوشته شود.

۹. فرض کنید $C([a, b])$ فضای برداری توابع پیوسته روی بازه بسته و کراندار $[a, b]$ را مشخص کند. فرض می‌کنیم، اندازه بورل μ روی این بازه با شرط $\mu([a, b]) < \infty$ داده شده باشد. در این‌صورت

$$f \mapsto \ell(f) = \int_a^b f(x) d\mu(x),$$

یک تابعک خطی روی $C([a, b])$ است، به طوری که ℓ مثبت است. به این معنا که اگر $f \geq 0$، آنگاه $\ell(f) \geq 0$.

ثابت کنید برعکس برای هر تابعک خطی ℓ روی $C([a,b])$ که به معنای بالا مثبت است، یک اندازه بورل متناهی منحصربفرد μ وجود دارد، به طوری که برای هر $f \in C([a,b])$، $\ell(f) = \int_a^b f d\mu$.

راهنمایی: فرض کنید $a = 0$ و $u \geq 0$. $F(u)$ را به صورت $F(u) = \lim_{\epsilon \to 0} \ell(f_\epsilon)$ تعریف کنید، که در آن

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{برای } 0 \leq x \leq u \\ 0 & \text{برای } u + \epsilon \leq x, \end{cases}$$

و f_ε بین u و $u+\epsilon$ خطی است. (تصویر ۳.۶ را ببینید.) در این صورت F صعودی و از راست پیوسته است و $\ell(F)$ بنابر قضیه ۱۲.۶ به‌صورت $\int_a^b f(x) dF(x)$ نوشته می‌شود.

اگر $[a,b]$ با بازه نامحدود بسته‌ای جایگزین شود، نتیجه همچنان برقرار است. سپس فرض می‌کنیم ℓ روی توابع پیوسته با تکیه‌گاه کراندار تعریف می‌شود و نتیجه می‌گیریم μ روی همه بازه‌های کراندار متناهی است.

در مساله ۵ تعمیمی از آن ارائه می‌شود.

۱۰. فرض کنید ν، ν_1 و ν_2 اندازه‌های علامتداری روی $(X, \mathcal{M})$ باشند و μ یک اندازه (مثبت) روی $\mathcal{M}$ باشد. با به کار بردن نمادهای $\perp$ و $\ll$ که در بخش ۴.۶ تعریف شد، ثابت کنید :

شکل ۳.۶: تابع f_ϵ تمرین ۹

الف. اگر $\nu_1 \perp \mu$ و $\nu_2 \perp \mu$، آنگاه $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

ب. اگر $\nu_1 \ll \mu$ و $\nu_2 \ll \mu$، آنگاه $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

ج. $\nu_1 \perp \nu_2$ نتیجه می‌دهد که $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

د. $\nu \ll |\nu|$

ه. اگر $\nu \perp \mu$ و $\nu \ll \mu$، آنگاه $\nu = 0$.

۱۱. فرض کنید F یک تابع نرمال شده و صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد و فرض کنید $F = F_A + F_C + F_J$ تجزیه‌ای از F مانند تمرین ۲۴

فصل ۳ باشد، در اینجا F_A به طور مطلق پیوسته است، F_C پیوسته است و تقریبا همه جا $F_{C'} = ۰$ و F_J تابع پرش خالص است. فرض کنید $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$ با اندازه‌های بورل μ، μ_A، μ_C و μ_J که به ترتیب با F، F_A، F_C و F_J متناظر هستند. بررسی کنید که

الف. μ_A نسبت به اندازه لبگ پیوسته مطلق است و برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر لبگ E، $\mu_A(E) = \int_E F'(x)dx$.

ب. به‌عنوان نتیجه، اگر F پیوسته مطلق باشد، آنگاه هرگاه f و fF' انتگرالپذیر باشند، داریم

$$\int f d\mu = \int f dF = \int f(x)F'(x)dx.$$

ج. $\mu_C + \mu_J$ و اندازه لبگ دو به دو تکین هستند.

۱۲. فرض کنید، $\mathbb{R}^d \setminus \{۰\}$ به صورت، $\mathbb{R}_+ \times S^{d-۱}$ با، $\mathbb{R}_+ = \{۰ < r < \infty\}$ نمایش داده شود. در این‌صورت هر مجموعه باز در $\mathbb{R}^d \setminus \{۰\}$ می‌تواند به صورت اجتماع شمارایی از مستطیل‌های باز این حاصلضرب نوشته شود.

راهنمایی: گردایه شمارایی از مستطیل‌هایی به این شکل را در نظر بگیرید.

$$\{r_j < r < r'_k\} \times \{\gamma \in S^{d-۱} : |\gamma - \gamma_\ell| < ۱/n\}.$$

در اینجا r_j و $r_{k'}$ روی همه اعداد گویای مثبت تغییر می‌کنند و $\{\gamma_\ell\}$ یک مجموعه چگال شمارا از S^{d-1} است.

۱۳. فرض کنید m_j برای فضای $\mathbb{R}^d_j$، $j = 1,2$ اندازه لبگ باشد. حاصلضرب $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ $(d = d_1 + d_2)$ را با اندازه لبگ m روی $\mathbb{R}^d$ در نظر بگیرید. نشان دهید که m کامل سازی (به معنای تمرین ۲) از اندازه حاصلضربی $m_1 \times m_2$ است.

۱۴. فرض کنید $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ $1 \leq j \leq k,$، یک گردایه متناهی از فضاهای اندازه باشد. نشان دهید که همتراز با حالت $k = 2$ که در سومین بخش مطالعه شد، یک اندازه حاصلضربی $\mu_1 \times \cdots \times \mu_k$ روی $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ می‌توان ساخت. درحقیقت برای هر مجموعه $E \subset X$ به طوری که $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ با $E_j \subset M_j$ برای هر j، تعریف کنید $\mu_0(E) = \prod_{j=1}^k \mu_j(E_j)$. بررسی کنید که μ_0 به یک پیش اندازه روی جبر A ازاجتماع‌های مجزای متناهی از چنین مجموعه‌هایی توسیع می‌یابد و آنگاه قضیه ۵.۶ را به کار ببرید.

۱۵. نظریه حاصلضرب تحت مفروضات مورد نیاز، به تعداد نامتناهی عامل توسیع می‌یابد. فضاهای اندازه $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ را با شرط $\mu_j(X_j) = 1$، به جز برای تعداد متناهی j، درنظر می‌گیریم.

مجموعه‌ی استوانهای E را به صورت زیر

$$\{X = (X_j), x_j \in E_j, E_j \in \mathcal{M}_j, \quad E_j = X_j,\ j \text{به جز برای متناهی}\},$$

تعریف کنید. برای چنین مجموعه‌ای تعریف کنید $\mu_\circ(E) = \prod_{j=1}^{\infty} \mu_j(E_j)$. اگر A جبر تولید شده به‌وسیله مجموعه استوانه‌ای باشد، $\mu_\circ$ به یک پیش اندازه روی A توسیع می‌یابد و می‌توانیم قضیه ۵.۶ را دوباره به کار ببریم.

۱۶. چنبره d بعدی $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ را در نظر بگیرید. $\mathbb{T}^d$ را به صورت(d عامل) $\mathbb{T}^1 \times \cdots \times \mathbb{T}^d$ مشخص کنید و فرض کنید μ اندازه حاصلضربی روی $\mathbb{T}^d$ داده شده به‌صورت

$$\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_d$$

باشد، که در آن μ_j روی X_j اندازه لبگ است، که با دایره $\mathbb{T}$ همان‌سازی می‌شود. به این معنا که، اگر هر نقطه در X_j را به طور منحصربفرد به صورت x_j با $0 < x_j \leqslant 1$ نمایش دهیم، در این‌صورت اندازه μ_j، اندازه لبگ به‌دست آمده روی $\mathbb{R}^1$ است که روی $[0,1)$ تحدید شده است.

الف. بررسی کنید که کامل‌سازی μ، اندازه لبگ القایی روی

مکعب

$$Q = \{x : ۰ < x_j \leq ۱, j = ۱, ..., d\}$$

است.

ب. برای هر تابع f روی Q، فرض کنید $\tilde{f}$ توسیع آن به $\mathbb{R}^d$ باشد که متناوب است، به این معنی که به ازای هر $z \in \mathbb{Z}^d$، $\tilde{f}(x+z) = \tilde{f}(x)$. در این صورت f روی $\mathbb{T}^d$ اندازه‌پذیراست، اگر و فقط اگر $\tilde{f}$ روی $\mathbb{R}^d$ اندازه‌پذیر باشد و f روی $\mathbb{T}^d$ پیوسته است، اگر و فقط اگر $\tilde{f}$ روی $\mathbb{R}^d$ پیوسته باشد.

ج. فرض کنید g, f روی $\mathbb{T}^d$ انتگرالپذیر باشند. نشان دهید که انتگرال تعریف شده به صورت

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)g(y)dy$$

تقریبا به ازای هر x متناهی است، و $f*g$ روی $\mathbb{T}^d$ انتگرالپذیر است و $f * g = g * f$.

د. برای هر تابع انتگرالپذیر f روی $\mathbb{T}^d$، بنویسید

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n e^{۲\pi i n \cdot x},$$

به این معنی که $a_n = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-۲\pi i n \cdot x} dx$. ثابت کنید اگر g

نیز انتگرال‌پذیر باشد و $g \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} b_n e^{۲\pi i n\cdot x}$، آنگاه

$$f * g \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n b_n e^{۲\pi i n\cdot x}.$$

ه. بررسی کنید $\{e^{۲\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^۲(\mathbb{T}^d)$ است. در نتیجه $\|f\|_{L^۲(\mathbb{T}^d)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^۲$.

ی. فرض کنید f تابع متناوب پیوسته روی $\mathbb{T}^d$ باشد. در این‌صورت f به‌طور یکنواخت با ترکیبات خطی متناهی از توابع نمایی $\{e^{۲\pi in\cdot x}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ تقریب زده می‌شود.

راهنمایی: برای (ه) آن را از طریق قضیه فوبینی به حالت $d = ۱$ تقلیل دهید. برای اثبات (و) فرض کنید اگر $۰ < x_j \leq \epsilon$، $j = ۱, \ldots, d$، $g(x) = g_\epsilon(x) = e^{-d}$ و در غیر این‌صورت روی Q، $g_\epsilon(x) = ۰$. در این صورت وقتی که $\epsilon \to ۰$ به طور یکنواخت $(f * g_\epsilon)(x) \to f(x)$. در این حالت برای $b_n = \int_{\mathbb{T}^d} g_\epsilon(x) e^{-۲\pi in\cdot x} dx$، داریم

$$(f * g_\epsilon)(x) = \sum a_n b_n e^{-۲\pi in\cdot x}$$

و

$$\sum |a_n b_n| < \infty$$

۱۷. با تقلیل به حالت $d = ۱$ نشان دهید که هر «دوران» $x \mapsto x + \alpha$ از چنبره $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}^d$، حافظ اندازه است.

۱۸. فرض کنید τ یک تبدیل حافظ اندازه روی فضای اندازه (X,μ) باشد و $\mu(x)=1$. به خاطر بیاورید که یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E پایا است، اگر $\tau^{-1}(E)$ و E در حد مجموعه‌ای از اندازه صفر متمایز باشند. حالت قوی‌تر نیازمند این است که $\tau^{-1}(E)$ با E مساوی شود. ثابت کنید اگر E مجموعه‌ای پایا باشد، مجموعه‌ی E' وجود دارد، به طوری که $E'=\tau^{-1}(E')$ و E و E' به اندازه مجموعه‌ای از اندازه صفر متمایز هستند.

راهنمایی: فرض کنید

$$E'=\limsup_{n\to\infty}\{\tau^{-1}(E)\}=\cap_{n=0}^{\infty}(\cup_{k\geq n}\tau^{-k}(E)).$$

۱۹. فرض کنید τ تبدیل حافظ اندازه روی (X,μ) باشد و $\mu(X)=1$. آنگاه τ ارگودیک است، اگر و فقط اگر هرگاه ν نسبت به μ به طور مطلق پیوسته و ν پایا باشد (به این معنا که برای همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر E، $\nu(\tau^{-1}(E))=\nu(E)$) آنگاه $\nu=c\mu$ و c ثابت است.

۲۰ فرض کنید τ یک تبدیل خطی حافظ اندازه روی (X,μ) باشد. اگر زمانی که $n\to\infty$ برای همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر E و F،

$$\mu(\tau^{-n}(E)\cap F)\to\mu(E)\mu(F)$$

آنگاه وقتی که $f, g \in L^{2}(X)$ و $(Tf)(x) = f(\tau(x))$، داریم $(T^n f, g)(x) \to (f, 1)(g, 1)$. بنابراین τ آمیخته است.

راهنمایی: از خطی بودن، مفروضات هر وقت که g, f توابعی ساده باشند، حکم را نتیجه می‌دهند.

۲۱. فرض کنید $\mathbb{T}^d$ چنبره باشد و $\tau : x \mapsto x + \alpha$ نگاشتی باشد که در تمرین ۱۷ به‌دست آمد. در این صورت τ ارگودیک است، اگر و فقط اگر

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$$

و α_1، ...، α_d و ۱ روی اعداد گویا مستقل خطی است. برای مشاهده این امر نشان دهید که:

الف. وقتی که $m \to \infty$، به ازای هر $x \in \mathbb{T}^d$، هرگاه f پیوسته و متناوب باشد و α در فرض صدق کند،

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) \to \int_{\mathbb{T}^d} f(x) dx.$$

ب. به‌عنوان نتیجه ثابت کنید در این حالت τ به طور منحصربه فرد ارگودیک است.

راهنمایی: قسمت (و) تمرین ۱۶ را به کار ببرید.

۲۲. فرض کنید $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ که در آن هر (X_i,μ_i) مساوی با (X_1,μ_1) است و $\mu_1(X_1)=1$ و فرض کنید μ اندازه حاصلضربی متناظر باشد که در تمرین ۱۵ تعریف شد. انتقال $\tau : X \to X$ را برای $x=(x_i)\in\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ به صورت $\tau((x_1,x_2,\ldots))=(x_2,x_3,\ldots)$ تعریف کنید.

الف. بررسی کنید که τ یک تبدیل حافظ اندازه است.

ب. با نشان دادن این‌که τ آمیخته است، ثابت کنید ارگودیک است.

ج. در حالت کلی توجه کنید، τ به صورت منحصر به فرد ارگودیک نیست.
اگر انتقال متناظر را روی حاصلضرب نامتناهی دو طرفه تعریف کنیم، آنگاه τ نیز یکریختی حافظ اندازه است.

راهنمایی: برای (ب) توجه کنید هرگاه E و F مجموعه‌های استوانه ای باشند و n به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه $\mu(\tau^{-n}(E\cap F))=\mu(E)\mu(F)$. برای (ج) توجه کنید برای مثال اگر نقطه $\overline{x}\in X_1$ را ثابت در نظر بگیریم، مجموعه‌ی $E=\{(x_i):x_j=\overline{x}$ برای هر $j\}$ پایا است.

۲۳. فرض کنید $X=\prod_{i=1}^{\infty} Z(2)$ که در آن هر عامل، فضای دو نقطه‌ای

$Z(۲) = \{۰, ۱\}$ با شرط $\mu_۱(۰) = \mu_۱(۱) = ۱/۲$ است و فرض کنید μ اندازه حاصلضربی روی X را مشخص کند. نگاشت $D : X \to [۰, ۱]$ که با $D(\{a_j\}) \to \sum\limits_{j=۱}^{\infty} \frac{a_j}{۲^j}$ ارائه شده است، را در نظر بگیرید. آنگاه مجموعه‌های شمارای $Z_۱ \subset X$ و $Z_۲ \subset [۰, ۱]$ موجود هستند، به طوری که

الف. D یک دو سویی از $X - Z_۱$ به $[۰, ۱] \setminus Z_۲$ است.

ب. مجموعه E در X اندازه‌پذیر است، اگر و فقط اگر $D(E)$ در $[۰, ۱]$ اندازه‌پذیر باشد و $\mu(E) = m(D(E))$، که در آن m روی $[۰, ۱]$ اندازه لبگ است.

ج. نگاشت شیفت روی $X = \prod_{i=۱}^{\infty} Z(۲)$ همان نگاشت دو برابر کننده مثال (ب) در بخش ۴.۵.۶ است.

۲۴. تعمیم زیر از نگاشت دوبرابر کننده را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد صحیح، $m \geq ۲$. نگاشت τ_m روی $[۰, ۱)$ را به وسیله‌ی $\tau(x) = mx$ به پیمانه ۱ تعریف می‌کنیم.

الف. بررسی کنید که τ حافظ اندازه لبگ است.

ب. نشان دهید که τ آمیخته و بنابراین ارگودیک است.

ج. به‌عنوان نتیجه ثابت کنید تقریبا هر عدد x با اندازه m به

معنای زیر نرمال است. توصیف m تایی از x را در نظر بگیرید.

$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{m_j}$، که در آن a_j یک عدد صحیح $0\le a_j\le m-1$ است.

در این صورت x نرمال است، اگر به ازای هر عدد صحیح $0\le k\le m-1$

وقتی که $N\to\infty$ $\quad \frac{\#\{j: a_j=k, 1\le j\le n\}}{N}\to\frac{1}{m}$

به شباهت موجود با گزاره‌های با توزیع متوازن بخش ۲ فصل ۴ جلد ۱ توجه کنید.

۲۵. نشان دهید قضیه ارگودیک میانگین برقرار است، اگر فرض طولپا بودن T را با انقباضی بودن T جایگزین کنیم. این یعنی به ازای هر $f\in H$، $\|Tf\|\le\|f\|$.

راهنمایی: ثابت کنید T یک انقباض است، اگر وفقط اگر T^* انقباض باشد و تساوی $(f,T^*f)=(Tf,f)$ را به کار ببرید.

۲۶. صورت L^2 از قضیه ارگودیک ماکزیمال موجود است. فرض کنید τ یک تبدیل حافظ اندازه روی (X,μ) باشد. در اینجا فرض نمی‌کنیم

$$\mu(X)<\infty$$

• در این صورت

$$f^*(x) = \sup \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |f(\tau^k(x))|,$$

هرگاه $f \in L^2(X)$ و $\|f^*\|_{L^2(X)} \leq c\|f\|_{L^2(X)}$.

برهان، مشابه مسأله ۶، فصل ۵ برای تابع ماکزیمال روی $\mathbb{R}^d$ است. با توجه به این نتیجه، قضیه ارگودیک نقطه‌ای را به حالتی که $\mu(X) = \infty$ به صورت زیر توسیع دهید:

الف. نشان دهید تقریبا به ازای هر x و برای هر $f \in L^2(X)$،

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(X))$$

به $P(f)(X)$ همگراست، زیرا برای زیر فضای چگالی از $L^2(X)$ برقرار است.

ب. ثابت کنید نتیجه برای هر $f \in L^1(X)$ برقرار است، زیرا برای زیرفضای چگال $L^1(X) \cap L^2(X)$ برقرار است.

۲۷. ملاحظه می‌کنیم، اگر $\|f_n\|_{L^2} \leq 1$ وقتی که $n \to \infty$ به ازای تقریبا هر x، آنگاه $\frac{f_n(x)}{n} \to 0$. همچنین نشان دهید که حکم مشابه با

جایگزینی نرم L^2 با نرم L^1 نقض می‌شود. این کار را با ساختن دنباله $\{f_n\}$ که $f_n \in L^1(X)$ و $\|f_n\|_{L^1} \leq 1$ اما تقریبا به ازای هر x

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{n} = \infty,$$

انجام دهید.

راهنمایی: بازه‌های $I_n \subset [0, 1]$ را طوری بیابید، که

$$m(I_n) = 1/(n \log n)$$

اما $\limsup_{n\to\infty} \{I_n\} = [0, 1]$. آنگاه قرار دهید $f_n(x) = n \log n \chi_{I_n}$.

۲۸. طبق لم بورل-کنتلی می‌دانیم، اگر $\{E_n\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فضای اندازه (X, μ) باشد و $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$، آنگاه $E = \limsup_{n\to\infty}\{E_n\}$ اندازه صفر دارد.

در جهت عکس، اگر τ یک تبدیل حافظ اندازه آمیخته روی X با $(\mu(x) = 1)$ باشد، آنگاه زمانی که $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$، اعداد صحیح $m = m_n$ موجود هستند، به طوری که اگر $E'_n = \tau^{-m_n}(E_n)$، آنگاه بجز برای مجموعه‌ای با اندازه صفر $\limsup_{n\to\infty}(E'_n) = X$.

۷.۶ مسائل

۱. فرض کنید Φ یک دوسویی C^1، از یک مجموعه‌ی باز $\mathcal{O}$ در $\mathbb{R}^d$ به روی مجموعه باز دیگر $\mathcal{O}'$ در $\mathbb{R}^d$ باشد.

(آ) اگر E زیرمجموعه اندازه‌پذیری از $\mathcal{O}$ باشد، آنگاه $\Phi(E)$ نیز اندازه‌پذیر است.

(ب) $m(\Phi(E)) = \int_E |det\Phi'(x)|dx$ که در آن Φ' ژاکوبین Φ است.

(ج) هرگاه f روی $\mathcal{O}'$ انتگرالپذیر باشد، $\int_{\mathcal{O}'} f(y)dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x))|det\Phi'(x)|dx$،

راهنمایی: برای اثبات (الف) استدلال تمرین ۸ فصل ۱ را دنبال کنید. برای (ب) فرض کنید E یک مجموعه باز کراندار باشد و E را به صورت $\cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ بنویسید، که در آن Q_j ها مکعب هایی هستند که درونشان مجزا است و قطری کمتر از ϵ دارند. فرض کنید z_k مرکز Q_k باشد. در این صورت اگر $x \in Q_k$

$$\Phi(x) = \Phi(z_k) + \Phi'(z_k)(x - z_k) + o(\epsilon),$$

بنابراین $\Phi(Q_k) = \Phi(z_k) + \Phi'(z_k)(Q_k - z_k) + o(\epsilon)$، و در نتیجه

$$(1 - \eta(\epsilon))\Phi'(z_k)(Q - z_k) \subset \Phi(Q_k) - \Phi(z_k) \subset (1 + \eta(\epsilon))\Phi'(z_k)(Q_k - z_k),$$

وقتی‌که $\epsilon \to 0$، $\eta(\epsilon) \to 0$. این به معنی این است که وقتی که $\epsilon \to 0$،

$$m(\Phi(\mathcal{O})) = \sum_k m(\Phi(Q_k)) = \sum_k |\det(\Phi'(z_k))| m(Q_k) + o(1)$$

کاربردی از خاصیت تبدیل خطی اندازه لبگ ارائه شده درمساله ۴ فصل ۲ است. توجه کنید (ب) برای $f(\Phi(x)) = \chi_E(x)$، همان (ج) است.

۲. به‌عنوان نتیجه‌ای از مساله قبل نشان دهید: اندازه $d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ در نیم صفحه بالایی $\mathbb{R}^2_+ = \{z = x + iy, y > 0\}$ به وسیله هر تبدیل خطی $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ حفظ می‌شود، که در آن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متعلق به $SL_2(\mathbb{R})$ است.

۳. فرض کنید S ناحیه بالایی در $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ باشد که به وسیله‌ی

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y = F(y)\}$$

داده می شود. F تابعی C^1 است که روی مجموعه Ω در $\mathbb{R}^{d-1}$ تعریف می‌شود. برای هر زیر مجموعه $E \subset \Omega$ زیر مجموعه متناظر آن از S را که با $\hat{E}$ نمایش می دهیم به صورت

$$\hat{E} = \{(x, F(x)) : x \in E\}$$

تعریف می‌شود. توجه می‌کنیم مجموعه‌های بورل S به وسیله متر روی S (که تحدید متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ است) تعریف می‌شوند. بنابراین اگر E مجموعه‌ای بورل در Ω باشد، آنگاه $\hat{E}$ زیرمجموعه‌ای بورل از S است.

(آ) فرض کنید μ اندازه‌ی بورل روی S باشد که با

$$\mu(\hat{E}) = \int_E \sqrt{۱ + |\nabla F|^۲}dx,$$

تعریف می‌شود. اگر B گویی در Ω باشد، فرض کنید $\hat{B}^\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d : d((x,y),\hat{B}) < \delta\}$ نشان دهید

$$\mu(\hat{B}) = \lim_{\delta \to ۰} \frac{۱}{۲\delta} m((\hat{B})^\delta),$$

که در آن m اندازه لبگ d بعدی را مشخص می‌کند. این نتیجه مشابه با قضیه ۳۶.۳ فصل ۳ است.

(ب) برای این می توان (الف) را برای حالتی که S نیمه (بالایی) کره واحد $\mathbb{R}^d$ است به کار برد، که با $y = F(x)$،

$$F(x) = (۱ - |x|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

، $|x| < ۱$، $x \in \mathbb{R}^{d-۱}$ داده می‌شود. در این حالت نشان دهید $d\mu = d\sigma$، اندازه‌ای روی کره است که از فرمول مختصات قطبی بخش ۲.۳.۶ نتیجه می‌شود.

(ج) نتیجه فوق مجوز نوشتن فرمولی روشن برای $d\sigma$ بر حسب مختصات کروی را صادر می‌کند. برای مثال حالت $d = ۳$ را در نظر بگیرید و برای $۰ \leq \theta < \pi/۲$ و $۰ \leq \varphi < ۲\pi$ بنویسید $y = \cos\theta$ و

$$x = (x_۱, x_۱) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$$

. در این صورت با توجه به الف و ب عنصر سطح $d\sigma$ با $(۱ - |x|^۲)^{-۱/۲}dx$ مساوی است. قضیهٔ تغییر متغیر در مساله ۱ را به کار ببرید، تا نتیجه بگیرید که در این حالت $d\sigma = \sin\theta d\theta d\varphi$. نتیجه می تواند به حالت d بعدی با $d \geq ۲$ تعمیم یابد، تا فرمول‌های بخش ۲,۴ از ضمیمه جلد۱ را به‌دست آوریم.

۴*. فرض کنید μ اندازه‌ای بورل روی فضای $S^{d-۱}$ باشد که به معنای زیر، تحت دوران پایاست: برای هر دوران r از $\mathbb{R}$ و هر زیرمجموعه بورل E از $S^{d-۱}$، $\mu(r(E)) = \mu(E)$. اگر $\mu(S^{d-۱}) < \infty$ آنگاه μ، ضریب ثابتی از اندازه σ است که از فرمول انتگرال مختصات قطبی نتیجه می‌شود.

راهنمایی: برای هر سطح کروی همساز از درجه $k \geq ۱$، نشان دهید

$$\int_{S^{d-۱}} Y_k(x)d\mu(x) = ۰.$$

در نتیجه، ثابت c موجود است، به طوری که برای هر تابع پیوسته f روی S^{d-1}

$$\int_{S^{d-1}} fd\mu = c\int_{S^{d-1}} fd\sigma.$$

۵*. فرض کنید X یک فضای متری و μ یک اندازه بورل روی X با این خاصیت باشد که برای هر گوی B، $\mu(B) < \infty$. $C_\circ(X)$ عبارت است از فضای برداری توابع پیوسته روی X به طوری که دارای تکیه‌گاه روی یک گوی بسته است. آنگاه $\ell(f) = \int_X fd\mu$ یک تابعک خطی مثبت روی $C_\circ(X)$ تعریف می‌کند. به این معنا که اگر $f \geq \circ$، آنگاه $\ell(f) \geq \circ$. و روی گوی ها متناهی است.

برعکس برای هر تابعک خطی مثبت ℓ روی $C_\circ(X)$، اندازه بورل منحصربه فرد μ که روی همه گوی‌ها متناهی است، موجود است به طوری‌که $l(f) = \int fd\mu$.

۶. خودریختی A را روی $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ درنظر بگیرید، که در آن A یک یکریختی از $\mathbb{R}^d$ است که مشبکه $\mathbb{Z}^d$ را حفظ می‌کند. توجه کنید A به صورت ماتریس $d \times d$ نوشته می‌شود، که همه درایه های آن اعداد صحیح هستند و دترمینان آن ها ۱+ و ۱− است. نگاشت $\tau : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ را به صورت $\tau(x) = A(x)$ تعریف کنید.

(آ) ملاحظه کنید τ یکریختی حافظ اندازه از T^d است.

(ب) نشان دهید τ ارگودیک (در حقیقت آمیخته) است، اگر وفقط اگر A هیچ مقدار ویژه‌ای به صورت $e^{۲\pi ip/q}$ نداشته باشد که در آن p و q اعداد صحیح هستند.

(ج) توجه کنید τ هرگز به طور منحصربفرد ارگودیک نیست.

راهنمایی: شرط (ب) مشابه عدم وجود بردارهای پایا برای $(A^t)^q$ است که در آن A^t ترانهاده A است. همچنین توجه کنید $f(\tau^k(x)) = e^{۲\pi i(A^t)^K n.x}$ که $f(x) = e^{۲\pi in.x}$.

۷*. یک نوع قضیه ارگودیک ماکزیمال موجود است که شبیه به ”لم طلوع خورشید“ تمرین ۶ فصل ۳ است.

فرض کنید f حقیقی مقدار باشد و $f^{\#}(x) = \sup_m \frac{۱}{m}\sum_{k=\circ}^{m-۱} f(\tau^k(x))$. فرض کنید $E_\circ = \{x : f^{\#}(x) > \circ\}$. در این صورت

$$\int_{E_\circ} f(x)dx \geq \circ.$$

در نتیجه (زمانی‌که این حکم را برای $f(x) - \alpha$ به کار ببریم) داریم، هرگاه $f \geq \circ$،

$$\mu\{x : f^*(x) > \alpha\} \leq \frac{۱}{\alpha}\int_{\{f^*(x)>\alpha\}} f(x)dx.$$

به خصوص ثابت A در قضیه ۱۸.۶ می‌تواند ۱ گرفته شود.

۸. فرض کنید $X = [0, 1)$، $\tau(x) = \langle 1/x \rangle$، $x \neq 0$ و $\tau(0) = 0$. در اینجا $< x >$ قسمت کسری x را مشخص می‌کند. با اندازه‌ی $d\mu = \frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$ داریم $\mu(X) = 1$. نشان دهید که τ یک تبدیل حافظ اندازه است.

راهنمایی: $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}$.

۹*. تبدیل τ در قضیه قبل ارگودیک است.

۱۰*. رابطه بین کسرهای مسلسل و تبدیل $\tau(x) =< 1/x >$ اکنون توصیف می‌شود. یک **کسر مسلسل** $a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \cdots$ به صورت $[a_0 a_1 a_2 \ldots]$ نیز نوشته می‌شود که در آن a_j ها اعداد صحیح مثبت هستند و برای هر عدد حقیقی مثبت x به روش زیر معین می‌شوند. با شروع از x، به طور متوالی آن را با دو عملیات متناوب جایگزین می کنیم: با کاستن آن به پیمانه ۱ برای قرار گرفتن در $[0, 1)$ سپس معکوس آن را می گیریم. در این صورت اعداد صحیحی که به دست می‌آیند، کسر مسلسلی از x تعریف می‌کنند.

بنابراین قرار می دهیم $x = a_0 + r_0$، که در آن بزرگترین عدد

صحیح در $x = [x] = a_\circ$ و $r_\circ \in [\circ, \text{۱})$. سپس می‌نویسیم

$$\text{۱}/r_\circ = a_\text{۱} + r_\text{۱}$$

با $a_\text{۱} = [\text{۱}/r_\circ)$ $r_\circ \in [\circ, \text{۱})$ تا به طور متوالی $\text{۱}/r_{n-\text{۱}} = a_n + r_n$ به‌دست آید، که در آن $a_n = [\text{۱}/r_{n-\text{۱}}]$، $r_n \in [\circ, \text{۱})$. اگر برای یک n، $r_n = \circ$، برای $k > n$، می‌نویسیم $a_k = \circ$ و می‌گوییم یک کسر مسلسل پایان می‌یابد.

توجه کنید اگر $\circ \le x < \text{۱}$، آنگاه $r_\circ = x$ و $a_\text{۱} = [\text{۱}/x]$ در حالی‌که $r_\text{۱} = \langle \text{۱}/x \rangle = \tau(x)$. به طور کلی تر $a_k(x) = [\text{۱}/\tau^{k-\text{۱}}(x)] = a_\text{۱}\tau^{k-\text{۱}}(x)$.
خواص زیر از کسرهای مسلسل از اعداد حقیقی مثبت x شناخته شده‌اند:

(آ) کسر مسلسل x پایان می‌یابد، اگر و فقط اگر x گویا باشد.

(ب) اگر $x = [a_\circ a_\text{۱} \dots a_n \dots]$ و $x_N = [a_\circ a_\text{۱} \dots a_N \circ\circ \dots]$، آنگاه وقتی که $N \to \infty$، $x_N \to x$. دنباله $\{x_N\}$ لزوما تقریب بهینه‌ای از x به وسیله‌ی گویاها به‌دست می‌دهد.

(ج) کسر مسلسل به دست آمده متناوب است، به این معنا که برای یک $N \ge \text{۱}$ و همه k های به قدر کافی بزرگ $a_{k+N} = a_k$، اگر وفقط اگر x یک عدد جبری از درجه کمتر از یا مساوی با ۲ روی گویاها باشد.

(د) می‌توان نتیجه گرفت که تقریبا به ازای هر x وقتی $n \to \infty$، $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to \infty$. به خصوص، مجموعه ای از اعداد x که کسرهای مسلسلی‌شان $[a_0 a_1 \ldots a_n \ldots]$ کراندار است، اندازه صفر دارند.

راهنمایی: برای (د) نتیجه‌ای از قضیه ارگودیک نقطه‌ای را به کار ببرید که به صورت زیر است: فرض کنید $f \geq 0$ و $\int f d\mu = \infty$ اگر τ ارگودیک باشد، وقتی که $m \to \infty$ تقریبا به ازای هر x، $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) \to \infty$. در این حالت قرار دهید $f(x) = [1/x]$.

فصل ۷

اندازه هاسدورف و فراکتال ها

کاراتئودوری نظریه اندازه لبگ را به شیوه ساده قابل ملاحظه‌ای تعمیم داد، که در حالت خاص به وی اجازه می‌داد اندازه p–بعدی یک مجموعه را در یک فضای q–بعدی تعریف کند. در آن چه که در ادامه می آید، من یک الحاق کوچک ارائه می کنم...توضیحاتی از اندازه p –بعدی که بلافاصله به یک تعمیم از حالت غیر صحیح p منجر می شود، و بنابراین برای مجموعه‌های با بعد

فرکتالی به‌کار می رود.

اف.هاسدورف، ۱۹۱۹.

من فرکتال را از صفت لاتین $fradus$ ابداع کردم. فعل متناظر لاتین آن $frangere$ به معنی شکستن برای ساختن قطعات نامنظم است.

ب.مندلبروت، ۱۹۷۷.

بررسی عمیق‌تر خواص هندسی مجموعه‌ها اغلب نیازمند تحلیل اندازه یا جرم آن‌هاست که از آنچه که از طریق اندازه لبگ می‌تواند بیان شود فراتر می‌رود. در اینجاست که مفاهیم بعد یک مجموعه (که می تواند کسری باشد) و یک اندازه مرتبط با آن نقشی اساسی بازی می‌کنند.

دو ایده اولیه درک شهودی از مفهوم بعد یک مجموعه را فراهم می‌کنند. اولی می‌تواند از این طریق که یک مجموعه چگونه تحت مقیاس‌ها تکرار می‌شود، فهمیده شود. مجموعه E داده شده است. فرض کنید برای عدد مثبت n داریم، $nE = E_1 \bigcup ... \bigcup E_m$، که در آن مجموعه‌های E_j، m کپی متجانس مجزا از E هستند. توجه داشته باشید که اگر E یک قطعه خط بود این رابطه با $m = n$ برقرار می‌شد؛

اگر E یک مربع بود، داشتیم $m = n^{۲}$؛ اگر E مکعب بود، آنگاه $m = n^{۳}$ و غیره. بنابراین به‌طورکلی‌تر، می‌گوییم E بعد α دارد، هرگاه $m = n^{\alpha}$. ملاحظه کنید اگر E مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ در $[۰,۱]$ باشد، آنگاه $۳\mathcal{C}$ شامل ۲ کپی از $\mathcal{C}$ می‌شود، یکی در $[۰,۱]$ و دیگری در $[۲,۳]$. در اینجا $n = ۳$ و $m = ۲$ و این نتیجه به این منجر می‌شود که بعد مجموعه کانتور $\log ۲ / \log ۳$ باشد.

روش دیگری وجود دارد که مرتبط با خم‌هایی است که لزوما از طول متناهی نیستند. با خم $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ شروع کنید و به‌ازای هر $\epsilon > ۰$ خطوط چند ضلعی مرتبط از $\gamma(a)$ به $\gamma(b)$ را در نظر بگیرید، که رئوس آن روی نقاط Γ با هر قطعه خطی که طولی بیش از ϵ ندارد قرار می‌گیرد. کمترین تعداد از قطعه خط‌هایی که به خطوط چند ضلعی منجر می‌شود را با $\#(\epsilon)$ مشخص کنید اگر وقتی که $\epsilon \to ۰$، $\#(\epsilon) \approx \epsilon^{-۱}$ ، آنگاه Γ با طول متناهی است. با این وجود، $\#(\epsilon)$ ممکن است وقتی که $\varepsilon \longrightarrow ۰$ خیلی سریعتر از $\epsilon^{-۱}$ رشد کند. اگر برای $\alpha > ۱$ داشته باشیم $\neq(\epsilon) \approx \epsilon^{-\alpha}$ آنگاه با الهام از مثال قبل، طبیعی است که بگوییم Γ بعد α را دارد. این ملاحظات حتی برای علوم دیگر نیز سود بخش است. به‌عنوان نمونه، در مطالعه‌ای در مورد تعیین طول

مرز کشور یا خط ساحلی آن، ال. اف. ریچاردسون [1] دریافت که طول ساحل غربی بریتانیا از قانون تجربی،

$$\#(\epsilon) \approx \epsilon^{\alpha}$$

با مقدار تقریبی ۱٫۵ برای α پیروی می کند. بنابراین نتیجه می‌شود که ساحل بعد کسری دارد!

در حالی که روش‌های متفاوتی برای دقیق کردن بعضی از این مفاهیم ابتکاری موجود هستند، نظریه‌ای که وسیع‌ترین قلمرو و بیشترین انعطاف‌پذیری را دارد شامل اندازه هاسدورف و بعد هاسدورف می‌شود. احتمالا زیباترین و ساده‌ترین تصویر از این نظریه با به کار بردن یک رده کلی از مجموعه‌های خود متشابه دیده می‌شود و این آن چیزی است که ابتدا در نظر می‌گیریم. در این میان خم‌های از نوع فون کخ وجود دارند که بعدی بین ۱و۲ دارند.

سپس به مثالی از خم فضا پر کن برمی‌گردیم که تحت ساختارهای خود تکراری قرار می‌گیرد. نه تنها این خم سود ذاتی دارد، بلکه ماهیت آن این حقیقت مهم را آشکار می‌کند که از دیدگاه نظریهٔ اندازه بازه‌ی یکه و مربع یکه، یکی هستند.

1. L.F. Richardson

موضوع پایانی ما ماهیت متفاوتی دارد. با تحقیق درمورد یک نظم پیش‌بینی شده‌ای شروع می‌کنیم که برای همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ (از اندازه لبگ متناهی) زمانی که $d \geq ۳$، برقرار است. این خاصیت در حالت دو بعدی برقرار نیست و مثال نقض کلیدی مجموعه بسکوویچ است. این مجموعه درتعدادی از مسائل دیگر نیز ظاهر می‌شود. در حالی که اندازه صفر دارد آشکارا چنین است، چرا که بعد هاسدورف آن لزوما ۲ می‌باشد.

۱.۷ اندازه هاسدورف

این نظریه با معرفی مفهوم جدیدی از حجم یا جرم شروع می‌شود. این «اندازه » ارتباط نزدیکی با ایده بعد دارد که در سراسر موضوع غالب است. به‌طور دقیق‌تر، با پیروی از هاسدورف، برای هر مجموعهٔ مناسب E و هر $\alpha > ۰$ کمیت $m_\alpha(E)$ را درنظر می‌گیریم که می‌تواند به‌صورت جرم α بعدی E در میان مجموعه‌های با بعد α تفسیر شود. که در آن کلمه «بعد» تنها معنای ادراکی دارد. در این صورت اگر α بزرگ‌تر از بعد مجموعهٔ E باشد، مجموعه جرم ناچیزی دارد و داریم $m_\alpha(E) = ۰$. اگر α کوچک‌تر از بعد E باشد، آنگاه E (نسبتا) خیلی بزرگ است، بنابراین $m_\alpha(E) = \infty$. برای

حالت بحرانی زمانی که α بعد E باشد، کمیت $m_\alpha(E)$ اندازه α بعدی حقیقی مجموعه را توصیف می‌کند.

دو مثال، که بعدا با جزئیات بیشتری به آن می‌پردازیم دایره ایده‌ها را به تصویر می‌کشد.

ابتدا به یاد آورید مجموعهٔ کانتور استاندارد $\mathcal{C}$ در $[۰,۱]$، اندازه لبگ صفر دارد. این عبارت به این معناست که $\mathcal{C}$ جرم یا طول یک بعدی برابر با صفر دارد. با این وجود ثابت می‌کنیم $\mathcal{C}$ بعد هاسدورف کسری خوش‌تعریف $\log ۲/ \log ۳$ دارد، و اندازه هاسدورف متناظر با مجموعه کانتور مثبت و متناهی است.

تصویر دیگری از نظریه که در زیر توسیع یافته است، با یک خم با طول متناهی Γ در صفحه شروع می‌شود. در این صورت Γ اندازه لبگ دو بعدی صفر دارد. این امر به‌صورت شهودی واضح است چرا که Γ یک شی یک بعدی در یک فضای دو بعدی است. این جا بجایی است که اندازه هاسدورف نقش خود را بازی می‌کند: کمیت $m_۱(\Gamma)$ نه تنها متناهی است، بلکه دقیقا با طول Γ مساوی است، همان‌طور که در بخش (۱۶.۳) فصل ۳ تعریف کردیم.

ابتدا اندازه خارجی مناسب را در نظر می‌گیریم، که بر حسب پوشش‌ها تعریف می‌شود و تحدید آن برای مجموعه‌های بورل، اندازه‌ی هاسدورف مورد انتظار است.

برای هر زیر مجموعه E از $\mathbb{R}^d$ ، **اندازه هاسدورف α بعدی خارجی** E را با

$$m_{\alpha^*}(E)=\lim_{\delta\to ۰}\inf\{\sum_k (diam F_k)^\alpha : E\subset \bigcup_{k=۱}^{\infty} F_k, diam F_k\leq \delta, k \text{ به‌ازای هر}\}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $diam\, S$ قطر مجموعهٔ S را مشخص می‌کند و

$$diam S=\sup\{|x-y| : x,y\in S\}.$$

به عبارت دیگر به‌ازای هر $\delta>۰$، پوشش‌های E را با خانواده‌های شمارایی از مجموعه‌های دلخواه با قطری کمتر از δ در نظر می‌گیریم و روی مجموع $\sum_k (diam F_k)^\alpha$ اینفیمم می‌گیریم. سپس $m^*_\alpha(E)$ را به‌صورت حد اینفیمم‌ها تعریف می‌کنیم، هنگامی‌که δ به صفر میل کند. توجه می‌کنیم کمیت

$$\mathcal{H}^\delta_\alpha(E)=\inf\{\sum_k (diam F_k)^\alpha : E\subset \bigcup_{k=۱}^{\infty} F_k, diam\, F_k\leq \delta, k \text{ به‌ازای هر}\}$$

زمانی که δ نزول می کند کاهش می‌یابد، بنابراین حد

$$m^*_\alpha(E)=\lim_{\delta\to ۰}\mathcal{H}^\delta_\alpha(E)$$

موجود است، اگر چه $m^*_\alpha(E)$ می‌تواند نامتناهی باشد. به خصوص توجه می‌کنیم که، به‌ازای هر $\delta>۰$، داریم $\mathcal{H}^\delta_\alpha(E)\leq m^*_\alpha(E)$. هنگام

تعریف اندازه $m^*_\alpha(E)$ ، مهم است که انتظار داشته باشیم پوشش‌ها باید به‌گونه‌ای باشند که مجموعه‌هایی با قطرهای کوچک دلخواه را بپوشانند. این به‌دلیل تعریف $m^*_\alpha(E) = \lim_{\delta\to ۰} \mathcal{H}^\delta_\alpha(E)$ است. این لازمه که به اندازه لبگ مربوط نیست، به این منظور است که از ویژگی جمعپذیری مقدماتی در خاصیت ۳ در زیر مطمئن شویم(تمرین ۱۲ را نیز ببینید).

مقیاس‌گذاری مفهوم کلیدی است که در قلب تعریف اندازه هاسدورف خارجی ظاهر می‌شود. به‌طور مختصر، اندازه‌ی یک مجموعهٔ با توجه به بعد آن مقیاس گذاری می شود. به‌عنوان نمونه، اگر Γ زیرمجموعه یک بعدی $\mathbb{R}^d$ باشد، مثلا یک خم هموار به طول L، آنگاه $r\Gamma$ اندازه کلی rL را دارد. اگر Q طول مکعبی در $\mathbb{R}^d$ باشد، حجم rQ، $r^d|Q|$ است. این ویژگی که در تعریف اندازه هاسدورف خارجی گرفته می‌شود، بر اساس این قانون است که اگر مجموعهٔ F با اندازه r باشد، آنگاه $(diamF)^\alpha$ اندازه‌ی برابر با r^α دارد. این ایده کلیدی در بررسی مجموعه‌های خود متشابه دربخش ۲.۲.۷دوباره ظاهر می‌شود.

از خواصی که با اندازه خارجی هاسدورف برقرار می‌شوند، شروع کنیم.

خاصیت ۱.۷. (یکنوایی) اگر $E_۱ \subset E_۲$ آنگاه $m^*_\alpha(E_۱) \le m^*_\alpha(E_۲)$.

این رابطه سرراست است، چرا که هر پوشش $E_۲$ یک پوشش $E_۱$ نیز هست.

خاصیت ۲.۷. (زیر جمعپذیری) برای هر خانواده شمارای $\{E_j\}$ از مجموعه‌ها در $\mathbb{R}^d$،

$$m_\alpha^*(\bigcup_{j=۱}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=۱}^{\infty} m_\alpha^*(E_j)$$

برای برهان، δ را ثابت بگیرید، و برای هر j پوشش $\{F_{j,k}\}_{k=۱}^{\infty}$ از E_j را با مجموعه‌هایی با قطری کمتر از δ انتخاب کنید، به‌طوری‌که $\sum_k (diam F_{j,k})^\alpha \leq \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon/۲^j$. از آنجایی که $\bigcup_{j,k} F_{j,k}$ به‌وسیله مجموعه‌هایی با قطری کمتر از δ، E را می‌پوشاند، باید داشته باشیم

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) &\leq \sum_{j=۱}^{\infty} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E_j) + \epsilon \\ &\leq \sum_{j=۱}^{\infty} m_\alpha^*(E_j) + \epsilon.\end{aligned}$$

از آنجایی که ϵ دلخواه است، نامساوی $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) \leq \sum m_\alpha^*(E_j)$ برقرار است و فرض می‌کنیم δ به صفر میل می‌کند تا زیرجمعپذیری شمارای m_α^* را ثابت کند.

خاصیت ۳.۷. اگر $d(E_۱, E_۲) > ۰$، آنگاه

$$m_\alpha^*(E_۱ \bigcup E_۲) = m_\alpha^*(E_۱) + m_\alpha^*(E_۲)$$

.

کافی است ثابت کنیم $m_\alpha^*(E_1\bigcup E_2)\geq m_\alpha^*(E_1)+m_\alpha^*(E_2)$، زیرا عکس نامساوی از زیر جمعپذیری تضمین می‌شود. $\epsilon>0$ را ثابت بگیرید به‌طوری که $\epsilon<d(E_1,E_2)$. برای هر پوشش $E_1\bigcup E_2$ از مجموعه‌های $F_1, F_2, ...$ با قطری کمتر از δ داده شده که $\delta<\epsilon$، قرار می‌دهیم

$$F_j'=E_1\bigcap F_j, \qquad \text{و} \qquad F_j''=E_2\bigcap F_j$$

آنگاه $\{F_j'\}$ و $\{F_j''\}$ به ترتیب E_1 و E_2 را می‌پوشانند و مجزا هستند. بنابراین

$$\sum_j(diamF_j')^\alpha+\sum_i(diamF_i'')^\alpha\leq\sum_k(diamF_k)^\alpha$$

با اینفیمم گرفتن روی پوشش‌ها، سپس میل کردن δ به صفر، نامساوی مورد نظر به‌دست می‌آید.

در این نقطه توجه می‌کنیم که m_α^* در همه خواص یک اندازه خارجی کاراتئودوری را که در فصل ۶ بحث شد، صدق می‌کند. بنابراین m_α^* وقتی که به مجموعه‌های بورل تحدید می‌شود، یک اندازه به‌طور شمارا جمعپذیر است. بنابراین خودمان را به مجموعه‌های بورل محدود می‌کنیم و به جای m_α^*، می‌نویسیم $m_\alpha(E)$. اندازه m_α، اندازه هاسدورف α بعدی نامیده می‌شود.

خاصیت ۴.۷. اگر $\{E_j\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های بورل مجزا باشد و $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ آنگاه

$$m_\alpha(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m_\alpha(E_j).$$

برای آن چه در ادامه این فصل می‌آید، جمع‌پذیری کلی خاصیت بالا مورد نیاز نیست و می‌توانیم با شکلی ضعیف‌تر پیش برویم که برهان ساده‌ای دارد و به پیشرفت‌های فصل ۶ وابسته نیست. (تمرین ۲ را ببینید.)

خاصیت ۵.۷. اندازه هاسدورف تحت انتقال و دوران پایا است یعنی

$$m_\alpha(E+h) = m_\alpha(E) \qquad h \in \mathbb{R}^d,$$

و

$$m_\alpha(rE) = m_\alpha(E),$$

که در آن r یک دوران در $\mathbb{R}^d$ است.

به‌علاوه اندازه‌های آن به‌صورت زیر است:

$$m_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha m_\alpha(E) \qquad \text{به‌ازای هر } \lambda > 0$$

این نتایج با توجه به این نکته حاصل می شود، که قطر مجموعهٔ S تحت انتقال‌ها و دوران‌ها پایا است و برای $\lambda > 0$،

$$diam(\lambda S) = \lambda diam(S)$$

.

در ادامه لیستی از خواص اندازه هاسدورف را توصیف می‌کنیم، که مورد اول آن نتیجه بلافصل تعاریف است.

خاصیت ۶.۷. کمیت $m_0(E)$ تعداد نقاط در E را می‌شمارد، در حالی‌که به‌ازای همه مجموعه‌های بورل $E \subset \mathbb{R}$، $m_1(E) = m(E)$. (در اینجا m به معنای اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ است.)

در حقیقت توجه کنید در حالت یک بعدی هر مجموعه با قطر δ مشمول در بازه‌ای به طول δ می‌شود (و برای یک بازه طول آن با اندازه لبگ آن مساوی است).

به‌طور کلی، اندازه هاسدورف d بعدی، در حد یک ضریب ثابت، با اندازه لبگ مساوی است.

خاصیت ۷.۷. اگر E زیر مجموعه‌ای بورل از $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه برای ثابت c_d که تنها به بعد d بستگی دارد $c_d m_d(E) = m(D)$.

ثابت c_d برای گوی یکه B، با $m(B)/(diam B)^d$ مساوی است؛ توجه کنید که این ضریب برای همه گوی‌های B در $\mathbb{R}^d$ یکسان

است و بنابراین $c_d = v_d/2^d$ (که در آن v_d به معنای حجم گوی یکه است). برهان این ویژگی بر نامساوی به اصطلاح یک - قطری استوار است، که بیان می‌کند درمیان همه مجموعه‌های با یک قطر مشخص، گوی بیشترین حجم را دارد. (مسأله ۲ را ببینید) بدون به کار بردن قانون هندسی می‌توان جایگزین زیر را اثبات کرد.

خاصیت ۷.۷' اگر E زیرمجموعه بورل $\mathbb{R}^d$ باشد و $m(E)$ اندازه لبگ باشد آنگاه $m_d(E) \approx m(E)$، به این معنا که

$$c_d m_d(E) \leq m(E) \leq 2^d c_d m_d(E).$$

با به کار بردن تمرین ۲۶ فصل ۳، به‌ازای هر $\delta > 0$ پوشش‌ی از E را شامل گوی های $\{B_j\}$ می‌یابیم، به‌طوری‌که $diam B_j < \delta$ و $\sum_j m(B_j) \leq m(E) + \epsilon$. اکنون

$$\mathcal{H}_d^\delta(E) \leq \sum_j (diam B_j)^d = c_d^{-1} \sum_j m(B_j) \leq c_d^{-1}(m(E) + \epsilon).$$

با فرض این که δ و ϵ به صفر میل می‌کنند، داریم $m_d(E) \leq c_d^{-1} m(E)$.
برای جهت عکس، فرض کنید $E \subset \bigcup_j F_j$ پوششی باشد که

$$\sum_j (diam F_j)^d \leq m_d(E) + \epsilon$$

. همیشه می‌توانیم گوی‌های بسته B_j به مرکز نقطه‌ای در F_j را بیابیم به‌طوری که $B_j \supset F_j$ و $diam B_j = 2 diam F_j$. در این حالت

$m(E) \leq \sum_j m(B_j)$، زیرا $E \subset \bigcup_j B_j$ و مجموع آخر مساوی با عبارت

$$\sum c_d(diamB_j)^d = ۲^d c_d \sum (diamF_j)^d \leq ۲^d c_d(m_d(E) + \epsilon),$$

است. فرض کنید $\epsilon \to ۰$ که نتیجه می‌دهد $m(E) \leq ۲^d c_d m_d(E)$.

خاصیت ۸.۷. اگر $m^*_\alpha(E) < \infty$ و $\beta > \alpha$، آنگاه $m^*_\beta(E) = ۰$. همچنین اگر $m^*_\alpha(E) > ۰$ و $\beta < \alpha$ ، آنگاه $m^*_\beta(E) = \infty$.

درواقع اگر $diamF \leq \delta$ و $\beta > \alpha$ آنگاه

$$(diamF)^\beta = (diamF)^{\beta-\alpha}(diamF)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha}(diamF)^\alpha.$$

در نتیجه

$$\mathcal{H}^\delta_\beta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^\delta_\alpha(E) \leq \delta^{\beta-\alpha} m^*_\alpha(E).$$

از آنجایی که $m^*_\alpha(E) < \infty$ و $\beta - \alpha > ۰$، از حد گیری وقتی که δ به صفر میل می‌کند، داریم $m^*_\beta(E) = ۰$.

از عکس نقیض داریم، $m^*_\beta(E) = \infty$، هرگاه $m^*_\alpha(E) > ۰$ و $\beta < \alpha$.

اکنون چند ملاحظه‌ی آسان را که نتایج خواص بالا هستند، می‌آوریم.

۱. اگر I یک قطعه خط کراندار در $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه $۰ < m_۱(I) < \infty$.

۲. به‌طور کلی‌تر، اگر Q یک k- مکعب در $\mathbb{R}^d$ باشد (به این معنا که Q حاصلضربی از k بازه نابدیهی و $d-k$ نقطه است.) آنگاه $0 < m_k(Q) < \infty$.

۳. اگر $\mathcal{O}$ مجموعه باز ناتهی در $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه اگر $\alpha < d$، داریم $m_\alpha(\mathcal{O}) = \infty$. در واقع این حکم از آنجا ناشی می شود که $m_d(\mathcal{O}) > 0$.

۴. توجه کنید همیشه می‌توانیم قرار دهیم $\alpha < d$. این فرض به این دلیل است که هرگاه $\alpha > d$، m_α روی هر گوی و بنابراین روی همه $\mathbb{R}^d$، صفر می شود.

۲.۷ بعد هاسدورف

زیر مجموعه بورل E از $\mathbb{R}^d$ داده شده است، از ویژگی (۸.۷) نتیجه می‌گیریم که یک α منحصربفرد موجود است، به‌طوری‌که

$$m_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{اگر } \beta < \alpha \\ 0 & \text{اگر } \alpha < \beta \end{cases}$$

به عبارت دیگر، α به‌صورت

$$\alpha = \sup\{\beta : m_\beta(E) = \infty\} = \inf\{\beta : m_\beta(E) = 0\},$$

داده می‌شود. در این حالت، می‌گوییم E **بعد هاسدورف** α دارد، یا به‌طور مختصرتر E **بعد** α دارد. می‌نویسیم $\alpha = \dim E$. درباره مقدار بحرانی α، نمی‌توانیم چیزی بیشتر از این بگوییم، که به‌طور کلی کمیت $m_\alpha(E)$ در شرط $0 \leq m_\alpha(E) \leq \infty$ صدق می‌کند. اگر E کراندار باشد و نامساوی‌ها اکید باشند، به این معنا که $0 < m_\alpha(E) < \infty$، می‌گوییم E **بعد هاسدورف اکید** α دارد. عبارت **کسری** به‌طور متداول برای مجموعه‌هایی از بعد کسری به‌کار می‌رود.

به‌طور کلی، محاسبه اندازه هاسدورف یک مجموعه مسأله‌ای دشوار است. با این وجود، ممکن است در بعضی از حالت‌ها این اندازه از بالا و پایین کراندار شود، و بنابراین بعد مجموعهٔ مورد نظر را مشخص کند. چند مثال این مفاهیم جدید را به تصویر می‌کشد.

۱.۲.۷ مثال‌ها

مجموعه کانتور

مثال قابل توجه اول شامل مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ می‌شود که در فصل ۱ با حذف پی در پی بازه های یک سوم میانی در $[0,1]$ ساخته شد.

قضیه ۹.۷. مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ دارای بعد هاسدورف اکید $\alpha = \log 2/\log 3$ است.

نامساوی

$$m_\alpha(\mathcal{C}) \leq ۱,$$

از ساختن $\mathcal{C}$ و تعاریف نتیجه می‌شود. در واقع از فصل ۱ نتیجه می‌شود که $\mathcal{C} = \bigcap C_k$ که در آن هر C_k اجتماع متناهی ۲^k بازه به طول ۳^{-k} است. $\delta > ۰$ داده شده است، ابتدا k را به اندازه‌ای بزرگ انتخاب می‌کنیم که $۳^{-k} < \delta$. از آنجایی که مجموعهٔ C_k، $\mathcal{C}$ را می‌پوشاند و شامل بازه‌های ۲^k با قطر $۳^{-k} < \delta$ می‌شود، باید داشته باشیم:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \leq ۲^k(۳^{-k})^\alpha,$$

در این حالت α دقیقا در $۳^\alpha = ۲$ صدق می‌کند و سپس $۲^k(۳^{-k})^\alpha = ۱$ و بنابراین $m_\alpha(\mathcal{C}) \leq ۱$.

عکس نامساوی شامل ثابت کردن $m_\alpha(\mathcal{C}) > ۰$ می‌شود که به ایده زیر نیازمند است. در اینجا تابع کانتور لبگ رابه کار می‌گیریم که $\mathcal{C}$ را به روی $[۰,۱]$ می‌نگارد. قانون کلیدی که در مورد این تابع به‌کار می‌بریم، برقراری پیوستگی دقیقی است که بعد مجموعه کانتور را منعکس می‌کند.

تابع f روی زیر مجموعهٔ E از $\mathbb{R}^d$، در **شرط لیپ شیتس** روی E صدق می‌کند، هرگاه $M > ۰$ موجود باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر $x, y \in E$،

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

به‌طور کلی‌تر، تابع f **شرط لیپ شیتس با توان** γ صدق می‌کند (یا از هولدر γ است) ، هرگاه به‌ازای هر $x, y \in E$،

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\gamma}.$$

تنها حالت جذاب زمانی است که $0 < \gamma \leq 1$ (تمرین ۳ را ببینید).

لم ۱۰.۷. فرض کنید تابع f روی مجموعه فشرده E در شرط لیپ شیتس با توان γ صدق می کند. در این صورت

۱. اگر $\beta = \alpha/\gamma$ ، آنگاه $m_{\beta}(f(E)) \leq M^{\beta} m_{\alpha}(E)$.

۲. $\dim f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim E$.

برهان. فرض کنید $\{F_k\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌هایی است که E را می‌پوشاند. آنگاه $\{f(E \bigcap F_k)\}$، $f(E)$ را می‌پوشاند و به‌علاوه $f(E \bigcap F_k)$ قطری کمتر از $M(diam F_k)^{\gamma}$ دارد. بنابراین

$$\sum_k (diam\, f(E \bigcap F_k))^{\alpha/\gamma} \leq M^{\alpha/\gamma} \sum_k (diam\, F_k)^{\alpha},$$

و قسمت (۱) به‌دست می‌آید. اکنون بلافاصله رابطه (۲) را می‌دهد.
□

لم ۱۱.۷. تابع لبگ-کانتور F روی $\mathcal{C}$ در شرط لیپ شیتس با توان $\gamma = \log 2 / \log 3$ صدق می‌کند.

برهان. تابع F در بخش (۱۶.۳) فصل ۳ به‌عنوان حد یک دنباله از توابع تکه‌ای خطی $\{F_n\}$ ساخته می‌شود. تابع F_n با حداکثر مقدار ۲^{-n} روی هر بازه به طول ۳^{-n} صعودی است. بنابراین شیب F_n همیشه دارای کران $(۳/۲)^n$ است و بنابراین

$$|F_n(x) - F_n(y)| \leq (\frac{۳}{۲})^n |x-y|,$$

به‌علاوه دنبالهٔ تقریب زننده در $|F(x) - F_n(x)| \leq ۱/۲^n$ صدق می‌کند. هر دو تقریب با هم و با به کار بردن نامساوی مثلثی نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F_n(x) - F_n(y)| + |F(x) - F_n(x)| + |F(y) - F_n(y)| \\ &\leq (\frac{۳}{۲})^n |x-y| + \frac{۲}{۲^n}. \end{aligned}$$

با ثابت گرفتن x و y، سپس طرف راست را با انتخاب n به‌طوری مینیمم می‌کنیم که هر دو جمله مرتبه یکسانی داشته باشند، و این امر با گرفتن n به‌طوری‌که $۳^n|x-y|$ بین ۱ و۳ باشد، به‌دست می‌آید. سپس از آنجایی که $۳^\gamma = ۲$ و ۳^{-n} بزرگ‌تر از $|x-y|$ نیست، ملاحظه می‌کنیم

$$|F(x) - F(y)| \leq c۲^{-n} = c(۳^{-n})^\gamma \leq M|x-y|^\gamma.$$

این بحث در لم ۱۶.۷ زیر تکرار می‌شود.

با $E = \mathcal{C}$، تابع لبگ-کانتور f و $\alpha = \gamma = \log ۲/\log ۳$ هردو لم نتیجه می‌دهند

$$m_۱([۰,۱]) \leq M^{\beta} m_{\alpha}(\mathcal{C}),$$

بنابراین $m_{\alpha}(\mathcal{C}) > ۰$ و در می‌یابیم $\dim\ \mathcal{C} = \log ۲/\log ۳$. □

برهان این مثال دارای یک روال معمول است، از این لحاظ که نامساوی $m_{\alpha}(\mathcal{C}) < \infty$ راحت‌تر از $m_{\alpha}(\mathcal{C}) > ۰$ به‌دست می‌آید. همچنین با تلاشی مضاعف، شاید بتوان نشان داد اندازه هاسدورف $\log ۲/\log ۳$ بعدی $\mathcal{C}$، دقیقا ۱ است (تمرین ۷ را ببینید.)

خم‌های با طول متناهی

مثالی دیگر از نقش بعد با نگریستن به خم‌های پیوسته در $\mathbb{R}^d$ به‌دست می‌آید. به یاد داشته باشید که یک خم پیوسته‌ی، $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$، **ساده** گفته می‌شود، هرگاه برای $t_۱ \neq t_۲$، $\gamma(t_۱) \neq \gamma(t_۲)$ و **شبه-ساده** گفته می‌شود، هرگاه نگاشت $t \mapsto z(t)$ برای هر t در متمم یک مجموعه با متناهی نقطه، یک به یک باشد.

قضیه ۱۲.۷. فرض کنید خم γ پیوسته وشبه-ساده باشد. آنگاه γ از طول متناهی است، اگر و فقط اگر $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ **بعد** هاسدورف اکید یک داشته باشد. به‌علاوه دراین حالت، طول خم دقیقا برابر با اندازه یک-بعدی آن، $m_۱(\Gamma)$، است.

برهان. برای شروع فرض کنید Γ با طول متناهی و با طول L است و یک پارامتری‌ساز قوسی $\tilde{\gamma}$ را طوری در نظر بگیرید که

$$\Gamma = \{\tilde{\gamma}(t) : \circ \leq t \leq L\}$$

. این پارامتری‌ساز در شرط لیپ شیتس

$$|\tilde{\gamma}(t_۱) - \tilde{\gamma}(t_۲)| \leq |t_۱ - t_۲|$$

صدق می‌کند. این امر از آنجایی به‌دست می‌آید که $|t_۱ - t_۲|$ طول خم بین $t_۱$ و $t_۲$ است، که از فاصله بین $\tilde{\gamma}(t_۱)$ و $\tilde{\gamma}(t_۲)$ بزرگ‌تر است. از آنجایی که $\tilde{\gamma}$ در شرایط لم ۱۱.۷ را با توان ۱ و $m = ۱$ صدق می‌کند، درمی‌یابیم که

$$m_۱(\Gamma) \leq L.$$

برای اثبات عکس نامساوی، فرض می کنیم $a = t_\circ < t_۱ < ... < t_N = b$ افرازی از $[a, b]$ را مشخص کند و فرض می‌کنیم

$$\Gamma_j = \{\gamma(t) : t_j \leq t \leq t_{j+۱}\},$$

به‌طوری‌که $\Gamma = \bigcup_{j=\circ}^{N-۱} \Gamma_j$ و بنابراین با به‌کار بردن خاصیت ۴ اندازه هاسدورف و این قانون که Γ شبه–ساده است، داریم

$$m_۱(\Gamma) = \sum_{j=\circ}^{N-۱} m_۱(\Gamma_j).$$

در واقع با حذف تعداد متناهی نقطه، $\cup_{j=0}^{N-1}\Gamma_j$ اجتماعی از مجموعه های مجزا است. در حالی که نقاطی که حذف شده‌اند به وضوح اندازه m_1 صفر دارند. سپس ادعا می‌کنیم $m_1(\Gamma_j) \geq \ell_j$ که ℓ_j فاصله $\gamma(t_j)$ تا $\gamma(t_{j+1})$ است، به این معنا که

$$\ell_j = |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|$$

. برای مشاهده این امر، اندازه هاسدورف را به‌یاد آورید که تحت دوران پایا است و مختصات متعامد جدید x و y را معرفی کنید، به‌طوری‌که $[\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})]$ قطعه خط $[0, \ell_j]$ روی محور x باشد. تصویر $\pi(x, y) = x$ در شرط لیپ شیتس

$$|\pi(P) - \pi(Q)| \leq |P - Q|,$$

صدق می کند و به‌وضوح قطعه خط $[0, \ell_j]$ روی محور x مشمول در تصویر $\pi(\Gamma_j)$ است. بنابراین، لم ۱۱.۷،

$$\ell_j \leq m_1(\Gamma_j),$$

را تضمین می‌کند و بنابراین $m_1(\Gamma) \geq \sum \ell_j$. از آنجایی که طبق تعریف طول L از Γ سوپریمم مجموع $\sum \ell_j$ روی همه افرازهای $[a, b]$ است، درمی‌یابیم

$$m_1(\Gamma) \geq L$$

، همان‌طور که انتظار داشتیم.

برعکس، اگر Γ بعد هاسدورف اکید ۱ داشته باشد، آنگاه $m_1(\Gamma) < \infty$، و مباحث بالا نشان می‌دهد که Γ از طول متناهی است. $\square$

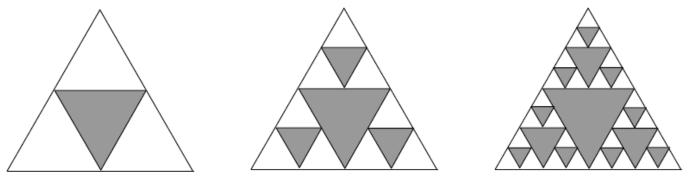
خواننده ممکن است به تشابه بین این مشخصه سازی متناهی بودن طول و یک نوع که پیش‌تر در فصل ۳ از طریق محتوای مینکوفسکی به دست آمد، توجه کند. در این رابطه، یادآوری می‌کنیم که مفهوم متفاوتی از بعد وجود دارد که گاهی اوقات به جای بعد هاسدورف به کار می‌رود. برای یک مجموعه فشرده E این بعد از طریق اندازه $E^\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, E) < \delta\}$، وقتی‌که $\delta \to 0$ ارائه می‌شود. ملاحظه می‌شود، اگر E مکعب k بعدی در $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه وقتی که $\delta \to 0$، با اندازه لبگ m از $\mathbb{R}^d$، $m(E^\delta) \leq c\delta^{d-k}$. با این پیش زمینه فکری، **بعد مینکوفسکی** E با

$$\inf\{\beta : m(E^\delta) = O(\delta^{d-\beta}) \quad \delta \to 0 \quad \text{وقتی که}\},$$

تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که بعد هاسدورف یک مجموعه از بعد مینکوفسکی آن تجاوز نمی‌کند، اما تساوی به‌طور کلی برقرار نیست. برای جزئیات بیشتر تمرین ۱۷و۱۸ را ببینید.

مثلث سیرپینسکی

یک مجموعه کانتور شکل در صفحه به‌صورت زیر ساخته می‌شود. با یک مثلث متساوی‌الاضلاع بسته (صلب) S_0 شروع می‌کنیم که اضلاعی با طول واحد دارد. آنگاه به‌عنوان قدم اول مثلث متساوی الاضلاع باز سایه زده درتصویر ۱.۷ را حذف می‌کنیم.



شکل ۱.۷: روش ساخت مثلث سرپینسکی

حال سه مثلث بسته داریم که اجتماع آن‌ها را با S_1 مشخص می‌کنیم. هر مثلث نیمی از اندازه مثلث مبدا (یا والد) S_0 است و این مثلث‌های بسته کوچک‌تر نسل اول گفته می‌شوند. مثلث‌های S_1 فرزندان والد S_0 هستند. در مرحله دوم، فرایند را در هر مثلث نسل اول تکرار می‌کنیم. هر مثلث سه فرزند از نسل دوم دارد. اجتماع سه مثلث در نسل دوم را با S_2، مشخص می‌کنیم. سپس این فرایند را تکرار می‌کنیم تا دنباله S_k از مجموعه‌های فشرده را

بیابیم که خواص زیر را برقرار می‌سازد.

۱. هر S_k اجتماع ۳^k مثلث مساوی‌الاضلاع بسته به طول ضلع ۲^{-k} است. (این مثلث ها k- امین نسل هستند.)

۲. $\{S_k\}$ یک دنباله صعودی از مجموعه‌های فشرده است که به‌ازای هر $k \geq ۰$، $S_{k+۱} \subseteq S_k$.

مثلث سرپینسکی مجموعه فشرده‌ای با تعریف

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=۰}^{\infty} S_k,$$

است.

قضیه ۱۳.۷. مثلث سرپینسکی $\mathcal{S}$ دارای بعد هاسدورف اکید

$$\alpha = \log ۳ / \log ۲$$

است.

نامساوی $m_\alpha(\mathcal{S}) \leq ۱$ بلافاصله از نتیجه به‌دست می‌آید. $\delta > ۰$ داده شده است، K را طوری انتخاب کنید، که $۲^{-K} < \delta$. از آنجا که مجموعه S_K، مجموعه $\mathcal{S}$ را پوشانده و شامل ۳^K مثلث است که قطر هر یک برابر با $۲^{-K} < \delta$ است، باید داشته باشیم

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{S}) \leq ۳^K (۲^{-K})^\alpha,$$

اما از آنجایی که $3 = 2^{\alpha}$ درمی‌یابیم $\mathcal{H}_{\alpha}^{\delta}(\mathcal{S}) \leq 1$، بنابراین $m_{\alpha}(S) \leq 1$.

نامساوی $m_{\alpha}(\mathcal{S}) > 0$ نامحسوس تر است. برای برهان آن باید یک نقطه خاص را در هر مثلثی که در ساختار $\mathcal{S}$ ظاهر می‌شود، ثابت بگیریم. راس چپ پایینی مثلث را راس آن مثلث می‌نامیم. با این انتخاب، 3^K راس از K− امین نسل موجود است. مبحثی که در ادامه می‌آید براساس این قانون مهم است که تمام این رئوس متعلق به $\mathcal{S}$ هستند.

فرض کنید $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ و $diamF_j < \delta$. می‌خواهیم ثابت کنیم به‌ازای ثابتی چون c

$$\sum_j (diamF_j)^{\alpha} \geq c > 0.$$

به وضوح، هر F_j مشمول درگویی با دو برابر قطر F_j است، بنابراین با جایگزینی 2δ با δ و توجه به اینکه $\mathcal{S}$ فشرده است، کافی است نشان دهیم اگر $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{N}$، که در آن $\mathcal{S} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_j$ یک گردایه متناهی از گوی‌هایی است که قطری کمتر از δ دارند، آنگاه

$$\sum_j^N (diamB_j)^{\alpha} \geq c > 0.$$

فرض کنید چنین پوششی از گوی‌ها داشته باشیم. مینیمم قطر B_j

ها را در نظر بگیرید و k را طوری انتخاب کنید که

$$۲^{-k} \leq \min_{۱\leq j\leq N} diamB_j < ۲^{-k+۱}.$$

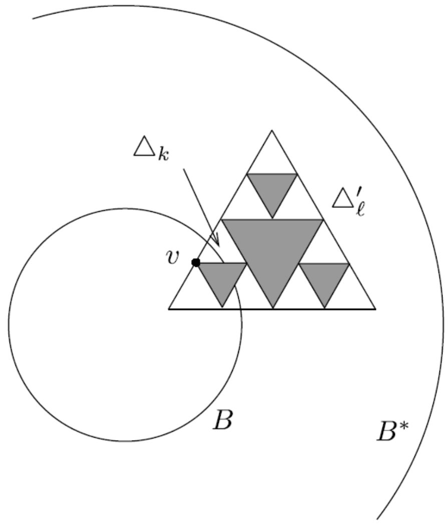
لم ۱۴.۷. فرض کنید L گویی در پوشش $\mathcal{B}$ باشد، به‌طوری‌که برای یک $\ell \leq k$،

$$۲^{-\ell} \leq diamB < ۲^{-\ell+۱}.$$

در این صورت B حداکثر شامل $c۳^{k-\ell}$ راس از k- امین نسل است.

در این فصل، طبق معمول نمایش دادن ثابت‌های عمومی با c و c' و ... را که مقادیر مهمی نیستند و ممکن است گاه به گاه تغییر کند، ادامه می‌دهیم. همچنین از $A \approx B$ استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم کمیت‌های A و B **مقایسه‌پذیرند**، به این معنا که برای ثابت‌های مناسب c و c'، $cB \leq A \leq c'B$.

برهان لم (۱۴.۷). فرض کنید B^* نشان دهندهٔ گویی با مرکز یکسان با B ولی با قطر سه برابر آن باشد و فرض کنید Δ_k مثلثی از k امین نسل باشد، که راس v آن در B قرار می‌گیرد. اگر Δ'_ℓ مثلث ℓ امین نسل را مشخص کند، که شامل Δ_k می‌شود، آنگاه از آنجایی‌که $v \in \Delta_k \subset \Delta'_\ell \subset B^*, diamB \geq ۲^{-\ell}$. همان‌طور که در تصویر ۲.۷ نشان داده شده است. حال یک عدد ثابت مثبت c وجود دارد، به‌طوری‌که B^* می‌تواند حداکثر شامل c مثلث متمایز از ℓ امین نسل باشد.



شکل ۲.۷: موارد لم (۱۴.۷)

این امر به این دلیل است که ℓ- امین نسل درون‌های مجزا و مساحتی مساوی با $c'۴^{-k}$ دارد، در حالی که B^* مساحتی حداکثر مساوی با $c''۴^{-\ell}$ دارد. سرانجام هر $\triangle'_\ell$ شامل $۳^{k-\ell}$ مثلث از k امین نسل می‌شود، بنابراین B حداکثر شامل $c۲^{k-\ell}$ راس، از مثلث‌هایی از k- امین نسل است.

برای تکمیل برهان که $\sum_{j=۱}^{k}(diamB_j)^\alpha \geq c > ۰$، توجه کنید

$$\sum_{j=۱}^{N}(diamB_j)^\alpha \geq \sum_{\ell} N_\ell ۲^{-\ell\alpha},$$

که در آن N_ℓ نشان دهنده تعدادی از گوی‌های B است، به‌طوری‌که $۲^{-\ell} \leq daimB_j \leq ۲^{-\ell+۱}$. با توجه به لم ملاحظه می‌کنیم که تعداد کلی رئوس مثلث‌ها در k- امین نسل که با گردایه B پوشانده می‌شوند، بیش از $c\sum_\ell N_l ۲^{k-\ell}$ نیست. از آنجایی که همه ۳^k راس از مثلث‌ها در k- امین نسل متعلق به S است و همه رئوس k- امین نسل پوشانده می‌شود، باید داشته باشیم $۳^k \leq c\sum_l N_l ۳^{k-\ell}$. بنابراین

$$\sum_\ell N_\ell ۳^{-\ell} \geq c.$$

اکنون کافی است تعریفی از α را به یاد بیاوریم که تضمین می‌کند $۲^{-\ell\alpha} = ۳^{-\ell}$ و بنابراین

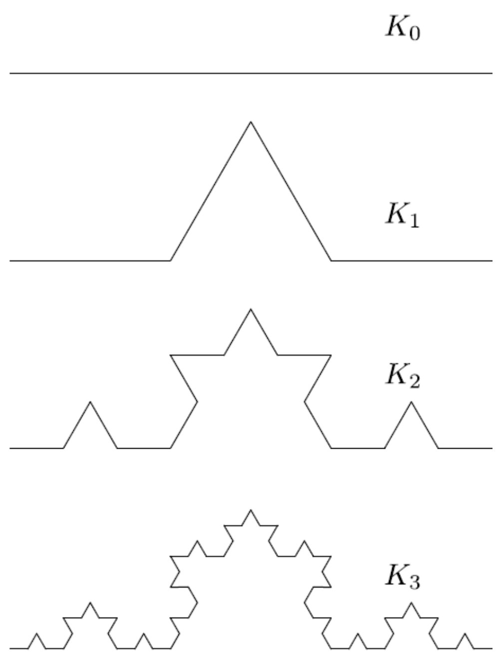
$$\sum_{j=۱}^{N} (diamB_j)^\alpha \geq c.$$

$\square$

در آخر مثالی را ارائه می‌دهیم که خواصی مشابه با مجموعهٔ کانتور و مثلث سرپینسکی را نمایش می‌دهد. که آن خمی است که در سال ۱۹۰۴ به‌وسیلهٔ فون کخ کشف شد.

۲.۲.۷ خم فون کخ

بازه یکه $K_۰ = [۰, ۱]$ را در نظر بگیرید، که فرض می‌کنیم روی محور x در صفحه xy قرار می‌گیرد. در این صورت مسیر چند ضلعی $K_۱$ را که در تصویر ۳,۷دیده می‌شود و شامل ۴ قطعه خط به طول مساوی ۱/۳ است، را در نظر بگیرید.



شکل ۳.۷: اولین مراحل در ساختار خم فون کخ

به‌ازای $۰ \leq t \leq ۱$، $K_۱(t)$ را به‌عنوان خم پارامتری شده $K_۱$ با سرعت ثابت در نظر بگیرید. به عبارت دیگر هنگامی که t از ۰ به $۱/۴$ می‌رود، نقطه $K_۱(t)$ روی پاره خط اول حرکت می‌کند. هنگامی که t از $۱/۴$ به $۱/۲$ می‌رود، نقطه $K_۱(t)$ روی پاره خط دوم حرکت می‌کند و به همین ترتیب ادامه دارد. به خصوص مشاهده می‌کنیم به‌ازای $۰ \leq \ell \leq ۴$، $K_۱(\ell/۴)$ در ۵ راس با $K_۱$ متناظر است.

در مرحله دوم ساختن، فرایند جایگزینی هر پاره خط در مرحله یک با چند ضلعی متناظر را تکرار می‌کنیم. سپس خم چند ضلعی $K_۲$ را به‌دست می‌آوریم که در تصویر ۳.۷ نشان داده می‌شود و $۴^۲ = ۱۶$ پاره خط به طول $۳^{-۲} = ۱/۹$ دارد. یک پارامتری سازی $K_۲(t)$ $(۰ \leq t \leq ۱)$ از $K_۲$ را انتخاب می‌کنیم که سرعت ثابت داشته باشد. ملاحظه می‌کنیم به‌ازای $۰ \leq \ell \leq ۴^۲$، $K_۲(\ell/۴^۲)$ همه رئوس $K_۲$ را می‌دهد و رئوس $K_۱$ به $K_۲$ تعلق دارد، به‌ازای هر $۰ \leq \ell \leq ۴$،

$$K_۲(\ell/۴) = K_۱(\ell/۴).$$

با تکرار کردن این فرایند به‌طور نامحدود، دنباله چند ضلعی های $\{K_j\}$ را به‌دست می‌آوریم، که در آن K_j شامل ۴^j پاره خط به طول ۳^{-j} است. اگر $K_j(t)$ $(۰ \leq t \leq ۱)$ پارامتری شده K_j باشد که سرعت ثابت دارد، آنگاه رئوس آن به‌طور دقیق درنقاط $K_j(\ell/۴^j)$ هستند و

هرگاه $j' > j$ به‌ازای $0 \leq \ell \leq 4^j$

$$K_{j'}(\ell/4^j) = K_j(\ell/4^j).$$

در حد وقتی که j به بی‌نهایت میل می‌کند، خطوط چند ضلعی K_j به خم فون کخ $\mathcal{K}$ میل می‌کنند. در واقع داریم به‌ازای هر $0 \leq t \leq 1$ و $j \geq 0$

$$|K_{j+1}(t) - K_j(t)| \leq 3^{-j}.$$

زمانی‌که $j = 0$، حکم واضح است و زمانی‌که ماهیت ساختار مرحله‌ی j ام را در نظر می‌گیریم، از طریق استقرا روی j به‌دست می‌آید. زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$K_J(t) = K_1(t) + \sum_{j=1}^{J-1}(K_{j+1}(t) - K_j(t)).$$

تقریب بالا اثبات می‌کند که سری

$$K_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(K_{j+1}(t) - K_j(t)),$$

به‌طور مطلق و به‌طور یکنواخت به تابع پیوسته $\mathcal{K}(t)$ همگراست، که یک پارامتری‌سازی از $\mathcal{K}$ است. علاوه بر پیوستگی، تابع $\mathcal{K}(t)$ در یک فرض منظم بودن صدق می‌کند که شرط لیپ شیتس برای تابع کانتور لبگ است.

قضیه ۱۵.۷. تابع $\mathcal{K}(t)$ در شرط لیپ شیتس از توان $\gamma = \log ۳/\log ۴$ صدق می‌کند، به این معنا که به‌ازای هر $t, s \in [۰,۱]$،

$$|\mathcal{K}(t) - \mathcal{K}(s)| \leq M|t-s|^{\gamma}.$$

پیش از این ملاحظه کردیم که $|K_{j+۱} - K_j(t)| \leq ۳^{-j}$. از آنجایی که K_j فاصله‌ای به طول ۳^{-j} را در ۴^{-j} واحد زمانی می‌پیماید، مشاهده می‌کنیم

به غیر از زمانی که $t = \ell/۴^j$، $\quad |K_j'(t)| \leq (\frac{۴}{۳})^j$

در نتیجه باید داشته باشیم

$$|K_j(t) - K_j(s)| \leq (\frac{۴}{۳})^j |t-s|,$$

به‌علاوه، $\mathcal{K}(t) = K_۱(t) + \sum_{j=۱}^{\infty}(K_{j+۱}(t) - K_j(t))$. اکنون خود را در همان موقعیت برهانی می‌یابیم که برای تابع کانتور-لبگ یک شرط لیپ شیتس با توان $\log ۲/\log ۳$ را ثابت می‌کند.

مبحث موجود را در لم زیر تعمیم می‌دهیم.

لم ۱۶.۷. فرض کنید $\{f_j\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته روی بازه $[۰,۱]$ باشد، که به‌ازای یک $A > ۱$،

$$|f_j(t) - f_j(s)| \leq A^j |t-s|,$$

و به‌ازای یک $B > ۱$،

$$|f_j(t) - f_{j+۱}(t)| \leq B^{-j}.$$

در این صورت حد $\lim_{j\to\infty} f_j(t) = f(t)$ موجود است و

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t-s|^{\gamma},$$

که در آن، $\gamma = \log B / \log(AB)$.

برهان. حد پیوسته f از سری همگرای یکنواخت

$$f(t) = f_۱(t) + \sum_{k=۱}^{\infty}(f_{k+۱}(t) - f_k(t)),$$

داده می‌شود و بنابراین

$$|f(t) - f_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty}|f_{k+۱}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} B^{-k} \leq cB^{-j}.$$

نامساوی مثلثی، یک کاربرد از نامساوی است که به تازگی به‌دست آمد و نامساوی موجود در صورت لم نتیجه می‌دهد،

$$\begin{aligned}|f(t) - f(s)| &\leq |f_j(t) - f_j(s)| + |(f - f_j)(t)| + |(f - f_j)(s)| \\ &\leq c(A^j|t-s| + B^{-j}).\end{aligned}$$

به‌ازای یک جفت از ثابت‌های t و s، $s \neq t$، j را طوری انتخاب می‌کنیم که مجموع $A^j|t-s| + B^{-j}$ را مینیمم کند. این کار اساسا با گرفتن j به نحوی به‌دست می‌آید که دو جمله، $A^j|t-s|$ و B^j مقایسه پذیر باشند. به‌طور دقیق‌تر، j ای را انتخاب می‌کنیم که

$$(AB)^j|t-s| \leq ۱ \qquad \text{و} \qquad ۱ \leq (AB)^{j+۱}|t-s|.$$

از آنجایی که $|t-s| \leq ۲$ و $AB > ۱$، چنین j ای باید موجود باشد. نامساوی اول نتیجه می‌دهد

$$A^j|t-s| \leq B^{-j},$$

در حالی که با توان γ رساندن نامساوی دوم و با به کاربردن این قانون که $(AB)^\gamma = B$، داریم:

$$۱ \leq B^j|t-s|^\gamma.$$

بنابراین $B^j \leq |t-s|^\gamma$ و در نتیجه

$$|f(t)-f(s)| \leq c(A^j|t-s| + B^{-j}) \leq m|t-s|^\gamma.$$

□

به خصوص این نتیجه همراه با لم ۱۰.۷ نشان می‌دهد که

$$\dim \mathcal{K} \leq \frac{۱}{\gamma} = \frac{\log ۴}{\log ۳}.$$

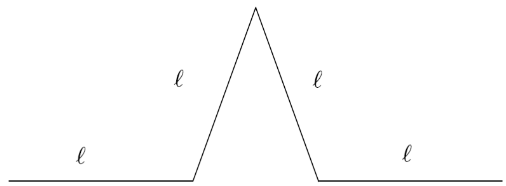
برای اثبات $m_\gamma(\mathcal{K}) > 0$ و بنابراین $\dim\ \mathcal{K} = \log 4/\log 3$ به بحثی متشابه با موردی که برای مثلث سرپینسکی ارائه شد، نیازمندیم. در حقیقت این بحث تعمیم می‌یابد تا خانواده‌ای کلی از مجموعه‌هایی را بپوشاند، که یک ویژگی خود متشابه دارند. بنابراین توجه‌مان را به این نظریه کلی معطوف می‌کنیم.

تذکرها: چند قانون دیگر در مورد خم فون کخ ذکر می‌کنیم. جزئیات بیشتر در تمرین ۱۳،۱۴ و ۱۵ یافت می‌شود.

۱.خم $\mathcal{K}$ در یک خانواده از خم‌های خود متشابه ساخته شده قراردارد. به‌ازای هر ℓ، $1/4 < \ell < 1/2$ درمرحله اول خم $K_1^\ell(t)$ را در نظر بگیرید که با چهار پاره خط هر کدام به طول ℓ داده می‌شود، اولین و آخرین خط روی محور x است و دومین و سومین خط اضلاع مثلث متساوی الساقین را تشکیل می‌دهند که قاعده آن روی محور x قرار می‌گیرد(تصویر ۴.۷ را ببینید) حالت $\ell = 1/3$ با خم فون کخ که پیش از این تعریف شده متناظر است.

با پیروی از روش قبل در حالت $\ell = 1/3$، خم $\mathcal{K}^\ell$ را می‌توان به‌دست آورد و دیده می‌شود که

$$\dim(\mathcal{K}^\ell) = \frac{\log 4}{\log 1/\ell}.$$



شکل ۴.۷: خم $K_1^\ell(t)$

بنابراین به‌ازای هر $۱ < \alpha < ۲$، خمی از این نوع با بعد α داریم. توجه کنید زمانی که $\ell \to ۱/۴$، خم حدی یک پاره خط مستقیم است، که بعد ۱ دارد. زمانی که $\ell \to ۱/۲$ حد، متناظر با یک خم «فضا پر کن» دیده می‌شود.

۲. خم‌های $t \mapsto \mathcal{K}^\ell(t)$، $۱/۴ < \ell \le ۱/۲$ هیچ‌جا مشتق‌پذیر هستند. همچنین می‌توان نشان داد که این خم‌ها زمانی که $۱/۴ \le \ell < ۱/۲$، ساده هستند.

خود متشابهی

مجموعه کانتور $\mathcal{C}$، مثلث سرپینسکی $\mathcal{S}$ و خم فون کخ $\mathcal{K}$ همگی یک ویژگی مهم دارند. هریک از این مجموعه‌ها شامل نسخه‌هایی مقیاسی از خودشان می‌شوند. به‌علاوه هر یک از این مثال‌ها با تکرار فرایندی ساخته شد که با آن مقیاس ارتباط نزدیکی داشت. به‌عنوان نمونه، بازه $[۰,۱/۳]$ شامل یک نسخه از مجموعه کانتور می‌شود که

اندازه‌ای با ضریب ۱/۳ دارد. همان نیز برای بازه $[۲/۳, ۱]$ صحیح است و بنابراین

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_۱ \bigcup \mathcal{C}_۲,$$

که در آن $\mathcal{C}_۱$ و $\mathcal{C}_۲$ صورت‌های مقیاسی $\mathcal{C}$ هستند. همچنین بازه‌های $[۰, ۱/۹]$، $[۲/۹, ۳/۹]$، $[۶/۹, ۷/۹]$ و $[۸/۹, ۱]$ شامل یک کپی از $\mathcal{C}$ است که مقیاسی با ضریب ۱/۹ دارد و مشابه آن ساخته می‌شود.

درمورد مثلث سرپینسکی، هر سه مثلث در نسل اول شامل یک کپی از $\mathcal{S}$ می‌شود، که از مقیاس با ضریب ۱/۲ حاصل می‌شود. بنابراین

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_۱ \bigcup \mathcal{S}_۲ \bigcup \mathcal{S}_۳,$$

که در آن هر $\mathcal{S}_j$، $j = ۱, ۲, ۳$ با مقیاس گیری و انتقال مثلث سرپینسکی اصلی به‌دست می‌آیند. به‌طور کلی‌تر، هر مثلث در k- امین نسل، یک نسخه از $\mathcal{S}$ است که از مقیاس با ضریب $۱/۲^k$ حاصل می‌شود.

سرانجام، هر پاره خط در مرحله ابتدایی ساخت خم فون کخ، از یک نسخه مقیاسی و احتمالا دوران شده خم فون کخ، منجر می‌شود. در حقیقت

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_۱ \bigcup \mathcal{K}_۲ \bigcup \mathcal{K}_۳ \bigcup \mathcal{K}_۴,$$

که درآن $\mathcal{K}_j$، $j = ۱, ۲, ۳, ۴$ با مقیاس $\mathcal{K}$ با ضریب ۱/۳ و انتقال و دوران دادن آن به‌دست می‌آید.

بنابراین این مثال‌ها هر کدام شامل نسخه‌ای بدل از خودشان، اما در مقیاسی کوچک‌تر می‌شوند. در این بخش، تعریفی دقیق ار مفهوم خود متشابه بودن ارائه می‌دهیم و قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که بعد هاسدورف مجموعه‌ها را تعیین می‌کند.

نگاشت $S:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ با نسبت $r>۰$ **تشابه** نامیده می‌شود، هرگاه

$$|S(x)-S(y)|=r|x-y|.$$

نشان داده می‌شود که هر تشابه $\mathbb{R}^d$ تجزیه‌ای از انتقال، دوران و یک اتساع به اندازه r است. (مسأله **۳** را ببینید.)

تعداد متناهی تشابه $S_۱,\dots,S_N$ با نسبت یکسان r داده شده، می‌گوییم مجموعهٔ $F\subset\mathbb{R}^d$ **خود متشابه** است، هرگاه

$$F=S_۱(F)\cup\cdots\cup S_m(F)$$

به ارتباط بین مثال‌های مختلف که پیش از این دیدیم، توجه می‌کنیم. زمانی که $F=\mathcal{C}$ مجموعه کانتور باشد، دو تشابه داده شده به‌صورت

$$S_۱(x)=x/۳,\ S_۲(x)=x/۳+۲/۳,$$

با نسبت ۱/۳ وجود دارد. بنابراین $m=۲$ و $r=۱/۳$.

در حالت $F=\mathcal{S}$، مثلث سرپینسکی، نسبت برابر با $r=۱/۲$ است و تعداد $m=۳$ تشابه موجود هستند که با

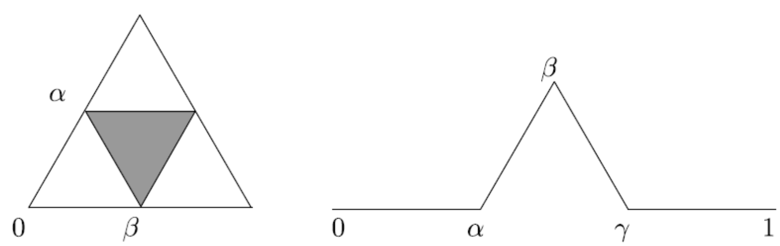
$$S_۱(x)=\frac{x}{۲},\qquad S_۲(x)=\frac{x}{۲}+\alpha,\qquad S_۳(x)=\frac{x}{۲}+\beta,$$

داده می‌شوند. در اینجا، α و β، نقاطی هستند که در نمودار اول شکل ۵.۷ نشان داده می‌شوند.
اگر $F = \mathcal{K}$، خم فون کخ باشد، داریم

$$S_۳(x) = \rho^{-۱}\frac{x}{۳} + \beta, \qquad S_۲(x) = \rho\frac{x}{۳} + \alpha, \qquad S_۱(x) = \frac{x}{۳},$$

و

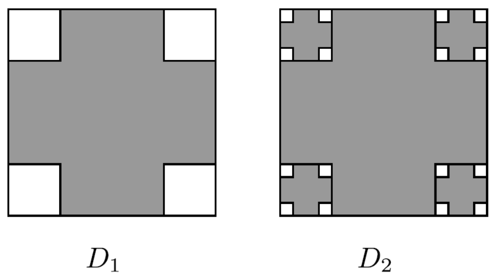
$$S_۴(x) = \frac{x}{۳} + \gamma,$$



شکل ۵.۷: تشابه‌های مثلث سرپینسکی و خم فون کخ

که ρ دورانی به مرکز مبدا و زاویه $\pi/۳$ است. $m = ۴$ تشابه موجود هستند که نسبت $r = ۱/۳$ دارند. نقاط α، β و γ در نمودار دوم تصویر ۵.۷ نشان داده شده‌اند.
مثال دیگر که گاهی، غبار کانتور $\mathcal{D}$ نامیده می‌شود، صورت دو بعدی دیگری از مجموعهٔ کانتور استاندارد است. به‌ازای هر ثابت

$0 < \mu < 1/2$، مجموعه $\mathcal{D}$ با شروع از مربع یکه $Q = [0,1] \times [0,1]$ ساخته می‌شود. در مرحله اول همه چیز را به جز چهار مربع باز درگوشه‌های Q که طول ضلع μ را دارند، حذف می‌کنیم. این کار به اجتماع D_1 از چهار مربع منجر می‌شود که در شکل ۶.۷ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۶.۷: ساختار غبار کانتور

این فرایندها را در هر زیر مربع D_1 تکرار می‌کنیم، همه چیز را به جز چهار مربع در گوشه‌ها به طول ضلع μ^2 حذف می‌کنیم. این کار اجتماع D_2 از ۱۶ مربع را می‌دهد . با تکرار این فرایند، خانواده $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_k \supset \ldots$ از مجموعه‌های فشرده را به‌دست می‌آوریم که اشتراک آن‌ها غبار کانتور متناظر با پارامتر μ را تعریف می‌کند.

در اینجا $m = 4$ تشابه با نسبت μ موجود هستند که به‌صورت

$$S_1(x) = \mu x,$$

$$S_۲(x) = \mu x + (۰, ۱ - \mu),$$
$$S_۳(x) = \mu x + (۱ - \mu, ۱ - \mu),$$
$$S_۴(x) = \mu x + (۱ - \mu, ۰),$$

داده می‌شوند. باید توجه شود که D حاصلضرب $C_\xi \times C_\xi$ است، که در آن C_ξ مجموعه‌ای کانتور با برش ثابت ξ است که در تمرین ۳ فصل ۱ تعریف می‌شود. در اینجا $\xi = ۱ - ۲\mu$.

نتیجه اولی که اثبات می‌کنیم وجود مجموعه‌های خود متشابه را تحت این فرض که تشابهات انقباضی هستند، به این معنا که نسبت آن‌ها در شرط $r < ۱$ صدق می‌کند، تضمین می‌نماید.

قضیه ۱۷.۷. فرض کنید $S_۱, S_۲, \cdots, S_m$، m تشابه با نسبت یکسان r باشند، به‌طوری‌که $۰ < r < ۱$. در این صورت یک مجموعه فشرده ناتهی F موجود است، به‌طوری‌که

$$F = S_۱(F) \cup \cdots \cup S_m(F).$$

برهان این قضیه طبیعت ساخت نقطه ثابت را داراست. با گوی بزرگ B شروع می‌کنیم و نگاشت‌های $S_۱, ..., S_m$ را به صورت مکرر به کار می‌بریم. این قانون که تشابه‌ها نسبت $r < ۱$ دارند، کافی است تا نتیجه بگیریم این فرایند با رسیدن به مجموعه منحصربفرد F با ویژگی مورد نظر متوقف می‌شود.

لم ۱۸.۷. یک گوی بسته B موجود است، به‌طوری‌که به‌ازای هر $j = ۱, ..., m$، $S_j(B) \subset B$.

برهان. در واقع، توجه می‌کنیم اگر S یک تشابه با نسبت r باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}|S(x)| &\leq |S(x) - S(\circ)| + |S(\circ)| \\ &\leq r|x| + |S(\circ)|.\end{aligned}$$

اگر بخواهیم که $|x| \leq R$ نتیجه بدهد $|S(x)| \leq R$، کافی است R را طوری انتخاب کنیم که $rR + |S(\circ)| \leq R$، $R \geq |S(\circ)|/(۱ - r)$. در این صورت ، به‌ازای هر S_j گوی B_j به مرکز مبدا را می‌یابیم، به‌طوری‌که $S_j(B_j) \subset B_j$. اگر B گویی در میان B_j ها با بزرگترین شعاع باشد آنگاه محاسبات بالا نشان می‌دهد که به‌ازای هر j، $S_j(B) \subset B$. $\square$

اکنون به‌ازای هر مجموعه A، فرض کنید $\widetilde{S}(A)$ مجموعه‌ای به صورت

$$\widetilde{S}(A) = S_۱(A) \cup \cdots \cup S_m(A),$$

باشد. توجه کنید اگر $A \subset A'$، آنگاه $\widetilde{S}(A) \subset \widetilde{S}(A')$.

همچنین ملاحظه کنید در حالی که هر، S_j نگاشتی از $\mathbb{R}^d$ به $\mathbb{R}^d$ است، نگاشت $\widetilde{S}$ یک نگاشت نقطه‌ای نیست، بلکه زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ را اختیار می‌کند و به زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^d$ می‌نگارد.

برای به‌کاربردن مفهوم انقباض با قدر نسبت کمتر از ۱، فاصله‌ای بین دو مجموعه فشرده را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم. به‌ازای هر $\delta > 0$، و مجموعه A، قرار می‌دهیم

$$A^{\delta} = \{x : d(x, A) < \delta\}.$$

بنابراین A^{δ} مجموعه‌ای شامل A، اما کمی بزرگ‌تر برحسب δ است. اگر A و B دو مجموعه فشرده باشند، **فاصله هاسدورف** را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dist(A, B) = \inf\{\delta : B \subset A^{\delta}, A \subset B^{\delta}\}.$$

لم ۱۹.۷. تابع فاصله، (به اختصار $dist$)که روی زیر مجموعه‌های فشرده‌ی $\mathbb{R}^d$ تعریف می‌شود، در شرایط زیر صدق می کند:

۱. $dist(A, B) = 0$، اگر و فقط اگر $A = B$.

۲. $dist(A, B) = dist(B, A)$

۳. $dist(A, B) \leq dist(A, C) + dist(C, B)$.

اگر $S_1, \dots, S_m$ تشابه‌هایی با نسبت r باشند، آنگاه

۴. $dist(\widetilde{S}(A), \widetilde{S}(B)) \leq r\, dist(A, B)$.

برهان لم ساده است و به خواننده واگذار می‌شود.

اکنون با استفاده از هر دو لم قضیه ۱۷.۷ را ثابت می‌کنیم. ابتدا B را به همان صورتی که در لم ۱۸.۷ آمده است، انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $F_k = \widetilde{S}^k(B)$ که در آن $\widetilde{S}^k$، k- امین ترکیب $\widetilde{S}$ با خودش است، به این معنا که $\widetilde{S}^k = \widetilde{S}^{k-1} \circ \widetilde{S}$ و $\widetilde{S}^1 = \widetilde{S}$. هر F_k فشرده و ناتهی است و از آنجایی که، $\widetilde{S}(B) \subset B$ داریم $F_k \subset F_{k-1}$.

اگر قرار دهیم

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k,$$

آنگاه F فشرده و ناتهی است و به‌وضوح $\widetilde{S}(F) = F$، زیرا با به کاربردن $\widetilde{S}$ برای $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$، به $\bigcap_{k=2}^{\infty} F_k$ منجر می‌شود که همچنین با F مساوی است.

منحصربفردی مجموعه F به‌صورت زیر ثابت می‌شود. فرض کنید G مجموعه فشرده دیگری باشد به‌طوری که $\widetilde{S}(G) = G$. آنگاه با به کاربردن قسمت ۴ در لم ۱۹.۷ نتیجه می‌شود که $dist(F,G) \leq rdist(F,G)$. از آنجایی که $r < 1$، این موجب می‌شود $dist(F,G) = 0$ بنابراین $F = G$ و برهان قضیه ۱۷.۷ کامل می‌شود.

تحت یک شرط تکنیکی اضافی، می توان بعد هاسدورف دقیق مجموعه خود متشابه F را محاسبه‌کرد. به بیان نادقیق، تحدید برقرار

است اگر مجموعه‌های $S_1(F), ..., S_m(F)$ خیلی هم پوشانی نداشته باشند. در واقع، اگر این مجموعه‌ها مجزا باشند، آنگاه می‌توانیم بحث کنیم

$$m_\alpha(F) = \sum_{j=1}^{m} m_\alpha(S_j(F)).$$

از آنجایی که S_j با r مقیاس می‌شود، پس داریم $m_\alpha(S_j(F)) = r^\alpha m_\alpha(F)$. بنابراین

$$m_\alpha(F) = mr^\alpha m_\alpha(F),$$

اگر $m_\alpha(F)$ متناهی باشد، آنگاه داریم $mr^\alpha = 1$. بنابراین

$$\alpha = \frac{\log m}{\log 1/r}.$$

محدودیتی که اعمال می‌کنیم به‌صورت زیر است. می‌گوییم تشابه‌های $S_1, ..., S_m$ **از هم جدا شده** هستند، هرگاه مجموعه باز کراندار $\mathcal{O}$ موجود باشد، به‌طوری‌که

$$\mathcal{O} \supset S_1(\mathcal{O}) \cup \cdots \cup S_m(\mathcal{O}),$$

و $S_j(\mathcal{O})$ ها مجزا هستند. فرض بر این نیست که $\mathcal{O}$ شامل F می‌شود.

قضیه ۲۰.۷. فرض کنید $S_1, ..., S_m$، m تشابه از هم جدا با قدر نسبت یکسان r باشند، که $0 < r < 1$. در این صورت مجموعهٔ F بعد هاسدورف برابر با $\log m / \log(1/r)$ دارد.

ابتدا ملاحظه کنید وقتی که F مجموعه کانتور است، می‌توانیم $\mathcal{O}$ را بازه باز یکه انتخاب کنیم. توجه داشته باشید که قبلا ثابت کرده‌ایم که بعد برابر $\log ۲/\log ۳$ است. برای مثلث سرپینسکی، مثلث یکه آن کار را انجام خواهد داد و

$$\dim \mathcal{S} = \log ۳/\log ۲$$

. در مثال غبار کانتور، مربع واحد باز کار می‌کند و $dim\mathcal{D} = \log m/\log \mu^{-۱}$. سرانجام برای منحنی فون کخ می توانیم قسمت داخلی مثلث را که در شکل ۷.۷ نشان داده شده است بگیریم و خواهیم داشت

$$dim\mathcal{K} = \log ۴/\log ۳$$

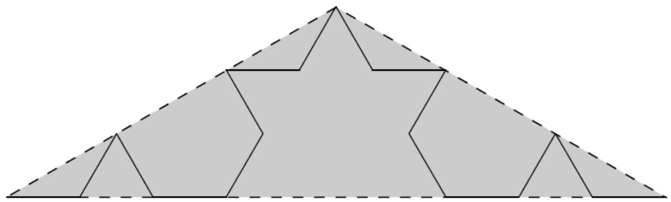
.

اکنون به برهان قضیه ۲۰.۷ برمی‌گردیم که از روش مثلث سرپینسکی پیروی می‌کند. اگر $\alpha = \log m/\log(۱/r)$، ادعا می‌کنیم $m_\alpha(F) < \infty$، بنابراین

$$\dim F \leq \alpha$$

. به‌علاوه این نامساوی حتی بدون فرض جداسازی برقرار است. در واقع به یاد آورید

$$F_k = \widetilde{S}^k(B),$$



شکل ۷.۷: مجموعه باز در جداسازی تشابه‌های فون کخ

و $\widetilde{S}^k(B)$ اجتماع m^k مجموعه با قطر کمتر از cr^k $\left(c = diamB\right)$ است، که هریک به‌صورت

$$S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ \ldots \circ S_{n_k}(B),$$

هستند که در آن $1 \leq n_i \leq m$ و $1 \leq i \leq k$.

در نتیجه، اگر $cr^k \leq \delta$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\delta}_{\alpha}(F) &\leq \sum_{n_1, \cdots, n_k} (diamS_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(B))^{\alpha} \\ &\leq c' m^k r^{\alpha k} \\ &\leq c'.\end{aligned}$$

زیرا $mr^{\alpha} = 1$، چون $\alpha = \log m / \log(1/r)$. از آنجایی که c' از δ مستقل است داریم $m_{\alpha}(F) \leq c'$.

برای اثبات این که $m_{\alpha}(F) > 0$، اکنون شرط جدا سازی را به کار

می‌بریم. بحث‌مان را به‌طور موازی با محاسبه‌ی بعد هاسدورف مثلث سرپینسکی که پیش تر آورده شد، پیش می‌بریم.
نقطه $\bar{x}$ در F را ثابت می‌گیریم. «رئوس» k- امین نسل را به‌صورت m^k نقطه تعریف می‌کنیم که در F قرار می‌گیرند و به‌صورت زیر داده می‌شوند

آن در که $\quad 1 \leq n_1 \leq m, ..., 1 \leq n_k \leq m \quad S_{n_1} \circ S_{n_2} \circ ... \circ S_{n_k}(\overline{x})$

هر راس با $(n_1, ..., n_k)$ برچسب‌گذاری می‌شود. لزومی ندارد که رئوس مجزا باشند، بنابراین با مضاربشان شمارش می‌شوند.
به‌طور مشابه، مجموعه‌های باز نسل k- ام را m^k مجموعه تعریف می‌کنیم. که به وسیلهٔ

آن در که $\quad 1 \leq n_1 \leq m, \ldots, 1 \leq n_k \leq m \quad S_{n_1} \circ \ldots \circ S_{n_k}(\mathcal{O}),$

داده می‌شوند. که در آن $\mathcal{O}$ ثابت است، و به نحوی انتخاب شده است که در شرط جداسازی صدق می‌کند. چنین مجموعه‌های بازی دوباره با اندیس های چندگانه‌ی $(n_1, n_2, ..., n_k)$ ، $1 \leq j \leq k$ و $1 \leq n_j \leq m$ برچسب گذاری می‌شوند.
در این صورت مجموعه‌های باز k- امین نسل مجزا هستند، چرا که اولین نسل ها مجزا هستند به‌علاوه اگر $k \geq \ell$، هر مجموعه باز ℓ- امین نسل شامل $m^{k-\ell}$ مجموعه باز از k- امین نسل می‌شود.

فرض کنید v راس k− امین نسل باشد و فرض کنید $\mathcal{O}(v)$ مجموعه‌ای باز در k− امین نسل باشد که با v متناظر است، به این معنا که v و $\mathcal{O}(v)$ برچسب یکسان $(n_۱, n_۲, ..., n_k)$ دارند. از آنجایی که $\bar{x}$ در فاصله ثابت از مجموعه باز مبدا $\mathcal{O}$ قرار دارد و $\mathcal{O}$ قطر متناهی دارد، در می‌یابیم

۱. $d(v, \mathcal{O}(v)) \leq cr^k$.

۲. $c' r^k \leq diam\mathcal{O}(v) \leq cr^k$.

به همین صورت در مورد مثلث سرپینسکی، کافی است ثابت کنیم اگر

$$\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=۱}^N$$

گردایه متنناهی ازگوی‌هایی باشد که قطری کمتر از δ دارد و اجتماع آن‌ها F را می‌پوشاند آنگاه

$$\sum_{j=۱}^{N} (diam B_j)^\alpha \geq c > ۰.$$

فرض کنید پوششی با گوی‌ها داشته باشیم و k را طوری انتخاب کنیم که

$$r^k \leq \min_{۱\leq j\leq N} \dim B \leq r^{k-۱}$$

لم ۲۱.۷. فرض کنید B یک گوی از پوشش $\mathcal{B}$ باشد که برای یک $\ell \leq k$،

$$r^{\ell} \leq diamB < r^{\ell-1}.$$

در این صورت B حداکثر شامل $cm^{k-\ell}$ راس از k امین نسل می‌شود.

برهان. اگر v راسی از k- امین نسل باشد و $v \in B$ و $\mathcal{O}(v)$ مجموعه بازی از k- امین نسل متناظر را مشخص کند، آنگاه برای انبساط ثابت B^* از B، خواص ۱و ۲ از بالا تضمین می‌کنند $\mathcal{O}(v) \subset B^*$ و B^* نیز شامل مجموعه بازی از نسل ℓ- ام است، که شامل $\mathcal{O}(v)$ می‌شود.

از آنجایی که B^* دارای حجم cr^{dl} است و هر مجموعهٔ باز در ℓ- امین نسل، دارای حجم تقریبا برابر r^{dl} (با توجه به ویژگی ۲ در بالا) است، B^* حداکثر شامل c مجموعه باز از نسل ℓ می‌شود. بنابراین B حداکثر شامل $cm^{k-\ell}$ راس از k- امین نسل است.

□

برای بحث نهایی، فرض کنید N_{ℓ} نشان دهنده‌ی تعداد گوی‌ها در $\mathcal{B}$ باشد، به‌طوری که

$$r^{\ell} \leq diamB_j \leq r^{\ell-1}.$$

طبق لم، ملاحظه می‌کنیم که تعداد کلی رئوس k- امین نسل که می‌تواند به وسیله گردایهٔ $\mathcal{B}$ پوشانده شود، بیش از $c\sum_{\ell} N_{\ell}m^{k-\ell}$ نمی‌تواند

باشد. از آنجایی که همه m^k راس k- امین نسل به F تعلق دارند، باید داشته باشیم $c\sum_\ell N_\ell m^{k-\ell} \geq m^k$ و بنابراین

$$\sum_\ell N_\ell m^{-\ell} \geq c.$$

از تعریف α، نتیجه می شود که $r^{\ell\alpha} = m^{-\ell}$ بنابراین

$$\sum_{j=1}^{N} (diam B_j)^\alpha \geq \sum_\ell N_\ell r^{\ell\alpha} \geq c,$$

و برهان قضیه ۲۰.۷ کامل می‌شود.

۳.۷ خم‌های فضا پرکن

در سال ۱۸۹۰ خبر از یک اکتشاف مهم رسید. پئانو یک خم پیوسته می‌ساخت که یک مربع کامل در صفحه را پر کرد. از آن موقع به بعد، صورت‌های گوناگونی از مبحث او ارائه شده است. در اینجا، ساختاری را شرح می‌دهیم که حکم دیگری را آشکار می سازد. اساسا از دیدگاه نظریه اندازه، بازه یکه و مربع یکه یکریخت هستند.

قضیه ۲۲.۷. خم $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ از بازه یکه به مربع یکه با خواص زیر موجود است:

۱. $\mathcal{P}$، $[۰,۱]$ را به‌طور پیوسته و پوشا به $[۰,۱]\times[۰,۱]$ می‌نگارد.

۲. $\mathcal{P}$، در شرط لیپ شیتس با توان ۱/۲ صدق می‌کند، به این معنا که

$$|\mathcal{P}(t)-\mathcal{P}(s)| \leq M|t-s|^{۱/۲}.$$

۳. تصویر هر زیر بازه $[a,b]$ تحت $\mathcal{P}$، یک زیرمجموعه فشرده از مربع با اندازه لبگ (دو بعدی) دقیقا $b-a$ است.

نتیجه سوم با جزئیات شرح داده می‌شود.

نتیجه ۲۳.۷. زیرمجموعه‌های $Z_۱\subset[۰,۱]$ و $Z_۲\subset[۰,۱]\times[۰,۱]$، هر یک با اندازه صفر موجود هستند، به‌طوری‌که $\mathcal{P}$ از

$$[۰,۱]\setminus Z_۱ \qquad \text{به} \qquad [۰,۱]\times[۰,۱]\setminus Z_۲$$

دو سویی و حافظ اندازه است. به عبارت دیگر، E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{P}(E)$ اندازه‌پذیر باشد و

$$m_۱(E)=m_۲(\mathcal{P}(E)).$$

در اینجا $m_۱$ و $m_۲$ به ترتیب در اندازه‌های لبگ $\mathbb{R}^۱$ و $\mathbb{R}^۲$ را نشان می‌دهند.

تابع $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ را نگاشت پئانو می‌نامیم. تصویر آن نیز خم پئانو نامیده می‌شود.

چند ملاحظه به ما کمک می‌کند تا ماهیت نتایج قضیه را بیان کنیم. فرض کنید

$$F : [۰, ۱] \to [۰, ۱] \times [۰, ۱]$$

پیوسته و پوشا باشد پس:

۱. F نمی‌تواند لیپ شیتس با نمای $\gamma > ۱/۲$ باشد. این حکم از لم ۱۰.۷ نتیجه می‌شود، که بیان می‌کند

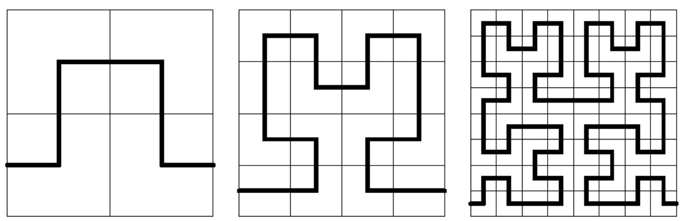
$$diam F([۰, ۱]) \leq \frac{۱}{\gamma} \dim[۰, ۱],$$

بنابراین $۱/\gamma \leq ۲$، به همان صورتی که انتظار داشتیم.

۲. F نمی‌تواند یک به یک باشد. در واقع اگر این حالت برقرار باشد، آنگاه معکوس F، تابع G، نیز باید موجود و پیوسته باشد. برای هر دو نقطه‌ای داده شده $a \neq b$ در $[۰, ۱]$، با نگریستن به خم‌های مجزا در مربعی که $F(a)$ و $F(b)$ را متصل می‌کند، به تناقض می‌رسیم. چرا که تصویر این دو خم تحت G باید در نقاط بین a و b اشتراک داشته باشد. در حقیقت به‌ازای هر

صفحهٔ باز D داده شده در مربع، همیشه $x \in D$ موجود است به‌طوری‌که اگر $t \neq s$، $F(t) = F(s) = x$.

برهان قضیه ۲۲.۷ از بررسی دقیق رده طبیعی از نگاشت‌هایی پیروی می‌کند که زیر مربع‌هایی در $[0,1] \times [0,1]$ را به زیر بازه‌هایی در $[0,1]$ متناظر می‌کنند. این روش فرایند تکراری هیلبرت را که او در سه مرحله‌ی اول شکل ۸.۷ مقرر کرد، روشن می‌کند.



شکل ۸.۷: ساختار خم پینو

اکنون به بررسی رده کلی از نگاشت‌ها برمی‌گردیم.

بازه‌های درجه چهارم و مربع‌های دوتایی

بازه‌های درجه چهارم زمانی به‌وجود می‌آیند که $[0,1]$ به‌طور متوالی با توان ۴ به زیر بازه هایی تقسیم شود. به‌عنوان نمونه، بازه‌های

درجه چهارم نسل اول بازه‌های بسته

$$I_1 = [0, 1/4], I_2 = [1/4, 1/2], I_3 = [1/2, 3/4], I_4 = [3/4, 1]$$

هستند. بازه‌های درجه چهارم نسل دوم به‌وسیله زیر تقسیم‌های هر بازه از نسل اول با توان ۴ به‌دست می‌آیند. بنابراین $4^2 = 16$ بازه درجه چهارم از نسل دوم وجود دارند. به‌طور کلی ، 4^k بازه‌ی درجه چهارم از k- امین نسل موجود هستند، که هریک به شکل $[\frac{\ell}{4^k}, \frac{\ell+1}{4^k}]$ هستند و در آن ℓ عدد صحیح است و $0 \le \ell \le 4^k$.

یک زنجیره از بازه‌های درجه چهارم یک دنباله نزولی از بازه‌های

$$I^1 \supset I^2 \supset \ldots \supset I^k \supset \ldots$$

است که در آن I^k بازه درجه چهارم از k- امین نسل است (بنابراین $|I^k| = 4^{-k}$).

قضیه ۲۴.۷. زنجیره‌های بازه‌های درجه چهارم در خواص زیر صدق می کنند.

۱. اگر $\{I^k\}$ زنجیره‌ای از بازه‌های درجه چهارم باشد، آنگاه $t \in [0, 1]$ وجود دارد، به‌طوری‌که $t \in \bigcap_k I^k$.

۲. برعکس، برای $t \in [0, 1]$ داده شده، یک زنجیره‌ی $\{I^k\}$ از بازه‌های درجه چهارم وجود دارد، به‌طوری‌که $t \in \bigcap_k I^k$.

۳. مجموعه tها که به‌ازای آنها زنجیره به دست آمده در قسمت(۲) منحصربفرد نباشد، مجموعه‌ای با اندازه صفر است (در حقیقت این مجموعه شمارا است).

برهان. قسمت (۱) از این حکم به‌دست می‌آید که $\{I^k\}$ یک دنباله نزولی از مجموعه‌های فشرده با قطرهایی است که به صفر میل می‌کند.

برای قسمت (۲)، t را ثابت می‌گیریم و توجه می‌کنیم که به‌ازای هر k، حداقل یک بازه درجه چهارم I^k با $t \in I^k$ موجود است. اگر t به شکل $\ell/۴^k$ باشد که در آن $۰ < \ell < ۴^k$ آنگاه دقیقا دو بازه درجه چهارم از k− امین نسل شامل t موجود است. بنابراین مجموعه‌ای از نقاط که برای آن زنجیره به دست آمده منحصر بفرد نیست، دقیقا مجموعه‌ای از اعداد **گویای دوتایی** $\frac{\ell}{۴^k}$ است که در آن

$$۰ < \ell < ۴^k, \quad ۱ \leq k.$$

البته توجه کنید که این کسرها مثل همان کسرهای به شکل $\ell'/۲^{k'}$ با $۰ < \ell' < ۲^{k'}$ هستند. این مجموعه شمارا است، بنابراین اندازه صفر دارد.

واضح است که زنجیرهای $\{I^k\}$ از بازه‌های درجه چهارم به‌طور طبیعی با رشته $.a_۱a_۲\cdots a_k$ که در آن هر a_k، ۰، ۱، ۲ یا ۳ است، نمایش

داده می‌شود. آنگاه نقطه t که با این رشته متناظر است با

$$t = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{a_k}{۴^k},$$

داده می‌شود. نقاطی که در آنها ابهام به‌وجود می‌آید، دقیقا همان‌جایی هستند که به‌ازای k به‌قدر کافی بزرگ $a_k = ۳$ یا معادلا به‌ازای k به قدرکافی بزرگ $a_k = ۰$.

بخشی از توصیف ما از نگاشت پئانو از ارتباط بین هر بازه درجه چهارم با یک مربع دوتایی به‌دست می‌آید. این **مربع‌های دوتایی** با تقسیم کردن مربع یکه $[۰,۱]\times[۰,۱]$ در صفحه به وسیله تقسیم ضلع‌های آن به دو قسمت به‌صورت پی در پی، به‌دست می‌آیند.

به‌عنوان نمونه، مربع‌های دوتایی از نسل اول از دو نیم کردن ضلع‌های مربع یکه به‌دست می‌آید. این چهار مربع بسته $S_۱, S_۲, S_۳, S_۴$ هر یک به طول ضلع ۱/۲ و مساحت $|S_i| = ۱/۴$ به‌ازای $i = ۱, ..., ۴$ به‌دست می‌آیند.

مربع‌های دو تایی از نسل دوم با تقسیم کردن هر مربع دوتایی از نسل اول به‌دست می‌آید و به همین ترتیب ادامه دارد. به‌طور کلی، ۴^k مربع از k- امین نسل هر یک به طول ضلع $۱/۲^k$ و مساحت $۱/۴^k$ موجود هستند.

یک زنجیر از مربع‌های دو تایی یک دنباله نزولی از مربع‌های

$$S^{۱} \supset S^{۲} \supset \ldots \supset S^k \supset \ldots$$

است که S^k یک مربع دو تایی از k- امین نسل است. $\square$

قضیه ۲۵.۷. زنجیره‌های مربع‌های دو تایی خواص زیر را دارد.

۱. اگر $\{S^k\}$ زنجیره‌ای از مربع‌های دو تایی باشد، آنگاه یک $x \in [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ منحصربه‌فرد موجود است، به‌طوری‌که $x \in \bigcap_k S^k$.

۲. برعکس، $x \in [۰, ۱]\times[۰, ۱]$ داده شده است، زنجیر $\{S^k\}$ از مربع‌های دو تایی موجود است، به‌طوری‌که $x \in \bigcap_k S^k$.

۳. مجموعهٔ xهایی که زنجیر داده شده در(۲) برای آن منحصربفرد نیست، مجموعه‌ای با اندازه صفر است.

در این حالت، مجموعهٔ ابهامات شامل همه نقاط $(x_۱, x_۲)$ می‌شود که در آن یکی از مختص ها یک عدد گویای دوتایی است. به‌طور هندسی، این مجموعه اجتماع شمارایی از قطعه خط‌های عمودی و افقی در $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ است که به‌وسیله یک شبکه از اعداد گویای دو تایی تعیین می‌شود. این مجموعه اندازه صفر دارد.

به‌علاوه هر زنجیر از مربع‌های دو تایی می‌تواند با رشته $b_1, b_2, \ldots$ نمایش داده شود که هر b_k، ۰، ۱، ۲ یا ۳ است. در این صورت

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{b_k}}{2^k}, \tag{۱.۷}$$

که در آن،

$$\begin{array}{ll} \text{اگر } b_k = 0، & \overline{b_k} = (0, 0) \\ \text{اگر } b_k = 1، & \overline{b_k} = (0, 1) \\ \text{اگر } b_k = 2، & \overline{b_k} = (1, 0) \\ \text{اگر } b_k = 3، & \overline{b_k} = (1, 1) \end{array}$$

تناظر دوتایی

یک **تناظر دو تایی** یک نگاشت ϕ از بازه‌های درجه چهارم به مربع‌های دو تایی است که موارد زیر را برقرار می‌کند:

۱. ϕ دو سویی است.

۲. ϕ نسل‌ها را حفظ می‌کند.

۳. ϕ شمول را حفظ می‌کند.

منظور از (۲) این است که اگر I بازه درجه چهارمی از k- امین نسل باشد، آنگاه $\phi(I)$ یک مربع درجه چهارم از k- امین نسل است. مقصود از (۳) این است که اگر $I \subset J$ آنگاه $\phi(I) \subset \phi(J)$.

به‌عنوان مثال، تناظر بدیهی یا استاندارد، رشته‌ی $\cdot a_1 a_2 \cdots$ را به رشته‌ی $\cdot b_1 b_2 \cdots$ با $b_k = a_k$ متناظر می‌کند.

یک تناظر دو تایی ϕ داده شده است، نگاشت القایی ϕ^*، $[0,1]$ را به $[0,1] \times [0,1]$ می‌نگارد، و به‌صورت زیر داده می‌شود. اگر $\{t\} = \bigcap I^k$ که در آن $\{I^k\}$ زنجیره‌ای از بازه‌های درجه چهارم است، آنگاه از آنجایی که $\{\phi(I^k)\}$ زنجیره‌ای از مربع‌های دوتایی است، قرار می‌دهیم

$$\phi^*(t) = x = \bigcap \phi(I^k),$$

توجه می‌کنیم ϕ^* به جز روی یک مجموعهٔ (شمارا) از اندازه صفر، خوش تعریف است.(آن نقاط مانند t که با بیش از یک رشته دوتایی نمایش می‌یابند.)

لحظه‌ای تامل نشان می‌دهد که اگر I' یک بازه درجه چهارم از k- امین نسل باشد، آنگاه تصاویر $\phi^*(I') = \{\phi^*(t) : t \in I'\}$ شامل مربع‌های دو تایی از k- امین نسل $\phi(I')$ است. بنابراین $\phi^*(I') = \phi(I')$ و بنابراین $m_1(I') = m_2(\phi^*(I'))$.

قضیه ۲۶.۷. یک تناظر دوتایی ϕ، داده شده است، مجموعه‌های

$Z_1 \subset [0,1]$ و

$$Z_2 \subset [0,1] \times [0,1]$$

هر یک با اندازه صفر موجود هستند، به‌طوری‌که

۱. ϕ^* روی $[0,1] - Z_1$ به $[0,1] \times [0,1] - Z_1$ دو سویی است.

۲. E اندازه‌پذیر است، اگر وفقط اگر $\phi^*(E)$ اندازه‌پذیر باشد

۳. $m_1(E) = m_2(\phi^*(E))$

برهان. در ابتدا فرض کنید $\mathcal{N}_1$ نشان دهندهٔ گردایه‌ای از زنجیره‌ها از آن بازه‌های درجه چهارم باشد که در قسمت (۳) قضیه ۲۴.۷ به‌دست آمد آن‌هایی که برایشان نقاطی که در $I = [0,1]$ وجود دارند، به‌طور منحصربفرد نمایش پذیر نیستند. به‌طور مشابه، فرض کنید $\mathcal{N}_2$ نشان دهنده گردایهٔ آن مربع‌های دوتایی باشد که برای آن‌ها نقاط متناظر در مربع $I \times I$ به‌طور منحصر به فرد نمایش پذیر نیستند.

از آنجایی که ϕ یک دوسویی از زنجیرهای بازه‌های درجه چهارم به زنجیرهای مربع‌های دوتایی است، یک دو سویی از $\mathcal{N}_1 \cup \phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ به $\phi(\mathcal{N}_1) \cup \mathcal{N}_2$ و در نتیجه از متمم‌های آن‌ها نیز هست.

فرض کنید $Z_۱$ زیرمجموعه‌ای از I باشد، که شامل تمام نقاط I می‌شود که (با توجه به قسمت (۱) از قضیه ۲۴.۷ به‌وسیلهٔ زنجیره‌های درون $\mathcal{N}_۱ \cup \phi^{-۱}(\mathcal{N}_۲)$ نمایش می‌یابند، و فرض کنید $Z_۲$ مجموعه‌ای از نقاط در مربع باشد، که می‌تواند به‌وسیلهٔ مربع‌هایی دوتایی در $\phi(\mathcal{N}_۱) \cup \mathcal{N}_۲$ نمایش بیابد. آنگاه $\phi^۲$، نگاشت به دست آمده، روی $I - Z_۱$ خوش تعریف است و یک دوسویی از $I - Z_۱$ به $(I \times I) - Z_۲$ را به‌دست می‌دهد. برای اثبات اینکه $Z_۱$ و $Z_۲$ هر دو اندازه صفر دارند، لم زیر را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم $\{f_k\}_{k=۲}^{\infty}$ یک دنباله داده شده‌ی ثابت، و هر f_k صفر، ۱، ۲ یا ۳ باشد. $\square$

لم ۲۷.۷. فرض کنید

$$E_\circ = \{x = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k/۴^k, a_k \neq f_k \text{ به ازای هر } k \text{ به قدر کافی بزرگ که در آن}\}.$$

در این صورت $m(E_\circ) = \circ$.

درواقع، اگر r را ثابت بگیریم، آنگاه $m(\{x : a_r \neq f_r\}) = ۳/۴$ و

$$m(\{x : a_r \neq f_r, a_{r+۱} \neq f_{r+۱}\}) = (۳/۴)^۲.$$

و مانند آن. بنابراین $m(\{x : a_k \neq f_k, k \geq r \text{ به‌ازای هر}\}) = \circ$ و $E_\circ$ اجتماع شمارایی از چنین مجموعه‌هایی است که برای آن‌ها لم نتیجه می‌شود.

گزاره‌ی مشابه برای نقاط درون مربع $S = I \times I$ از لحاظ نمایش (۱) وجود دارد.

توجه کنید به‌عنوان نتیجه، مجموعه‌ای از نقاط در I که متناظر با زنجیره‌های در $\mathcal{N}_1$ است، مجموعه‌ای با اندازه صفر را تشکیل می‌دهد. در حقیقت می‌توانیم لم را برای دنباله‌ای که به‌ازای هر k، $f_k = 1$ به‌کار ببریم، زیرا عناصر $\mathcal{N}_1$ با دنباله‌های $\{a_k\}$ با $a_k = 0$ به‌ازای k به قدر کافی بزرگ یا $a_k = 3$ به‌ازای k به قدر کافی بزرگ، متناظر است.

به‌طور مشابه، نقاط درون مربع S، که با $\mathcal{N}_2$ متناظرند، مجموعه‌ای با اندازه صفر تشکیل می‌دهند. برای مشاهده این امر، برای مثال به‌ازای k فرد قرار دهید، $f_k = 1$ و به‌ازای k زوج قرار دهید $f_k = 2$، و توجه کنید $\mathcal{N}_2$ با همه دنباله‌های $\{a_k\}$ متناظر است که یکی از چهار حالت زیر به‌ازای هر k به قدر کافی بزرگ برای آن‌ها برقرار است: یا a_k، ۰ یا ۱، یا a_k، ۲ یا ۳، یا a_k، ۰ یا ۲، یا a_k، ۱ یا ۳، است. با استدلال مشابه، نقاط $\phi^{-1}(\mathcal{N}_2)$ و $\phi(\mathcal{N}_1)$ مجموعه‌هایی با اندازهٔ صفر به ترتیب در I و $I \times I$ تشکیل می‌دهند.

اکنون برمی‌گردیم به این که ثابت کنیم ϕ^* (که یک دوسویی از $I \setminus Z_1$ به $(I \times I) \setminus Z_2$ است) حافظ اندازه است. برای مشاهده این امر بهتر است، قضیه (۴.۱) فصل ۱ را به یاد آورید، که به موجب آن

هرمجموعهٔ باز O در بازه یکه I به‌صورت اجتماع شمارای $\bigcup_{j=۱}^{\infty} I_j$ نوشته می‌شود، که در آن هر I_j یک بازه بسته است و بنابراین I_jها درون مجزا دارند. به‌علاوه، یک بررسی از برهان نشان می‌دهد که بازه‌ها را می‌توان دوتایی گرفت، به این معنا که برای اعداد صحیح ℓ و j به شکل $[\ell/۲^j, (\ell+۱)/۲^j]$ باشند. به‌علاوه، چنین بازه‌ای اگر j زوج باشد، $j = ۲k$، خود یک بازه درجه چهارم یا اگر j فرد باشد و $j = ۲k-۱$ اجتماعی از دو بازه درجه چهارم

$$[(۲\ell)/۲^{۲k}, (۲\ell+۱)/۲^{۲k}] \text{و} [(۲\ell+۱)/۲^{۲k}, (۲\ell+۲)/۲^{۲k}]$$

است. در این صورت هر مجموعهٔ باز در I می‌تواند به‌عنوان اجتماع بازه‌های درجه چهارم که درون شان مجزاست، ارائه شود. به‌طور مشابه هر مجموعهٔ باز در مربع $I \times I$ یک اجتماع از مربع‌های دوتایی است که درونشان مجزاست.

اکنون فرض کنید E، مجموعه‌ای از اندازه صفر در $I \setminus Z_۱$ و $\epsilon > ۰$ باشد. در این صورت می‌توانیم $E \subset \bigcup_j I_j$ را بپوشانیم به‌طوری‌که در آن I_j ها بازه‌های درجه چهارم هستند و $\sum_j m_۱(I_j) < \epsilon$. چون $\phi^*(E) \subset \bigcup_j \phi^*(I_j)$، لذا

$$m_۲(\phi^*(E)) \leq \sum m_۲(\phi^*(I_j)) = \sum m_۱(I_j) < \epsilon.$$

بنابراین $\phi^*(E)$ اندازه‌پذیر است و $m_۲(\phi^*(E)) = ۰$. به‌طور مشابه $(\phi^*)^{-۱}$

مجموعه‌های با اندازه صفر را در $(I\times I)\setminus Z_۲$ به روی مجموعه‌هایی از اندازه صفر در I می‌نگارد.

اکنون بحث بالا نشان می‌دهد که اگر $\mathcal{O}$ مجموعه‌ای باز در I باشد، آنگاه $\phi^*(\mathcal{O}\setminus Z_۱)$ اندازه‌پذیراست و $m_۲(\phi^*(\mathcal{O}\setminus Z_۱))=m_۱(\mathcal{O})$. بنابراین این اتحاد به مجموعه‌های G_δ در I منتقل می‌شود. از آنجایی که هر مجموعه اندازه‌پذیر از یک مجموعهٔ G_δ به‌وسیله مجموعه‌ای با اندازه صفر جدا می‌شود، مشاهده می‌کنیم برای هر زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر E از $I\setminus Z_۱$، ثابت می‌شود

$$m_۲(\phi^*(E))=m_۱(E)$$

.

با بحثی مشابه در مورد $(\phi^*)^{-۱}$ برهان قضیه کامل می‌شود.

نگاشت پئانو به‌صورت ϕ^* برای یک تناظر خاص ϕ به‌دست می‌آید.

ساختار نگاشت پئانو

تناظر دوتایی خاصی که اکنون آن را مطرح می‌کنیم، به ما این امکان را می‌دهد که با ادامه مراحل تقریبات، خم پئانو را بیابیم. ایده اصلی پشت این ساختار این است که همینطور که از بازه درجه چهارم در نسل k- ام به بازه درجه چهارم بعدی در همان نسل می‌رسیم، از

یک مربع دوتایی از مولد k- ام به یک مربع دیگری از نسل k- ام می‌رسیم که در یک ضلع مشترک هستند.

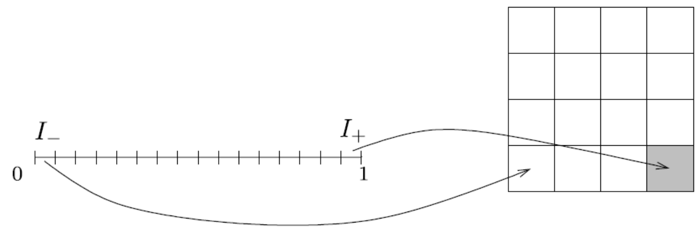
به‌طور دقیق‌تر، می‌گوییم دو بازه درجه چهارم درنسل‌های یکسان **مجاور** هستند، اگر در یک نقطه مشترک باشند. همچنین دو مربع در نسل‌های یکسان **مجاور** هستند، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.

لم ۲۸.۷. یک تناظر دو تایی منحصر بفرد ϕ موجود است، به‌طوری‌که

۱. اگر I و J دو بازه مجاور از نسل‌های یکسان باشند، آنگاه $\phi(I)$ و $\phi(J)$ دو مربع مجاور از نسل‌های یکسان هستند.

۲. در نسل k، اگر I_- بازه‌ی حداکثری چپ و I_+ بازه حداکثری راست باشد، آنگاه $\phi(I_-)$ مربع چپ پایینی و $\phi(I_+)$ مربع راست پایینی است.

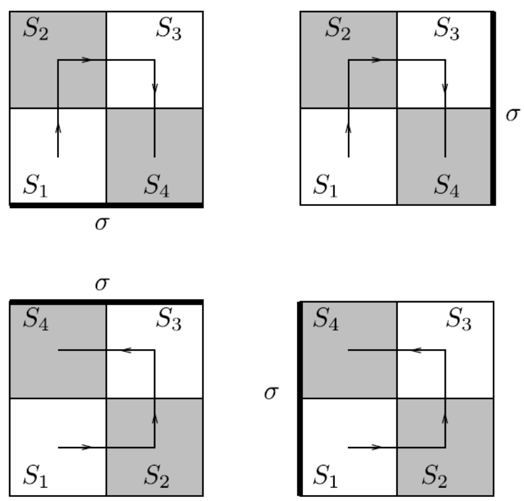
قسمت (۲) لم در تصویر ۹.۷ نمایش داده می‌شود.



شکل ۹.۷: تناظر دو تایی خاص

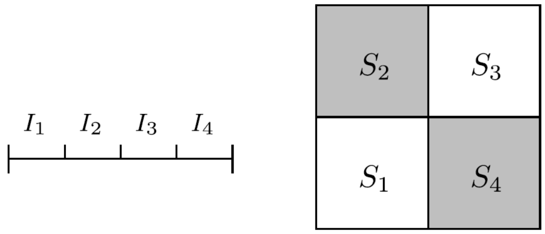
یک مربع S و چهار زیر مربع بلافصل آن S_1, S_2, S_3, S_4 داده شده‌اند، به‌طوری‌که S_j و S_{j+1} به‌ازای $j = ۱,۲,۳$ مجاور هستند. با چنین ترتیبی، توجه می‌کنیم اگر S_1 را با سفید و سپس به تناوب با سیاه و سفید رنگ کنیم، مربع S_3 نیز سفید است در حالی که S_2 و S_4 سیاه هستند. نکته مهم برای یادآوری این است که اگر مربع اول در مسیر سفید باشد، آنگاه مربع آخر سیاه است.

ملاحظه کلیدی در زیر آمده است. فرض کنید مربع S و ضلع σ از S را در اختیار داریم. اگر S_1 یکی از چهار زیرمربع بلافصل در S باشد، آنگاه S_4 یک ضلع مشترک با σ دارد. برای اولین مربع S_1 درگوشه سمت چپ پایین S، چهار احتمال موجود است که با چهار انتخاب σ متناظر می‌شوند و در تصویر ۱۰.۷ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱۰.۷: پیمایش‌ها

اکنون باتوصیف استقرایی از تناظر دوتایی که در شرط دوم صدق می‌کند، شروع می‌کنیم. روی بازه‌های درجه چهارم نسل اول، مربع $S_j = \phi(I_j)$ را به همان صورتی که در تصویر ۱۱.۷ آمده، تعیین می‌کنیم.



شکل ۱۱.۷: مرحله اول تناظر

اکنون فرض کنید ϕ برای همه بازه‌های درجه چهارم از نسل با شماره کمتر یا مساوی k تعریف شده باشد. اکنون بازه‌های نسل k را با ترتیب صعودی، به‌صورت $I_۱, \dots, I_۴$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم $S_j = \phi(I_j)$. سپس $I_۱$ را به چهار بازه درجه چهارم از نسل $k+۱$ تقسیم می‌کنیم و آن‌ها را با $I_{۱,۱}$، $I_{۱,۲}$، $I_{۱,۳}$ و $I_{۱,۴}$ مشخص می‌کنیم که در آن بازه‌ها به ترتیب صعودی انتخاب شده‌اند.

سپس به هر بازه $I_{۱,j}$ یک مربع دوتایی $\phi(I_{۱,j}) = S_j$ از نسل $k+۱$ مشمول در $S_۱$ متناظر می‌کنیم به‌طوری‌که

۱. $S_{۱,۱}$ زیر مربع چپ پایینی از $S_۱$ است.

۲. $S_{۱,۴}$ در تماس با ضلعی است که بین $S_۱$ و $S_۲$ مشترک است.

۳. $S_{۱,۱}$، $S_{۱,۲}$، $S_{۱,۳}$ و $S_{۱,۴}$ یک پیمایش است.

و این ممکن است، زیرا فرضیات استقرا تضمین می‌کند که $S_۲$ با $S_۱$ مجاور باشد.

این روند زیرمربع‌های $S_۱$ را ساماندهی می‌کند. بنابراین اکنون توجه‌مان را به $S_۲$ معطوف می‌کنیم. فرض کنید $I_{۲,۱}$، $I_{۲,۲}$، $I_{۲,۳}$ و $I_{۲,۴}$ بازه‌های نسل $k+۱$ در $I_۲$ را نشان دهند که به ترتیب صعودی نوشته شده اند. ابتدا $S_{۲,۱}=\phi(I_{۲,۱})$ را زیرمربعی از $S_۲$ که با $S_{۱,۴}$ مجاور است، می‌گیریم. این عمل ممکن است زیرا $S_{۱,۴}$ با این ساختار در کنار $S_۲$ است. توجه داشته باشید که $S_۱$ را از یک مربع سیاه $(S_{۱,۴})$ ترک می‌کنیم و از یک مربع سفید $(S_{۲,۱})$ وارد $S_۲$ می‌شویم. چون $S_۳$ مجاور $S_۲$ است، اکنون یک پیمایش $S_{۲,۱}$، $S_{۲,۲}$، $S_{۲,۳}$ و $S_{۲,۴}$ را می‌یابیم، به‌طوری‌که $S_{۲,۴}$، در کنار $S_۳$ قراردارد.

از این پس این فرایند را در هر بازه I_j و مربع S_j، $j=۳,..,۴^k$ تکرار می‌کنیم. توجه کنید درهر مرحله مربع $S_{j,۱}$ (مربع «ورود») سفید است در حالی که $S_{j,۴}$ (مربع «خروجی») سیاه است.

در مرحله پایانی، مفروضات استقرا تضمین می‌کند که $S_{۴^k}$ مربع گوشه‌ی پایین راست است به‌علاوه از آنجایی که $S_{۴^k-۱}$ باید با $S_{۴^k}$ مجاور، یا باید بالای آن و یا باید در قسمت چپ آن باشد، بنابراین مربعی از $(k+۱)$ -امین مولد در طول ضلع بالا یا چپ وارد می‌کنیم. مربع ورودی، مربع سفید است و ما به زیر مربع گوشه راست پایین

از S_{4^k} می‌رویم که یک مربع سیاه است.

این مرحله استقرایی و در نتیجه برهان لم ۲۸.۷ را نتیجه می‌دهد.

اکنون با یک تعریف دقیق از خم پئانو شروع می‌کنیم. برای هر نسل k، یک چندضلعی می‌سازیم که شامل خطوط عمودی و افقی می‌شود. این قطعه خطها ارتباط بین مراکز مربع‌های متوالی را برقرار می‌کنند. به‌طور دقیق‌تر فرض کنید ϕ معرف تناظر دوتایی لم ۲۸.۷ باشد و فرض کنید $S_{4^k}, ..., S_1$ مربع‌هایی از k -امین نسل باشند که با توجه به ϕ مرتب شده‌اند، به این معنی که $\phi(I_j) = S_j$. فرض کنید t_j نقطه میانی I_j را نشان دهدیعنی:

برا ی $j = 1, ..., 4^k$، $\quad t_j = \frac{j - \frac{1}{2}}{4^k}$.

فرض کنید x_j، نشان دهنده‌ی مرکز مربع S_j باشد و تعریف کنید

$$\mathcal{P}_k(t_j) = x_j.$$

همچنین فرض کنید

$$\mathcal{P}_k(0) = (0, 1/2^{k+1}) = x_0 \quad \text{که در آن} \quad t_0 = 0$$

و

$$\mathcal{P}_k(1) = (1, 1/2^{k+1}) = x_{4^k+1} \quad \text{که در آن} \quad t_{4^k+1} = 1.$$

سپس به وسیلهٔ خطی بودن در امتداد زیربازه‌ها که با نقاط تقسیم‌کننده $t_{۴^k+۱}, ..., t_۰$ مشخص شده‌اند، $\mathcal{P}_k(t)$ را به بازه یکه $۰ \le t \le ۱$ توسیع می‌دهیم.

توجه کنید که فاصله $|x_j - x_{j+۱}| = ۱/۲^k$ برای وقتی که $۰ \le j \le ۴^k$ و $|t_j - t_{j+۱}| = ۱/۴^k$ برابر $\frac{۱}{۲^k}$ است. همچنین

$$|x_۱ - x_۰| = |x_{۴^k} - x_{۴^k+۱}| = \frac{۱}{۲ \cdot ۲^k},$$

در حالی که

$$|t_۱ - t_۰| = |t_{۴^k} - t_{۴^k+۱}| = \frac{۱}{۲ \cdot ۲^k}.$$

بنابراین $\mathcal{P}'_k(t) = ۴^k ۲^{-k} = ۲^k$ بجز زمانی که $t = t_j$.

در نتیجه

$$|\mathcal{P}_k(t) - \mathcal{P}_k(s)| \le ۲^k |t - s|.$$

در این حالت

$$|\mathcal{P}_{k+۱}(t) - \mathcal{P}_k(t)| \le \sqrt{۲}۲^{-k},$$

زیرا زمانی که $\ell/۴^k \le t \le (\ell + ۱)/۴^k$ ، $\mathcal{P}_{k+۱}(t)$ و $\mathcal{P}_k(t)$ به مربع دوتایی یکسانی از نسل k تعلق دارند.

بنابراین حد

$$\mathcal{P}(t) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{P}_k(t) = \mathcal{P}_۱(t) + \sum_{j=۱}^{\infty} \mathcal{P}_{j+۱}(t) - \mathcal{P}_j(t),$$

موجود است، و به‌دلیل همگرایی یکنواخت، تابع پیوسته‌ای تعریف می‌کند. طبق لم ۱۶.۷ نتیجه می‌گیریم

$$|\mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(s)| \leq M|t-s|^{۱/۲}$$

و $\mathcal{P}$ در شرط لیپ شیتس با توان ۱/۲ صدق می کند.

به‌علاوه هر $\mathcal{P}_k(t)$ با هر مربع دوتایی از نسل k-ام را، زمانی که t در $[۰,۱]$ تغییر می‌کند، تلاقی می کند. بنابراین $\mathcal{P}$ در مربع یکه چگال است و با استفاده از پیوستگی درمی‌یابیم که $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ پوشاست.

سرانجام، برای اثبات ویژگی حافظ اندازه بودن $\mathcal{P}$، کافی است ثابت کنیم $\mathcal{P} = \phi^*$.

لم ۲۹.۷. اگر ϕ تناظر دوتایی لم ۲۸.۷ باشد، آنگاه به‌ازای هر $۰ \leq t \leq ۱$، $\phi^*(t) = \mathcal{P}(t)$.

برهان. ابتدا توجه کنید که $\phi^*(t)$ به‌ازای هر t بدون ابهام تعریف می‌شود. در واقع، فرض کنید $t \in \bigcap_k I^k$ و $t \in \bigcap_k J^k$ دو زنجیر از بازه‌های درجه چهارم باشند، آنگاه I^k و J^k برای k به قدرکافی بزرگ باید مجاور باشند. بنابراین $\phi(I^k)$ و $\phi(J^k)$ به‌ازای هر k به قدر کافی بزرگ، مربع‌های مجاور هستند. بنابراین

$$\bigcap_k \phi(I^k) = \bigcap_k \phi(J^k).$$

پس مستقیما از این ساختار داریم

$$\bigcap_k \phi(I^k) = \lim \mathcal{P}_k(t) = \mathcal{P}(t).$$

□

همچنین این مبحث نشان می‌دهد که برای هر بازه درجه چهارم I، $\mathcal{P}(I) = \phi(I)$.

اکنون به یاد آورید که هر بازه (a,b) می‌تواند به‌صورت $\bigcup_j I_j$ نوشته شود که در آن I_j ها بازه‌های درجه چهارم با درون‌های مجزا هستند. چون $\mathcal{P}(I_j) = \phi(I_j)$، بنابراین این مجموعه‌ها مربع‌های دوتایی با درون مجزا هستند. از آنجایی که $\mathcal{P}(a,b) = \bigcap_k \mathcal{P}(I_j)$، داریم

$$m_۲(\mathcal{P}(a,b)) = \sum_{j=۱}^{\infty} m_۲(\mathcal{P}(I_j)) = \sum_{j=۱}^{\infty} m_۲(\phi(I_j)) = \sum_{j=۱}^{\infty} m_۱(I_j) = m_۱(a,b).$$

این نتیجه (۳) قضیه ۲۲.۷ را ثابت می‌کند. نتیجه دیگر پیش از این ثابت شده است، تنها باید توجه کنیم که نتیجه مشمول در قضیه ۲۶.۷ است.

در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ یک نگاشت حافظ اندازه از $[۰,۱]$ به $[۰,۱] \times [۰,۱]$ القا می‌کند. این برهان قضیه ۲۲.۷ را می‌دهد.

۴.۷ مجموعه‌های بسیکوویچ و منظم بودن

با نمایش یک خاصیت نظم شگفت‌انگیز که در تمامی زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر (با اندازه متناهی) از $\mathbb{R}^d$ وقتی که $d \geq ۳$ برقرار است، شروع می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینیم، این قانون که پدیده‌ی متناظر برای $d = ۲$ برقرار نیست، به خاطر وجود یک مجموعهٔ مهم است که توسط بسیکوویچ کشف شد. یک روش ساخت از یک مجموعهٔ این چنینی در بخش ۴,۴ با جزئیات بیان خواهد شد.

ابتدا نمادهایی را برقرار می‌کنیم. برای هر بردار یکه γ روی کره، $\gamma \in S^{d-۱}$ و هر $t \in \mathbb{R}$، **صفحه** $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ را درنظر می‌گیریم که به‌صورت ابر صفحه آفین $(d-۱)$-بعدی متعامد با γ و («فاصله علامت‌دار») t از مبدا تعیین می‌شود [۱]. صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ به‌صورت

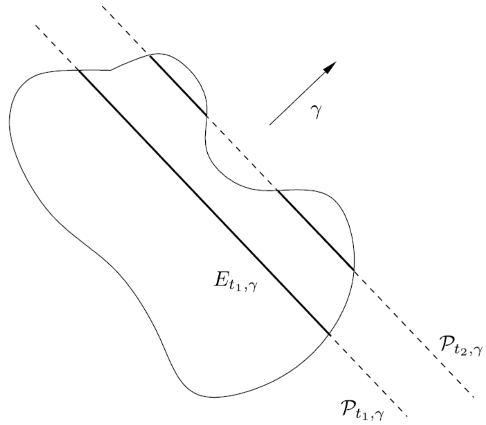
$$\mathcal{P}_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \gamma = t\},$$

تعریف می‌شود.

ملاحظه می‌کنیم هر $\mathcal{P}(t,\gamma)$ اندازه لبگ طبیعی $(d-۱)$ را دارد که

۱. توجه کنید دو صفحه عمود بر γ و فاصله $|t|$ ازمبدا موجود هستند، این با توجه به اینکه t مثبت یا منفی باشد محاسبه می‌شود

با m_{d-1} نشان داده می‌شود. در حقیقت اگر γ را به یک پایه متعامد یکه $e_{d-1}, ..., e_2, e_1$ و γ از $\mathbb{R}^d$ تکمیل کنیم، آنگاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^d$، مختصات متناظر را به‌صورت $x = x_1e_1 + ... + x_d\gamma$ می‌نویسیم. زمانی که قرار دهیم $x \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ و $(x_1, \cdots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$ و $x_d \in \mathbb{R}$، آنگاه اندازه m_{d-1} روی $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^{d-1}$ است. این تعریف از m_{d-1} از انتخاب بردارهای متعامد یکه $e_{d-1}, \cdots, e_2, e_1$ مستقل است، چرا که اندازه لبگ تحت دوران‌ها پایا است. (مسأله ۴ فصل ۲، یا تمرین ۲۶ فصل ۳ را ببینید.)با این مقدمات خارج از مسیر، برای هر زیر مجموعهٔ $E \in \mathbb{R}^d$ **برش** E از صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ را به‌صورت $E_{t,\gamma} = E \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma}$، **تعریف** می‌کنیم. اکنون برش‌های $E_{t,\gamma}$ را با تغییر t درنظر می‌گیریم، که در آن E اندازه‌پذیر و γ ثابت است. (تصویر ۱۲.۷ را ببینید.)



شکل ۱۲.۷: برش‌های $E\bigcap P_{t,\gamma}$ با تغییرات t

ملاحظه می‌کنیم که تقریبا به‌ازای هر t مجموعه $E_{t,\gamma}$، m_{d-1} اندازه‌پذیر است و به‌علاوه $m_{d-1}(E_{t,\gamma})$ تابع اندازه‌پذیری از t است. این نتیجه مستقیم قضیه فوبینی و تجزیه بالا $\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^d,$ است. در حقیقت، مادامی که جهت γ از پیش تعیین شده باشد، چیز بیشتری درباره‌ی تابع $t\mapsto m_{d-1}(E_{t,\gamma})$ نمی‌توان گفت.

با این وجود، زمانی که $d\geq 3$، ماهیت تابع برای «اغلب» γ ها متفاوت است. این حکم مشمول در قضیه زیر است.

قضیه ۳۰.۷. فرض کنید E با اندازه‌ای متناهی در $\mathbb{R}^d$ و $d\geq 3$ باشد، در این‌صورت تقریبا به‌ازای هر $\gamma\in S^{d-1}$:

۱. و به‌ازای هر $t\in\mathbb{R}$، $E_{t,\gamma}$ اندازه‌پذیر است.

۲. $m_{d-1}(E_{t,\gamma})$ نسبت به، $t \in \mathbb{R}$ پیوسته است.

به‌علاوه تابعی که به‌وسیله $\mu(t,\gamma) = m_{d-1}(E_{t,\gamma})$ برحسب t تعریف می‌شود، در یک شرط لیپ شیتس با توان α به‌ازای هر $0 < \alpha < 1/2$ صدق می‌کند.

مفهوم تقریبا همه جایی در این گزاره با توجه به ماهیت اندازه $d\sigma$، روی S^{d-1} است، که از فرمول مختصات قطبی در بخش «فرمول انتگرالگیری برای مختصات قطبی » از فصل قبل حاصل می‌شود.

به یاد می‌آوریم که تابع f لیپ شیتس با توان α است، هرگاه برای یک A،

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^{\alpha}.$$

بخش مهم (۱) این است که به‌ازای تقریبا هر γ، برش $E_{t,\gamma}$ برای همه مقادیر پارامتر t، اندازه‌پذیر است. به خصوص موارد زیر را داریم.

نتیجه ۳۱.۷. فرض کنید E مجموعه‌ای با اندازه صفر در $\mathbb{R}^d$ و $d \geq 3$ باشد، در این‌صورت برای تقریبا هر $\gamma \in S^{d-1}$، برش $E_{t,\gamma}$ به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}$، اندازه صفر دارد.

این حقیقت که وقتی $d = 2$ هیچ متشابهی برای این حالت وجود ندارد، پیامدی از وجود یک مجموعه بسیکوویچ(که «مجموعهٔ

ککایه»[1] نیز نامیده می‌شود) است، که به‌عنوان یک مجموعه که در سه شرط قضیه زیر صدق می‌کند، تعریف می‌شود.

قضیه ۳۲.۷. یک مجموعهٔ $\mathcal{B}$ در $\mathbb{R}^2$ موجود است، به‌طوری‌که:

۱. فشرده است،

۲. اندازه لبگ صفر دارد،

۳. شامل یک انتقال از هر پاره خط یکه می‌شود.

توجه کنید با $F = \mathcal{B}$ و $\gamma \in S^1$، و برای یک t_0 داریم،

$$1 \leq m_1(F \bigcap \mathcal{P}_{t_0,\gamma})$$

. اگر $m_1(F \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma})$ در t پیوسته باشد، آنگاه این اندازه برای یک بازه در t شامل t_0 ، اکیدا مثبت می‌شود و بنابراین طبق قضیه فوبینی $m_2(F) > 0$. این تناقض نشان می‌دهد که قضیه مشابه ۳۰.۷ برای $d = 1$ نمی‌تواند برقرار باشد.

در حالی که مجموعهٔ $\mathcal{B}$ اندازه دو بعدی صفر دارد، حکم نمی‌تواند با جایگزین کردن این اندازه با اندازه هاسدورف α بعدی ، با $\alpha < 2$، بهبود یابد.

1. Kakeya

قضیه ۳۳.۷. فرض کنید F مجموعه‌ای باشد که در شرایط (۱) و (۳) قضیه ۳۰.۷ صدق می کند. در این‌صورت F دارای بعد هاسدورف ۲ است.

۱.۴.۷ تبدیل رادون

قضیه‌های ۳۰.۷ و ۳۳.۷ از تحلیل ویژگی‌های منظم بودن تبدیل رادون $\mathcal{R}$ به‌دست می‌آیند. عملگر $\mathcal{R}$ به مسائلی در آنالیز منجر می‌شود و پیش از این در فصل ۶ جلد ۱ بررسی شده است.

برای یک تابع مناسب f روی $\mathbb{R}^d$، تبدیل رادون f با

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f,$$

تعریف می‌شود.

انتگرالگیری روی صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ با توجه به اندازه m_{d-1} که در بالا بحث شد، انجام می‌شود. ابتدا بررسی ساده زیر را انجام می‌دهیم:

۱. اگر f پیوسته و دارای محمل فشرده باشد، آنگاه البته که f روی هر صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ انتگرالپذیر است و بنابراین $\mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ برای هر $(t,\gamma) \in \mathbb{R} \times S^{d-1}$ تعریف می‌شود. به‌علاوه، تابع پیوسته‌ای از زوج (t,γ) است که در متغیر t محمل فشرده دارد.

۲. اگر f صرفا انتگرالپذیر لبگ باشد، آنگاه ممکن است f برای یک (t,γ) روی $\mathcal{P}_{t,\gamma}$، اندازه‌پذیر یا انتگرالپذیر نباشد و بنابراین $\mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ برای (t,γ) تعریف نمی‌شود.

۳. فرض کنید f تابع مشخصه‌ای از مجموعه E باشد، یعنی $f = \chi_E$. در این‌صورت، اگر $E_{t,\gamma}$ اندازه‌پذیر باشد، $\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = m_{d-۱}(E_{t,\gamma})$.

این ویژگی آخر است که تبدیل رادون را به مسأله ما مرتبط می‌کند. تقریب‌های کلیدی در این نتیجه شامل یک «تبدیل رادون» ماکزیمال می‌شود که به‌وسیلهٔ

$$\mathcal{R}^*(f)(\gamma) = \sup_{t\in R} |R(f)(t,\gamma)|,$$

تعریف می‌شود، مثل گزاره‌های متناظری که، مشخصه لیپ شیتس از $\mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ را به‌عنوان تابعی از t کنترل می‌کنند. قانون اساسی و اولیه تحلیل ما این است که، منظم بودن تبدیل رادون با افزایش بعد فضای زمینه بهبود می دهد.

قضیه ۳۴.۷. فرض کنید f پیوسته باشد و در $\mathbb{R}^d$ با $d \geq ۳$، محملی فشرده داشته باشد. در این‌صورت به‌ازای ثابت $c > ۰$ که به f وابسته نیست،

$$\int_{S^{d-۱}} \mathcal{R}^*(f)(\gamma) d\sigma(\gamma) \leq c[\|f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)}]. \qquad (۲.۷)$$

یک نامساوی از این نوع یک تقریب از نوع «پیشین» است. در ابتدا، این نامساوی تحت مفروضات منظم بودن روی تابع f به‌دست می‌آید و سپس حد گیری اجازه می‌دهد، تا در حالت کلی به تابع f متعلق به $L^1 \cap L^2$ گذار کنیم. گزاره‌هایی درمورد ظاهرشدن نرم L^1 و نرم L^2 در ۲.۷ ارائه می‌دهیم. نرم L^2 یک کنترل موضعی ویژه‌ای از این نوع را اعمال می‌کند که به خاطر نظم مورد انتظار، ضروری است.(تمرین ۲۷ را ببینید.) با این وجود، بدون اعمال محدودیت بر ماهیت عمومی f ، ممکن است تابع f روی هر صفحه‌ی $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ انتگرالپذیر نشود. به‌عنوان مثال $f(x) = 1/(1+|x|^{d-1})$ این را نشان می‌دهد. توجه کنید اگر $d \geq 3$، این تابع به $L^2(\mathbb{R}^d)$ و نه به $L^1(\mathbb{R}^d)$ تعلق دارد.

برهان قضیه ۳۴.۷، درحقیقت نتیجه اساسی ویژه‌ای را به‌دست می‌دهد، که ما آن را به‌عنوان نتیجه بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳۵.۷. فرض کنید f پیوسته باشد و در $\mathbb{R}^d$ برای $d \geq 3$، محمل فشرده داشته باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $0 < \alpha < 1/2$ نامساوی ۲.۷ با جایگزینی $\mathcal{R}^*(f)(\gamma)$ با

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\mathcal{R}(f)(t_1,\gamma) - \mathcal{R}(f)(t_2,\gamma)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}, \qquad (۳.۷)$$

برقرار است.

برهان قضیه بر ارتباط بین تبدیل رادون و تبدیل فوریه استوار است.

برای ثابت، $\gamma \in S^{d-1}$ فرض می‌کنیم $\hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda,\gamma)$ تبدیل فوریه $R(f)(t,\gamma)$ را نسبت به متغیر t به‌صورت زیر مشخص می‌کند،

$$\hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(f)(t,\gamma)e^{-2\pi i\lambda t}dt.$$

به‌خصوص، $\lambda \in \mathbb{R}$ را به‌عنوان متغیر دوگان t استفاده می‌کنیم.

همچنین برای تبدیل فوریهٔ f به‌عنوان تابعی روی $\mathbb{R}^d$، نماد $\hat{f}$ را به کار می‌بریم. به‌عبارت دیگر

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

لم ۳۶.۷. اگر f تابعی پیوسته با محمل فشرده باشد، آنگاه به‌ازای هر $\gamma \in S^{d-1}$ داریم

$$\hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda,\gamma) = \hat{f}(\lambda\gamma),$$

سمت راست تبدیل فوریه‌ای f است که در نقطه $\lambda\gamma$ محاسبه شده است.

برهان. برای هر بردار یکه γ، سیستم مختصاتی منطبق که قبلا توصیف شد، را به کار می‌بریم: $x = (x_1, ..., x_d)$ که در آن γ با راستای

x_d سازگار است. پس می‌توانیم هر $x \in \mathbb{R}^d$ را به‌صورت $x = (u, t)$ با $u \in \mathbb{R}^{d-۱}$، $t \in \mathbb{R}$ بنویسیم که در آن $x \cdot \gamma = x_d$ و $u = (x_۱, ..., x_{d-۱})$ به‌علاوه

$$\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f = \int_{\mathbb{R}^{d-۱}} f(u, t)du,$$

و قضیه فوبینی نشان می‌دهد که $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f)dt$. با به کاربردن این مطلب برای $f(x)e^{-۲\pi i x(\lambda\gamma)}$ به جای $f(x)$ داریم

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda\gamma) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-۲\pi i x(\lambda\gamma)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-۱}} f(u,t)dt\right) e^{-۲\pi i\lambda t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f\right) e^{-۲\pi i\lambda t}dt,\end{aligned}$$

بنابراین $\hat{f}(\lambda\gamma) = \hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda, \gamma)$.

□

لم ۳۷.۷. اگر f تابعی پیوسته با محمل فشرده باشد آنگاه

$$\int_{S^{d-۱}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda,\gamma)|^۲ |\lambda|^{d-۱} d\lambda\right) d\sigma(\gamma) = ۲\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^۲ dx.$$

باید توجه کنیم که هرچه بعد d بزرگ‌تر باشد، ضریب $|\lambda|^{d-۱}$ وقتی $|\lambda|$ به بی‌نهایت میل می‌کند نیز بزرگ‌تر است. بنابراین هرچه بعد بزرگ‌تر باشد، کوچک شدن تبدیل فوریه‌ي $\hat{\mathcal{R}}(f)(\lambda, \gamma)$ بهتر صورت می‌گیرد و در نتیجه منظم بودن تبدیل رادون $R(f)(t, \gamma)$ به‌عنوان یک تابع از t بهتر خواهد بود.

برهان. فرمول پلانشرل فصل ۵ تضمین می‌کند

$$۲\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^۲dx = ۲\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^۲d\xi,$$

با تغییر به مختصات قطبی $\xi = \lambda\gamma$، که در آن $\lambda > ۰$ و $\gamma \in S^{d-۱}$ به‌دست می‌آوریم

$$۲\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^۲d\xi = ۲\int_{S^{d-۱}}\int_۰^\infty|\hat{f}(\lambda\gamma)|^۲\lambda^{d-۱}d\lambda d\sigma(\gamma).$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم یک تغییر متغیر ساده نتیجه می‌دهد:

$$\int_{S^{d-۱}}\int_۰^\infty|\hat{f}(\lambda\gamma)|^۲\lambda^{d-۱}d\lambda d\sigma(\gamma) = \int_{S^{d-۱}}\int_{-\infty}^۰|\hat{f}(\lambda\gamma)|^۲|\lambda|^{d-۱}d\lambda d\sigma(\gamma).$$

و هنگامی که نتیجه لم ۳۶.۷ را به کار ببریم.

□

محتوای پایانی برهان قضیه ۳۴.۷ شامل موارد زیر می‌شود:

لم ۳۸.۷. فرض کنید

$$F(t) = \int_{-\infty}^\infty\hat{F}(\lambda)e^{۲\pi i\lambda t}d\lambda,$$

که در آن

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|\hat{F}(\lambda)| \le A \qquad \text{و} \qquad \int_{-\infty}^\infty|\hat{F}(\lambda)|^۲|\lambda|^{d-۱}d\lambda \le B^۲.$$

در این‌صورت

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t)| \leq c(A+B). \tag{۴.۷}$$

به‌علاوه، اگر $0 < \alpha < 1/2$، آنگاه به‌ازای هر t_1, t_2،

$$|F(t_1) - F(t_2)| \leq c_\alpha |t_1 - t_2|^\alpha (A+B), \tag{۵.۷}$$

برهان. نامساوی اول با مجزا در نظر گرفتن دو حالت $|\lambda| \leq 1$، $|\lambda| > 1$ به‌دست می‌آید.

می‌نویسیم

$$F(t) = \int_{|\lambda|\leq 1} \hat{F}(\lambda) e^{2\pi i\lambda t} d\lambda + \int_{|\lambda|>1} \hat{F}(\lambda) e^{2\pi i \lambda t} d\lambda.$$

به‌وضوح، انتگرال اول، با cA کراندار می‌شود. برای تقریب زدن انتگرال دوم کافی است، $\int_{|\lambda|>1} |\hat{F}(\lambda)| d\lambda$ را کراندار کنیم. کاربردی از نامساوی کشی-شوارتس نتیجه می‌دهد

$$\int_{|\lambda>1|} |\hat{F}(\lambda)| d\lambda \leq \left(\int_{|\lambda|>1} |\hat{F}(\lambda)|^2 |\lambda|^{d-1} d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{|\lambda|>1} |\lambda|^{-d+1} d\lambda \right)^{1/2}.$$

انتگرال آخر دقیقا زمانی که $-d+1 < -1$ همگراست که با $d > 2$ و یا به عبارت دیگر $d \geq 3$ معادل است که ما آن را فرض می‌کنیم. بنابراین $|F(t)| \leq c(A+B)$ برقرار است.

برای اثبات پیوستگی لیپ شیتس ابتدا توجه می‌کنیم

$$F(t_۱) - F(t_۲) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\lambda)[e^{۲\pi i\lambda t_۱} - e^{۲\pi i\lambda t_۲}]d\lambda.$$

از آنجایی که نامساوی $|e^{ix} - ۱| \leq |x|$ برقرار است [۱]، بلافاصله ملاحظه می‌کنیم اگر $۰ \leq \alpha < ۱$،

$$|e^{۲\pi i\lambda t_۱} - e^{۲\pi i\lambda t_۲}| \leq c|t_۱ - t_۲|^\alpha \lambda^\alpha.$$

حال می‌توانیم تفاضل $F(t_۱) - F(t_۲)$ را به‌صورت مجموع دو انتگرال بنویسیم. انتگرال روی $|\lambda| \leq ۱$ به‌وضوح به وسیله $cA|t_۱ - t_۲|^\alpha$ کراندار می‌شود. انتگرال دوم، که روی $|\lambda| > ۱$ است، از بالا به‌وسیلهٔ

$$|t_۱ - t_۲|^\alpha \int_{|\lambda|>۱} |\hat{F}(\lambda)||\lambda|^\alpha d\lambda,$$

تقریب زده می‌شود.

یک کاربرد نامساوی کشی-شوارتس نشان می‌دهد انتگرال پایانی با

$$\left(\int_{|\lambda|>۱} |\hat{F}(\lambda)|^۲|\lambda|^{d-۱}d\lambda\right)^{۱/۲}\left(\int_{|\lambda|>۱} |\lambda|^{-d+۱+۲\alpha}d\lambda\right)^{۱/۲} \leq c_\alpha B,$$

۱. فاصله نقطه e^{ix} تا نقطه ۱ در صفحه، کوتاهتر از طول قوس بین آن‌ها روی دایره یکه است.

کنترل می‌شود، زیرا اگر $-d+۱+۲\alpha < -۱$، انتگرال دوم متناهی است و به خصوص اگر $\alpha < ۱/۲$ و $d \geq ۳$ باشد. $\square$

اکنون این نتایج را برای اثبات قضیه گرد آوری می‌کنیم. به‌ازای هر

$$\gamma \in S^{d-۱}$$

، فرض کنید

$$F(t) = \mathcal{R}(f)(t, \gamma).$$

توجه کنید طبق این تعریف داریم

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t)| = \mathcal{R}^*(f)(\gamma).$$

فرض کنید

$$B^۲(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\lambda)|^۲ |\lambda|^{d-۱} d\lambda \quad \text{و} \quad A(\gamma) = \sup_{\lambda} |\hat{f}(\lambda)|,$$

در این‌صورت با توجه به ۴.۷

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F(t)| \leq c(A(\gamma) + B(\gamma)).$$

در این حالت، ملاحظه می‌کنیم $\hat{F}(\lambda) = \hat{f}(\lambda\gamma)$ و بنابراین

$$A(\gamma) \leq \|f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)}.$$

لذا

$$|\mathcal{R}^*(f)(\gamma)|^۲ \leq c(A(\gamma)^۲ + B(\gamma)^۲),$$

و بنابراین

$$\int_{S^{d-۱}} |\mathcal{R}^*(f)(\gamma)|^۲ d\sigma(\gamma) \leq c\Big(\|f\|^۲_{L^۱(\mathbb{R}^d)} + \|f\|^۲_{L^۲(\mathbb{R}^d)}\Big),$$

زیرا طبق لم ۳۷.۷، $\int B^۲(\gamma)d\sigma(\gamma) = ۲\|f\|^۲_{L^۲}$. در نتیجه

$$\int_{S^{d-۱}} \mathcal{R}^*(f)(\gamma)d\sigma(\gamma) \leq c\Big(\|f\|_{L^۱(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^۲(\mathbb{R}^d)}\Big).$$

توجه کنید اتحادی که به کار برده‌ایم،

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\lambda)e^{۲\pi i\lambda t}d\lambda,$$

با $F(t) = \mathcal{R}(f)(t,\gamma)$، برای تقریبا هر $\gamma \in S^{d-۱}$، با نتیجه تبدیل فوریه معکوس در قضیه ۲۹.۲ از فصل ۲ توجیه می‌شود. در واقع، مشاهده می‌کنیم به‌ازای تقریبا هر γ، $A(\gamma)$ و $B(\gamma)$ متناهی هستند و بنابراین $\hat{F}$ به‌ازای چنین γ هایی انتگرالپذیر است. این برهان قضیه را تکمیل می‌کند. اگر ۵.۷ را به جای ۴.۷ به کار ببریم نتیجه به شکل مشابهی به‌دست می‌آید.

اکنون به موقعیت صفحه قبل برمی‌گردیم تا مشاهده کنیم چه اطلاعاتی از تحلیل فوق به‌دست می‌آید. زمانی که $d = ۲$، نامساوی

۲.۷ برقرار نیست، با وجود این یک اصلاحیه از آن برقرار است و در برهان قضیه ۳۳.۷ به کار می‌رود.

اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\delta(f)(t,\gamma) &= \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta}^{t+\delta}\mathcal{R}(f)(s,\gamma)ds\\ &= \frac{1}{2\delta}\int_{t-\delta\le x\cdot\gamma\le t+\gamma} f(x)dx.\end{aligned}$$

در تعریف $\mathcal{R}_\delta(f)(t,\gamma)$ از تابع f در یک نوار با پهنای 2δ در پیرامون صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ انتگرال می‌گیریم. بنابراین $\mathcal{R}_d$ میانگین تبدیلات رادون است.

قرار می‌دهیم

$$\mathcal{R}_\delta^*(f)(\gamma) = \sup_{t\in\mathbb{R}}|\mathcal{R}_\delta(f)(t,\gamma)|.$$

قضیه ۳۹.۷. اگر f تابعی پیوسته با محمل فشرده باشد. آنگاه وقتی که

$0 < \delta \le 1/2$

$$\int_{S^1} R_\delta^*(f)(\gamma)d\sigma(\gamma) \le c(\log 1/\delta)^{1/2}\Big(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big).$$

استدلال مشابه با برهان قضیهٔ ۳۴.۷ در اینجا به کارمی‌رود، بجز این که به یک شکل اصلاح شده‌ی لم ۳۸.۷ نیازمندیم. به‌طور

دقیق‌تر، قرار می‌دهیم

$$F_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\lambda)\left(\frac{e^{2\pi i(t+\delta)\lambda} - e^{2\pi i(t-\delta)\lambda}}{2\pi i\lambda(2\delta)}\right)d\lambda,$$

و فرض کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\lambda)|^2|\lambda|d\lambda \leq B \quad \text{و} \quad \sup_\lambda |\hat{F}(\lambda)| \leq A.$$

سپس ادعا می‌کنیم

$$\sup_t |F_\delta(t)| \leq c(\log 1/\delta)^{1/2}(A+B), \tag{۶.۷}$$

در واقع از این قانون استفاده می‌کنیم که $|(\sin x)/x| \leq 1$، تا ملاحظه کنیم که در تعریف $F_\delta(t)$ انتگرال روی $|\lambda| \leq 1$، cA را به‌دست می‌دهد. همچنین، انتگرال روی $|\lambda| > 1$ می‌تواند بشکند و با مجموع زیر کراندار شود

$$\int_{1<|\lambda|\leq 1/\delta} |\hat{F}(\lambda)|d\lambda + \frac{c}{d}\int_{1/\delta\leq|\lambda|} |\hat{F}(\lambda)||\lambda|^{-1}d\lambda.$$

انتگرال اول در بالا، می‌تواند به وسیلهٔ نامساوی کشی-شوارتس به‌صورت زیر تقریب زده شود

$$\int_{1<|\lambda|\leq 1/\delta} |\hat{F}(\lambda)|d\lambda \leq c\left(\int_{1<|\lambda|\leq 1/\delta} |\hat{F}(\lambda)|^2|\lambda|d\lambda\right)^{1/2}\left(\int_{1<|\lambda|\leq 1/\delta} |\lambda|^{-1}d\lambda\right)^{1/2}$$

$$\leq cB(\log ۱/\delta)^{۱/۲}.$$

در نهایت توجه می‌کنیم

$$\frac{c}{\delta}\int_{۱/\delta\leq|\lambda|}|\hat{F}(\lambda)||\lambda|^{-۱}d\lambda \leq c\left(\int_{۱/\delta\leq|\lambda|}|\hat{F}(\lambda)|^{۲}|\lambda|d\lambda\right)^{۱/۲}\frac{۱}{\delta}\left(\int_{۱/\delta\leq|\lambda|}|\lambda|^{-۳}d\lambda\right)^{۱/۲}$$
$$\leq cB,$$

و این ۶.۷ و بنابراین قضیه را ثابت می‌کند.

نظم مجموعه‌ها برای $\mathbf{d} \geq ۳$

اکنون تقریب‌های اولیه را برای تبدیل رادون که برای توابع پیوسته‌ی با محمل فشرده ثابت شد، به حالت کلی تعمیم می‌دهیم. این کار به مفهوم منظم بودن منجر خواهد شد که در قضیه ۴۰.۷ فرمول‌بندی شد.

قضیه ۴۰.۷. فرض کنید $d \geq ۳$ و فرض کنید f متعلق به $L^{۲}(\mathbb{R}^d)\bigcap L^{۱}(\mathbb{R}^d)$ باشد. در این‌صورت تقریبا به‌ازای هر $\gamma \in S^{d-۱}$ گزاره‌های زیر را داریم:

۱. به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}$، تابع f روی صفحه $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ انتگرالپذیر است.

۲. تابع $\mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ در t پیوسته است و در شرط لیپ شیتس با توان

α به‌ازای هر $\alpha < ۱/۲$ صدق می‌کند. به‌علاوه نامساوی ۲.۷ از قضیه ۳۴.۷ و تغییرات آن در ۳.۷ برای f برقرار می‌شود.

این گزاره را طی چند مرحله اثبات می‌کنیم.
مرحله ۱: $f = \chi_{\mathcal{O}}$ را در نظر می‌گیریم که تابع مشخصه‌ای از یک مجموعه بازکراندار $\mathcal{O}$ است. در اینجا (۱) واضح است، زیرا $\mathcal{O} \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma}$ مجموعه باز و کرانداری در $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ و کراندار است. بنابراین به‌ازای هر (t,γ)، $\mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ تعریف می‌شود.

سپس می‌توانیم دنباله $\{f_n\}$ از توابع پیوسته نامنفی با محمل فشرده را پیدا کنیم، به‌طوری‌که به‌ازای هر x وقتی که $n \to \infty$، $f_n(x)$ به $f(x)$ صعود می‌کند. بنابراین به‌ازای هر (t,γ) طبق قضیه همگرایی یکنوا $\mathcal{R}(f_n)(t,\gamma) \to \mathcal{R}(f)(t,\gamma)$ و همچنین به‌ازای هر $\gamma \in S^{d-۱}$، $\mathcal{R}^*(f_n)(\gamma) \to \mathcal{R}^*(f)(\gamma)$. در نتیجه مشاهده می‌کنیم نامساوی ۲.۷ برای $f = \chi_{\mathcal{O}}$ با $\mathcal{O}$ باز و کراندار برقرار است.

مرحله ۲: اکنون $f = \chi_E$ را در نظر می‌گیریم، که در آن E مجموعه‌ای با اندازه صفر است و حالت اول زمانی است که E کراندار باشد. حال می‌توانیم دنباله‌ای نزولی $\{\mathcal{O}_n\}$ از مجموعه‌ای باز و کراندار رابیابیم، به‌طوری‌که $E \subset \mathcal{O}_n$ و وقتی که $n \to \infty$، $m(\mathcal{O}_n) \to ۰$.

فرض کنید $\widetilde{E} = \bigcap \mathcal{O}_n$. از آنجایی که $E \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma}$ به‌ازای هر (t,γ) اندازه‌پذیر است، توابع $R(\chi_{\widetilde{E}})(t,\gamma)$ و $\mathcal{R}^*(\chi_{\widetilde{E}})(\gamma)$ خوش تعریف هستند.

با این وجود، در حالی‌که $\mathcal{R}^*(\chi_{\mathcal{O}_n})$ نزول می‌کند، $\mathcal{R}^*(\chi_E)(\gamma) \leq R^*(\chi_{\mathcal{O}_n})(\gamma)$. بنابراین نامساوی ۲.۷ برای $f = \chi_{\mathcal{O}_n}$ که به تازگی اثبات شد، نشان می‌دهد که تقریبا به‌ازای هر γ، $R^*(\chi_{\widetilde{E}})(\gamma) = ۰$. حال این حقیقت که $E \subset \widetilde{E}$، نتیجه می‌دهد که تقریبا به برای هر γ، مجموعهٔ $E \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma}$ برای هر $t \in \mathbb{R}$، اندازه صفر $(d-۱)$–بعدی دارد. این نتیجه بلافاصله با نوشتن E به‌عنوان یک اجتماع شمارا از مجموعه‌های کراندار با اندازه صفر، به حالتی که E لزوما کراندار نیست، توسیع می‌یابد. بنابراین نتیجه ۳۱.۷ اثبات می‌شود.

مرحله ۳: در اینجا فرض می‌کنیم f تابعی اندازه‌پذیر کراندار با محملی روی یک مجموعه کراندار باشد. آنگاه از طریق مباحث آشنا می‌توانیم دنباله $\{f_n\}$ از توابع پیوسته را بیابیم که به‌طور یکنواخت کراندار و دارای محمل فشرده ثابت باشند. و بنابراین تقریبا همه جا، $f_n(x) \to f(x)$. طبق قضیه همگرایی یکنوا، وقتی که $n \to \infty$، هر دو، $\|f_n - f\|_{L^۱}$ و $\|f_n - f\|_{L^۲}$ به صفر میل می‌کنند و در صورت لزوم با انتخاب زیر دنباله‌ها، می‌توانیم فرض کنیم،

$$\|f_n - f\|_{L^۱} + \|f_n - f\|_{L^۲} \leq ۲^{-n}.$$

با توجه به آنچه به تازگی در مرحله ۲ اثبات کردیم، به‌ازای تقریبا هر $\gamma \in S^{d-۱}$ نسبت به اندازه $m_{d-۱}$، به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تقریبا همه جا روی $\mathcal{P}_{t,\gamma}$ داریم $f_n(x) \to f(x)$. بنابراین دوباره طبق قضیه همگرایی کراندار

برای چنین (t,γ) هایی مشاهده می‌کنیم $\mathcal{R}(f_n)(t,\gamma) \to \mathcal{R}(f_n)(t,\gamma)$ و این حد، $\mathcal{R}(f)$ را تعریف می‌کند. اکنون با استفاده از قضیه ۳۴.۷ داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \int_{S^{d-۱}} \mathcal{R}^*(f_n - f_{n-۱})(\gamma) d\sigma(\gamma) \leq c \sum_{n=۱}^{\infty} ۲^{-n} < \infty.$$

و این به این معنی است که تقریبا به‌ازای هر $\gamma \in S^{d-۱}$،

$$\sum_n \sup_t |\mathcal{R}(f_n)(t,\gamma) - \mathcal{R}(f_{n-۱})(t,\gamma)| < \infty,$$

و بنابراین به‌ازای این γها، دنباله توابع $\mathcal{R}(f_n)(t,\gamma)$ به‌طور یکنواخت همگراست. در نتیجه به‌ازای این γها، تابع $R(f)(t,\gamma)$ در t پیوسته است و نامساوی ۲.۷ به‌ازای این f درست است. نامساوی ۳.۶ به روش زیر به‌دست می‌آید.

سرانجام برای حالت کلی f در $L^۱ \bigcap L^۲$ با تقریب آن به‌وسیله دنباله‌ای از توابع کراندار که هر یک با محمل کراندار هستند، سر و کار داریم. جزئیات بحث مشابه با حالتی است که در بالا بررسی شد و به خواننده واگذار می‌شود.

حالت ویژه‌ی $f = \chi_E$ از گزاره، قضیه ۳۰.۷ را به دست می‌دهد.

مجموعه‌های بسیکوویچ دارای بعد ۲ است

در اینجا قضیه ۳۳.۷ را با این مضمون اثبات می‌کنیم که هر مجموعه بسیکوویچ لزوما بعد هاسدورف ۲ دارد.

قضیه ۳۹.۷ را به کار می‌بریم، و نامساوی زیر را داریم،

$$\int_{S^{1}} \mathcal{R}_\delta^*(f)(\gamma)d\sigma(\gamma) \leq c(\log 1/\delta)^{1/2}\Big(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\Big).$$

این نامساوی تحت این فرض که f پیوسته است و محمل فشرده دارد ثابت شد. این حکم در موقعیت فعلی بدون هیچ مشکلی، به حالت کلی $f \in L^1 \bigcap L^2$ با یک حدگیری ساده گسترش می‌یابد، زیرا واضح است که اگر در نرم L^1، $f_n \to f$ آنگاه به‌ازای هر γ، $\mathcal{R}_\delta^*(f_n)(\gamma)$ به $\mathcal{R}_\delta^*(f)(\gamma)$ همگراست. اکنون فرض کنید F مجموعه‌ای بسیکوویچ و $0 < \alpha < 2$ ثابت باشد.

فرض کنید $F \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ یک پوشش باشد که در آن B_i ها گوی‌هایی با قطری کمتر از یک عدد داده شده باشند. باید نشان دهیم که

$$\sum_i (diam B_i)^\alpha \geq c_\alpha > 0.$$

طی دو مرحله ادامه می‌دهیم، ابتدا شرط ساده‌ای درنظر می‌گیریم که ایده برهان را روشن می سازد.

حالت ۱: ابتدا فرض می‌کنیم همه‌ی گوی‌های B_i، قطر δ ($\delta \leq ۱/۲$) داشته باشند و همچنین فرض می‌کنیم که تنها تعداد متناهی، مثلا N تا گوی در پوشش وجود دارند. باید ثابت کنیم $N\delta^\alpha \geq c_\alpha$.
فرض کنید B_i^* دو برابر B_i را مشخص کند و $F^* = \bigcup_i B_i^*$، در این‌صورت به وضوح داریم

$$m(F^*) \leq cN\delta^۲.$$

از آنجایی که F به‌ازای هر $\gamma \in S^۱$، یک مجموعه بسیکوویچ است، پاره‌خط s_γ با طول یکه، عمود بر γ موجود و مشمول در F است. همچنین از نحوه ساختن، هر انتقال کمتر از δ از یک نقطه در s_γ باید متعلق به F^* باشد. بنابراین به‌ازای هر γ،

$$\mathcal{R}_\delta^*(\chi_{F^*})(\gamma) \geq ۱.$$

اگر در نامساوی ۶.۷ قرار دهیم $f = \chi_{F^*}$، و توجه کنیم که نامساوی کشی-شوارتس نتیجه می‌دهد

$$\|\chi_{F^*}\|_{L^۱(\mathbb{R}^۲)} \leq c\|\chi_{F^*}\|_{L^۲(\mathbb{R}^۲)} \leq c(m(F^*))^{۱/۲},$$

آنگاه به‌دست می‌آوریم

$$c \leq N^{۱/۲}\delta(\log ۱/\delta)^{۱/۲}.$$

این رابطه برای $\alpha < ۲$، به‌دست می‌دهد $N\delta^\alpha \geq c$.

حالت ۲. اکنون حالت کلی را بررسی می کنیم. فرض کنید $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ که در آن گوی‌های B_i، هر یک قطری کمتر از ۱ دارند. فرض کنید به‌ازای هر عدد صحیح k، N_k تعداد گوی‌ها درگردایه $\{B_i\}$ باشد که برای آن‌ها

$$2^{-k-1} \leq diam B_i \leq 2^{-k}.$$

باید نشان دهیم $\sum_{k=0}^{\infty} N_k 2^{-k\alpha} \geq c_\alpha$. در حقیقت باید این نتیجهٔ قوی‌تر را به اثبات برسانیم که یک عدد صحیح مثبت k' موجود است، به‌طوری‌که

$$N_{k'} 2^{-k'\alpha} \geq c_\alpha$$

. فرض کنید

$$F_k = F \bigcap \left(\bigcup_{2^{-k-1} \leq diam B_i \leq 2^{-k}} B_i \right),$$

و فرض کنید

$$F_k^* = \bigcup_{2^{-k-1} \leq diam B_i \leq 2^{-k}} B_i^*$$

که در آن B_i^* دوبرابر B_i را مشخص می‌کند. سپس به‌ازای هر k می‌نویسیم

$$m_1(F_k^*) \leq c N_k 2^{-2k}.$$

از آنجایی که F به‌ازای هر $\gamma \in S^1$ مجموعه‌ای بسیکوویچ است، پاره‌خط s_γ با طول یکه مشمول در F موجود است. اکنون این حقیقت را به‌طور دقیق‌تر بیان می‌کنیم که برای یک k، قسمت زیادی از δ_γ متعلق به F_k است.

دنباله‌ای از اعداد حقیقی $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 \leq a_k \leq 1$، $\sum a_k = 1$ اما a_k خیلی به سرعت به صفر میل نمی‌کند. به‌عنوان مثال، می‌توانیم به‌صورت $a_k = c_\epsilon 2^{-\epsilon k}$ و $c_\epsilon = 1 - 2^{-\epsilon}$، $\epsilon > 0$، ولی ϵ به اندازه کافی کوچک، انتخاب کنیم.

در این‌صورت برای یک k باید داشته باشیم

$$m_1(s_\gamma \bigcap F_k) \geq a_k.$$

در غیر این صورت، از آنجایی که $F = \bigcup F_k$ داریم

$$m_1(s_\gamma \bigcap F_k) < \sum a_k = 1,$$

و این با این حقیقت که $m_1(s_\gamma \bigcap F) = 1$ در تناقض است، چون s_γ به‌طور کامل مشمول در F است.

بنابراین با این k، باید داشته باشیم

$$\mathcal{R}^*_{2^{-k}}(\chi_{F_k^*})(\gamma) \geq a_k,$$

زیرا هر نقطه با فاصله کمتر از 2^{-k} از F_k باید به F_k^* متعلق باشد. از آنجایی که انتخاب k ممکن است به γ بستگی داشته باشد، قرار

می‌دهیم
$$E_k = \{\gamma : \mathcal{R}^*_{۲^{-k}}(\chi_{F_k^*})(\gamma) \geq a_k\}.$$
با توجه به ملاحظات پیشین داریم
$$S^۱ = \bigcup_{k=۱}^{\infty} E_k,$$
و بنابراین به‌ازای حداقل یک k که با k' مشخص می‌شود، داریم
$$m(E_{k'}) \geq ۲\pi a_{k'},$$
در غیر این‌صورت $m(S_۱) < ۲\pi \sum a_k = ۲\pi$. در نتیجه
$$\begin{aligned} ۲\pi a_{k'}^۲ &= ۲\pi a_{k'} a_{k'} \\ &\leq \int_{E_{k'}} a_{k'} d\sigma(\gamma) \\ &\leq \int_{S^۱} \mathcal{R}^*_{۲^{-k'}}\Big(\chi_{F_{k'}^*}\Big)(\gamma) d\sigma(\gamma). \end{aligned}$$
با استفاده از نامساوی اساسی ۶.۷ به این نتیجه می‌رسیم که
$$a_{k'}^۲ \leq c(\log ۲^{k'})^{۱/۲} \|\chi_{F_{k'}^*}\|_{L^۲(\mathbb{R}^۲)}.$$
با به یاد داشتن اینکه طبق انتخاب ما $a_k \approx ۲^{-\epsilon k}$ و توجه به این که $\|\chi_{F_{k'}^*}\|_{L^۲} \leq cN_{k'}^{۱/۲} ۲^{-k'}$ به‌دست می‌آوریم:
$$۲^{(۱-۲\epsilon)k'} \leq c(\log ۲^{k'})^{۱/۲} N_{k'}^{۱/۲}.$$

سرانجام نامساوی پایانی تضمین می‌کند، وقتی که $\alpha - ۲ < ۴\epsilon$، $N_{k'}۲^{-\alpha k'} \geq c_\alpha$.

ساختار مجموعه بسیکوویچ

ساختارهای متفاوتی از مجموعه‌های بسیکوویچ موجود هستند. ساختاری که در اینجا برای توصیف انتخاب کرده‌ایم، مفهوم مجموعه‌های خود تکرار را در بر می‌گیرد و ایده‌ای است که در سراسر مباحث این فصل وجود دارد.

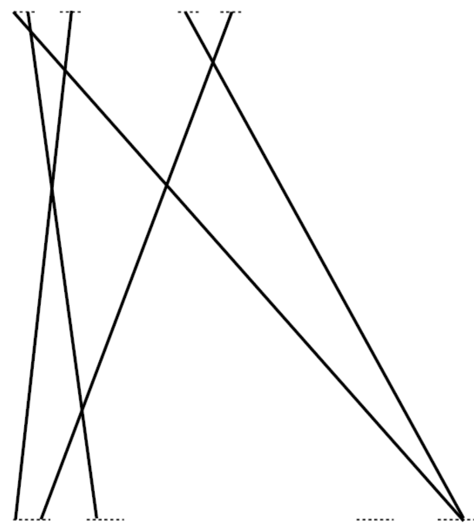
مجموعهٔ کانتور با حذف ثابت $\mathcal{C}_{۱/۲}$ را درنظر می‌گیریم که به‌طور ساده، آن را به‌صورت $\mathcal{C}$ می‌نویسیم و در تمرین ۳ فصل ۱ تعریف می‌شود. توجه کنید $\mathcal{C} = \bigcap_{k=۰}^{\infty} C_k$ که در آن $C_۰ = [۰,۱]$ و C_k اجتماعی از ۲^k بازه بسته به طول ۴^{-k} است که با حذف $۲^{k-۱}$ بازه‌های باز به طول $\frac{۱}{۲}\cdot ۴^{-k+۱}$ از $C_{k-۱}$ به‌دست می‌آید. مجموعهٔ $\mathcal{C}$ همچنین به‌صورت مجموعه‌ای از نقاط $x \in [۰,۱]$ که به‌صورت

$$x = \sum_{k=۱}^{\infty} \epsilon_k / ۴^k$$

که ϵ_k مساوی صفر یا ۳است، نمایش می‌یابد.اکنون یک نسخه از $\mathcal{C}$ را روی محور x در صفحه $\mathbb{R}^۲ = \{(x,y)\}$ و یک نسخه از $\frac{۱}{۲}\mathcal{C}$ را روی خط $y = ۱$ کپی می‌کنیم. به این معنا که، قرار می‌دهیم

$$E_\circ = \{(x,y) : x \in C, y = \circ\} \text{و} E_۱ = \{(x,y) : ۲x \in C, y = ۱\}.$$

مجموعهٔ F که نقش مرکزی را بازی می‌کند به‌صورت اجتماع پاره‌خط‌هایی است که یک نقطه از $E_\circ$ را به یک نقطه از $E_۱$ متصل می‌کند. (تصویر ۱۳.۷ را ببینید.)



شکل ۱۳.۷: چند قطعه خط واصل $E_\circ$ و $E_۱$

قضیه ۴۱.۷. مجموعه F فشرده است و دارای اندازه دو بعدی صفر است. همچنین شامل یک انتقال از هر پاره‌خط یکه می‌شود که شیب آن عدد s است که درخارج از بازه $(-۱,۲)$ قرار می‌گیرد.

به محض اینکه قضیه ثابت شود، کار ما انجام می‌شود. در واقع گردایه متناهی از دوران‌های مجموعه F شامل پاره‌خط‌های یکه با هر شیبی می‌شود و بنابراین یک مجموعهٔ بسیکوویچ است.

برهان. خواص مورد انتظار مجموعهٔ F، وابسته به نشان دادن حقایق متناقض زیر درباره مجموعهٔ $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ به‌ازای $\lambda > ۰$ است. در اینجا

$$\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C} = \{x_۱+\lambda x_۲ : x_۱ \in \mathcal{C}, x_۲ \in \mathcal{C}\}.$$

- $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ به‌ازای تقریبا هر λ، اندازه یک بعدی صفر دارد.
- $\mathcal{C}+\frac{۱}{۲}\mathcal{C}$ بازه $[۰, ۳/۲]$ است.

ملاحظه می‌کنیم که چه طور این دو عبارت قضیه را نتیجه می‌دهند. ابتدا توجه کنید مجموعهٔ F بسته است (و بنابراین کامل است) زیرا هر دو $E_۰$ و $E_۱$ بسته هستند. سپس ملاحظه کنید به‌ازای

$$۰ < y < ۱$$

، برش F^y از مجموعهٔ F، دقیقا $(۱-y)\mathcal{C}+\frac{y}{۲}\mathcal{C}$ است. این مجموعه از مجموعهٔ $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ به‌دست می‌آید که در آن با مقیاس‌بندی با عامل $۱-y$، $\lambda = \frac{۲y}{(۱-y)}$. بنابراین F^y اندازه‌ی صفر دارد، هرگاه $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ نیز اندازه‌ی صفر داشته باشد. به‌علاوه تحت نگاشت $\lambda \mapsto y$ مجموعه‌های

با اندازه صفر در $(\circ, \infty)$ با مجموعه‌هایی با اندازه صفر در $(\circ, ۱)$ متناظر هستند. (برای مشاهده این امر، برای مثال به تمرین ۸ فصل ۱ یا مسأله ۱ فصل ۶ مراجعه کنید.) بنابراین از عبارت اول و قضیه فوبینی ثابت می‌شود که اندازه (دو بعدی) F صفر است.

سرانجام شیب s، پاره‌خطی که نقطه‌ی $(x_\circ, \circ)$ را به نقطه‌ی $(x_۱, ۱)$ وصل می‌کند، برابر با $s = ۱/(x_۱ - x_\circ)$ است. بنابراین اگر $x_۱ \in \mathcal{C}/۲$ و $x_\circ \in \mathcal{C}$، یعنی اگر $۱/s \in \mathcal{C}/۲ - \mathcal{C}$ آنگاه مقدار s مشخص می‌شود. با این وجود با استفاده از یک تقارن مشهود داریم $\mathcal{C} = ۱ - \mathcal{C}$ و بنابراین شرط بدین صورت می‌شود که $۱/s \in \mathcal{C}/۲ + \mathcal{C} - ۱$، که با توجه به عبارت دوم داریم $۱/s \in [-۱, ۱/۲]$. این گزاره آخر با این که $s \notin (-۱, ۲)$ معادل است.

بنابراین تنها کار باقی مانده اثبات دو عبارت بالا است. برهان عبارت دوم تقریبا بدیهی است و در واقع

$$\frac{۲}{۳}(\mathcal{C} + \frac{۱}{۲}\mathcal{C}) = \frac{۲}{۳}\mathcal{C} + \frac{۱}{۳}\mathcal{C},$$

و این مجموعه شامل همه x هایی به فرم $x = \sum_{k=۱}^{\infty}(\frac{۲\epsilon_k}{۳} + \frac{\epsilon'_k}{۳})۴^{-k}$ می‌شود که د رآن ϵ_k و ϵ'_k به‌طور مستقل $\circ$ یا ۳ هستند. سپس از آنجایی که $\frac{۲\epsilon_k}{۳} + \frac{\epsilon'_k}{۳}$ می‌تواند مقادیر $\circ$، ۱، ۲ یا ۳ را اختیار کند، داریم $\frac{۲}{۳}(\mathcal{C} + \frac{۱}{۲}\mathcal{C}) = [\circ, ۱]$ و بنابراین $\mathcal{C} + \frac{۱}{۲}\mathcal{C} = [\circ, ۳/۲]$.

برهان اینکه تقریبا به‌ازای هر λ، $\mathbf{m}(\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C})=0$.
به نکته اصلی می‌رسیم: تقریبا به‌ازای هر λ، $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ اندازه صفردارد. این را با بررسی خواص خود تکراری مجموعه‌های $\mathcal{C}$، $\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

می‌دانیم $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ که در آن $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ دو نسخه مشابه از $\mathcal{C}$ هستند که با نسبت تشابه ۱/۴ به‌دست می‌آیند، و با $\mathcal{C}_1=\frac{1}{4}\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}_2=\frac{1}{4}\mathcal{C}+\frac{3}{4}$ داده می‌شوند. بنابراین $\mathcal{C}_1\subset[0,1/4]$ و $\mathcal{C}_2\subset[3/4,1]$. با تکرار ℓ بار این تجزیه از $\mathcal{C}$ به ℓ امین («نسل») می‌رسیم و می‌توانیم بنویسیم

$$\mathcal{C}=\bigcup_{1\le j\le 2^\ell}\mathcal{C}_i^\ell, \tag{۷.۷}$$

و $\mathcal{C}_1^\ell=(1/4)^\ell\mathcal{C}$ و هر $\mathcal{C}_j^\ell$ یک انتقال از $\mathcal{C}_1^\ell$ است.
به روش مشابهی مجموعه

$$\mathcal{K}(\lambda)=\mathcal{C}+\lambda\mathcal{C},$$

را در نظر می‌گیریم و زمانی که هیچ ابهامی ایجاد نمی‌کند گاهی λ را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم $\mathcal{K}(\lambda)=\mathcal{K}$. طبق تعریف فوق داریم

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\bigcup\mathcal{K}_2\bigcup\mathcal{K}_3\bigcup\mathcal{K}_4,$$

که در آن $\mathcal{K}_1=\mathcal{C}_1+\lambda\mathcal{C}_1$، $\mathcal{K}_2=\mathcal{C}_1+\lambda\mathcal{C}_2$، $\mathcal{K}_3=\mathcal{C}_2+\lambda\mathcal{C}_1$، و $\mathcal{K}_4=\mathcal{C}_2+\lambda\mathcal{C}_2$.

تکرار این تجزیه و به کار بردن ۷.۷ نتیجه می‌دهد

$$\mathcal{K} = \bigcup_{1 \le i \le ۴^{\ell}} \mathcal{K}_i^{\ell}, \tag{۸.۷}$$

که در آن هر $\mathcal{K}_i^{\ell}$ به‌ازای یک جفت از اندیس‌های $j_۱, j_۲$، با $\mathcal{C}_{j_۱}^{\ell} + \lambda \mathcal{C}_{j_۲}^{\ell}$ مساوی است. در حقیقت این رابطه در میان اندیس‌ها یک دوسویی بین $۱ \le i \le ۴^{\ell}$ و زوج $j_۱, j_۲$ با $۱ \le j_۱ \le ۲^{\ell}$ و $۱ \le j_۲ \le ۲^{\ell}$ ایجاد می‌کند. توجه کنید هر $\mathcal{K}_i^{\ell}$ یک انتقال از $\mathcal{K}_۱^{\ell}$ است و هر $\mathcal{K}_۱^{\ell}$ نیز از طریق یک تشابه از قدرنسبت $۴^{-\ell}$ از $\mathcal{K}$ به وجود می‌آید. اکنون توجه کنید $\mathcal{C} = \mathcal{C}/۴ \bigcup (\mathcal{C}/۴ + ۳/۴)$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\lambda) = \mathcal{C} + \lambda \mathcal{C} &= (\mathcal{C} + \frac{\lambda}{۴}\mathcal{C}) \bigcup (\mathcal{C} + \frac{\lambda}{۴}\mathcal{C} + \frac{۳}{۴}\lambda) \\ &= \mathcal{K}(\lambda/۴) \bigcup (\mathcal{K}(\lambda/۴) + \frac{۳\lambda}{۴}). \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{K}(\lambda)$ اندازه صفر دارد اگر وفقط اگر $\mathcal{K}(\lambda/۴)$ اندازه صفر داشته باشد. بنابراین کافی است ثابت کنیم $\mathcal{K}(\lambda)$ تقریبا به‌ازای هر $\lambda \in [۱, ۴]$ اندازه صفر دارد.

بعد از این مقدمات ، ملاحظه می‌کنیم که بلافاصله برای بعضی λ های خاص، λ هایی که برای یک l و یک زوج i, i' با $i \neq i'$ تساوی

$$\mathcal{K}_i^{l}(\lambda) = \mathcal{K}_{i'}^{\ell}(\lambda)$$

برقرار باشد، داریم $m(K(\lambda)) = ۰$. در واقع اگر این انطباق را داشته باشیم آنگاه ۸.۷ نتیجه می‌دهد

$$m(\mathcal{K}(\lambda)) \leq \sum_{i=۱, i\neq i'}^{۴^{\ell}} m(\mathcal{K}_i^{\ell}(\lambda)) = (۴^{l} - ۱)۴^{-\ell} m(\mathcal{K}(\lambda)),$$

و این یعنی $m(\mathcal{K}(\lambda)) = ۰$. □

ادراک اساسی در زیر این است که، به یک مفهوم کمّی، λ هایی که تساوی برای آن‌ها اتفاق می‌افتد بسته به مقدار ℓ «چگال» هستند. به‌طور دقیق‌تر در زیر داریم.

گزاره ۴۲.۷. فرض کنید $\lambda_۰$ و ℓ داده شده‌اند و $۱ \leq \lambda_۰ \leq ۴$، و ℓ یک عدد صحیح مثبت است. آنگاه $\bar{\lambda}$ و یک زوج i و i' با $i \neq i'$ موجود است، به‌طوری‌که

$$|\bar{\lambda} - \lambda_۰| \leq c۴^{-\ell} \quad \text{و} \quad \mathcal{K}_i^{\ell}(\bar{\lambda}) = \mathcal{K}_{i'}^{\ell}(\bar{\lambda}). \tag{۹.۷}$$

در اینجا c یک ثابت مستقل از $\lambda_۰$ و ℓ است.

این گزاره براساس ملاحظات زیر ثابت می‌شود.

لم ۴۳.۷. به‌ازای هر $\lambda_۰$، زوج $۱ \leq i_۱, i_۲ \leq ۴$ و $i_۱ \neq i_۲$ موجود است، به‌طوری که $\mathcal{K}_{i_۱}(\lambda_۰)$ و $\mathcal{K}_{i_۲}(\lambda_۰)$ اشتراک دارند.

برهان. در واقع اگر $\mathcal{K}_i$ برای $۱ \leq i \leq ۴$ مجزا باشند، آنگاه برای δ به قدر کافی کوچک، $\mathcal{K}_i^\delta$ ها نیز مجزا هستند. در اینجا از این مفهوم استفاده کرده‌ایم که F^δ مجموعه‌ای از نقاطی با فاصله کمتر از δ از F را مشخص می کند. (لم ۲۰۰۱ فصل ۱ را ببینید.) با این وجود $\mathcal{K}^\delta = \bigcup_{i=۱}^{۴} \mathcal{K}_i^\delta$ و با استفاده از تشابه $m(\mathcal{K}^{۴\delta}) = ۴m(\mathcal{K}_i^\delta)$. بنابراین، به دلیل مجزا بودن $\mathcal{K}_i^\delta$ ها داریم، $m(\mathcal{K}^\delta) = m(\mathcal{K}^{۴\delta})$ که یک تناقض است زیرا $\mathcal{K}^{۴\delta} \setminus \mathcal{K}^\delta$ شامل گوی‌بازی (به شعاع $۳\delta/۲$) می‌شود و بنابراین لم ثابت می‌شود.

اکنون لم را برای $\lambda_\circ$ داده شده به‌کار ببرید و بنویسید $\mathcal{K}_{i_۱} = \mathcal{C}_{\mu_۱} + \lambda_\circ \mathcal{C}_{\nu_۱}$ و $\mathcal{K}_{i_۲} = \mathcal{C}_{\mu_۲} + \lambda_\circ \mathcal{C}_{\nu_۲}$ که در آن μ ها و ν ها ۱ یا ۲ هستند. با این وجود، چون $i_۱ \neq i_۲$ داریم $\mu_۱ \neq \mu_۲$ یا $\nu_۱ \neq \nu_۲$ (یا هر دو). حال برای یک لحظه فرض کنید $\nu_۱ \neq \nu_۲$.

این حقیقت که $\mathcal{K}_{i_۱}(\lambda_\circ)$ و $\mathcal{K}_{i_۲}(\lambda_\circ)$ اشتراک دارند، به این معنی است که یک جفت از اعداد (a,b) و (a',b') با $a \in \mathcal{C}_\mu$، $b \in \mathcal{C}_{\nu_۱}$، $a' \in \mathcal{C}_{\mu_۲}$ و $b' \in \mathcal{C}_{\nu_۲}$ موجود هستند، به‌طوری‌که

$$a + \lambda_\circ b = a' + \lambda_\circ b'. \qquad (۱۰.۷)$$

به این حقیقت توجه کنید، که $\nu_۱ \neq \nu_۲$ به معنی $|b - b'| \geq ۱/۲$ است. حال به k-امین نسل توجه کنید تا از طریق ۷.۷ به این پی ببرید که اندیس‌های $۱ \leq j_۱, j_۲, j_۱', j_۲' \leq ۲^l$ موجود هستند، به‌طوری‌که

$a \in \mathcal{C}^{\ell}_{j_1} \subset \mathcal{C}_{\mu_1}$، $b \in \mathcal{C}^{\ell}_{j_2} \subset \mathcal{C}_{\nu_1}$، $a' \in \mathcal{C}^{\ell}_{j'_1} \subset \mathcal{C}_{\mu_2}$، $b' \in \mathcal{C}^{\ell}_{j'_2} \subset \mathcal{C}_{\nu_2}$. همچنین ملاحظه می‌کنیم که مجموعه‌های فوق انتقال‌هایی از یکدیگر هستند به این معنی که $\mathcal{C}^{l}_{j_1} = \mathcal{C}^{l}_{j'_1} + \tau_1$، $\mathcal{C}^{l}_{j_2} = \mathcal{C}^{l}_{j'_2} + \tau_2$ و $|\tau_k| \leq 1$. بنابراین اگر i و i' به ترتیب با زوج‌های (j_1, j_2) و (j'_1, j'_2) متناظر باشند، باشرط $\tau(\lambda) = \tau_1 + \lambda\tau_2$ داریم

$$\mathcal{K}^{l}_{i}(\lambda) = \mathcal{K}^{l}_{i'}(\lambda) + \tau(\lambda). \tag{۱۱.۷}$$

اکنون فرض کنید (A, B) زوجی متناظر با (a', b') تحت انتقال‌های بالا باشد، به عبارت دیگر

$$B = b' + \tau_2, \quad A = a' + \tau_1. \tag{۱۲.۷}$$

ادعا می‌کنیم $\overline{\lambda}$ موجود است، به‌طوری‌که

$$A + \overline{\lambda}B = a' + \overline{\lambda}b'. \tag{۱۳.۷}$$

در حقیقت طبق، ۱۲.۷ باید B را در $\mathcal{C}^{\ell}_{2} \subset \mathcal{C}_{\nu_1}$ قرار دهیم، در حالی‌که b' در $\mathcal{C}^{\ell}_{j'_2} \subset \mathcal{C}_{\nu_2}$ قرار دارد. بنابراین از آنجایی که $\nu_1 \neq \nu_2$، $|B - b'| \geq 1/2$. بنابراین می‌توانیم ۱۳.۷ را با برقرار دادن $\overline{\lambda} = (A - a')/(b' - B)$، حل کنیم. اکنون این را با ۱۰.۷ مقایسه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\lambda_0 = (a - a')/(b' - B)$. به‌علاوه $|A - a| \leq 4^{-k}$ و $|B - b| \leq 4^{-l}$ چون A و

a هردو در $\mathcal{C}^\ell_{j_1}$ و نیز B و b در $\mathcal{C}^\ell_{j_2}$ قرار دارند. این نامساوی زیر را نتیجه می‌دهد

$$|\bar{\lambda}-\lambda_0| \leq c4^{-l}. \qquad (14.7)$$

همچنین ۱۲.۷ و ۱۳.۷ به‌وضوح نتیجه می‌دهند $\tau(\bar{\lambda}) = \tau_1 + \bar{\lambda}\tau_2 = 0$ و این همراه با ۱۱.۷ برابری را ثابت می‌کند.

بنابراین گزارهٔ ما تحت محدودیت $\nu_1 \neq \nu_2$ که از پیش‌تر می‌دانیم، ثابت می‌شود. وضعیتی که در آن $\mu_1 \neq \mu_2$، از حالت $\nu_1 \neq \nu_2$ به‌دست می‌آید، اگر λ_0 را با λ_0^{-1} جایگزین کنیم. توجه کنید $\mathcal{K}^\ell_i(\lambda_0) = \mathcal{K}^\ell_{i'}(\lambda_0)$ اگر و فقط اگر $\mathcal{C}_{j_1} + \lambda_0\mathcal{C}^\ell_{j_2} = \mathcal{C}^\ell{}_{j'_1} + \lambda_0\mathcal{C}^{\ell\ell}_{j'_2}$ و این معادل است با $\mathcal{C}^\ell{}_{j_2} + \lambda_0^{-1}C^\ell_{j_1} = \mathcal{C}_{j'_2} + \lambda_0^{-1}\mathcal{C}^\ell_{j'_1}$. از آنجایی که $\mathcal{C}^\ell_{j_1} \subset \mathcal{C}_{\mu_1}$ و $\mathcal{C}^\ell_{j'_1} \subset \mathcal{C}_{\mu_2}$ این به ما اجازه می‌دهد خود را به حالت $\mu_1 \neq \mu_2$ تقلیل دهیم. در اینجا این حقیقت که $4 \leq \lambda_0 \leq 1$ نتیجه می‌دهد، $1 \leq \lambda_0^{-1}$ و تضمین می‌کند که ثابت c در ۹.۷ می‌تواند مستقل از λ_0 گرفته شود. □

به‌عنوان نتیجه توجه کنید، موارد زیر در نزدیکی نقاط $\bar{\lambda}$ برقرارند که در آن برابری ۹.۷ اتفاق می‌افتد: اگر $|\lambda - \bar{\lambda}| \leq \epsilon 4^{-l}$، به شرطی که $|\tau(\lambda)| \leq \epsilon 4^{-l}$

$$\mathcal{K}^\ell_i(\lambda) = \mathcal{K}^\ell_{i'}(\lambda) + \tau(\lambda). \qquad (15.7)$$

در حقیقت این رابطه ۱۱.۷ همراه با نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$|\tau(\lambda)| = |\tau(\lambda) - \tau(\overline{\lambda})| \leq |\lambda - \overline{\lambda}|,$$

زیرا $|\tau(\lambda)| = \tau_۱ + \lambda\tau_۲$ و $|\tau_۲| \leq ۱$.
عبارت ۱۵.۷ به فرم دقیق‌تر زیر از خودش منجر می‌شود.

یک مجموعهٔ Λ با اندازه کامل وجود دارد، به‌طوری که هرگاه $\lambda \in \Lambda$ و $\epsilon > ۰$ داده شده باشند، l و یک زوج i و i' وجود دارند،که در ۱۵.۷ صدق می‌کنند. [۱]

در واقع برای $\epsilon > ۰$ ثابت، فرض می‌کنیم Λ_ϵ مجموعه همه λ هایی را مشخص کند که به‌ازای یک l، i و i'، در ۱۵.۷ صدق کنند. به‌ازای هر بازه I با طولی نا بیشتر از ۱، طبق ۹.۷ و ۱۵.۷ داریم

$$m(\Lambda_\epsilon \cap I) \geq \epsilon ۴^{-l} \geq c^{-۱}\epsilon m(I).$$

پس Λ_ϵ^c هیچ نقطه‌ای با چگالی لبگ ندارد، بنابراین Λ_ϵ^c اندازه صفر دارد، و بنابراین Λ_ϵ مجموعه‌ای با اندازه کامل است. (نتیجه ۵.۳فصل ۳ را ببینید.) از آنجایی که $\Lambda = \bigcap_\epsilon \Lambda_\epsilon$ و Λ_ϵ با ϵ، نزول می‌کند، مشاهده می‌کنیم Λ نیز از اندازه کامل است و گزاره ثابت می‌شود.

---

۱. این اصطلاح که Λ «اندازه کامل» دارد به این معنی است که متمم آن از اندازه صفر است.

سرانجام، قضیه اثبات می‌شود هنگامی که نشان دهیم: $\lambda \in \Lambda$، $m(\mathcal{K}(\lambda)) = 0$. برای مشاهده این امر، عکس مطلب را فرض می‌کنیم $m(\mathcal{K}(\lambda)) > 0$. با استفاده‌ی مجدد از بحث چگال بودن، به‌ازای هر $1 > \delta > 0$، باید بازه‌ی باز ناتهی I با خاصیت $m(\mathcal{K}(\lambda)\bigcap I) \geq \delta m(I)$ موجود باشد. حال $1 > \delta > 1/2$ ثابت می‌گیریم و ادامه می‌دهیم. با این δ ثابت، ϵ به‌صورت $\epsilon = m(I)(1-\delta)$ اختیار می‌کنیم و در ادامه به کار می‌بریم. حال l، i و i' را به‌طوری‌که برای آن‌ها ۱۵.۷ برقرار باشد، بیابید. وجود این اندیس‌ها با فرض $\lambda \in \Lambda$، تضمین می‌شود.

سپس دو تشابه (با نسبت 4^{-l}) را در نظر می‌گیریم که $\mathcal{K}(\lambda)$ را به ترتیب به $\mathcal{K}_i^\ell(\lambda)$ و $\mathcal{K}_{i'}^l(\lambda)$ می‌نگارد. این نگاشت بازه‌ی I را به ترتیب با بازه‌های I_i و I_i' متناظر می‌کند، به‌طوری‌که $m(I_i) = m(I_{i'}) = 4^{-\ell}m(I)$. به‌علاوه

$$m(\mathcal{K}_i^\ell \bigcap I_i) \geq \delta m(I_i) \quad \text{و} \quad m(\mathcal{K}_{i'}^\ell \bigcap I_{i'}) \geq \delta m(I_{i'}).$$

همچنین همانند ۱۵.۷، $I_{i'} = I_i + \tau(\lambda)$ و $|\tau(\lambda)| \leq \epsilon 4^{-l}$. این نشان می‌دهد که

$$m(I_i \bigcap I_{i'}) \geq m(I_i) - \tau(\lambda) \geq 4^{-\ell}m(I) - \epsilon 4^{-\ell} \geq \delta m(I_i),$$

زیرا $\epsilon 4^{-l} = (1-\delta)m(I_i)$. بنابراین $m(I_i - I_i \bigcap I_{i'}) \leq (1-\delta)m(I_i)$ و

$$m(\mathcal{K}_i^\ell \bigcap I_i \bigcap I_{i'}) \geq m(\mathcal{K}_i^\ell \bigcap I_i) - m(I_i - I_i \bigcap I_{i'})$$

$$\geq (2\delta - 1)m(I_i)$$
$$> \frac{1}{2}m(I_i) \geq \frac{1}{2}m(I_i \bigcap I_{i'}).$$

بنابراین $m(\mathcal{K}_i^\ell \bigcap I_i \bigcap I_{i'}) > \frac{1}{2}m(I_i \bigcap I_{i'})$ و همین برای i' به جای i نیز برقرار است. بنابراین $m(\mathcal{K}_i^\ell \bigcap K_{i'}^\ell) > 0$ و این با تجزیه ۸.۷ و این حقیقت که به‌ازای هر i، $m(\mathcal{K}_i^\ell) = 4^{-l}m(\mathcal{K})$، متناقض است. بنابراین به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$ به‌دست می‌آوریم $m(\mathcal{K}(\lambda)) = 0$، و اکنون برهان قضیه ۴۱.۷ کامل می‌شود.

۵.۷ تمرین‌ها

۱. نشان دهید اگر $\alpha < d$، اندازه m_α روی $\mathbb{R}^d$، σ–متناهی نیست.

۲. فرض کنید E_1, E_2 دو زیر مجموعه فشرده $\mathbb{R}^d$ باشند. به‌طوری‌که $E_1 \bigcap E_2$ حداکثر شامل یک نقطه شود. مستقیما از تعریف اندازه خارجی نشان دهید که اگر $0 < \alpha \leq d$ و $E = E_1 \bigcup E_2$، آنگاه

$$m_\alpha^*(E) = m_\alpha^*(E_1) + m_\alpha^*(E_2).$$

راهنمایی: فرض کنید $E_1 \bigcap E_2 = \{x\}$ و فرض کنید B_ϵ گوی باز به مرکز x و با قطر ϵ را نشان دهد و قرار دهید $E^\epsilon = E \bigcap B_\epsilon^c$.

نشان دهید که

$$m_\alpha^*(E^\epsilon) \geq \mathcal{H}_\alpha^\epsilon(E) \geq m_\alpha^*(E) - \mu(\epsilon) - \epsilon^\alpha,$$

که در آن $\mu(\epsilon) \to ۰$. بنابراین $m_\alpha^*(E^\epsilon) \to m_\alpha^*(E)$.

۳. ثابت کنید اگر $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ در شرط لیپ شیتس با توان $\gamma > ۱$ صدق کند، آنگاه f ثابت است.

۴. فرض کنید $f : [۰,۱] \to [۰,۱] \times [۰,۱]$ پوشا باشد و در شرط لیپ شیتس

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma,$$

صدق کند. به‌طور مستقیم و بدون به کار بردن لم ۱۰.۷ ثابت کنید $\gamma \leq ۱/۲$.

راهنمایی: $[۰,۱]$ را به N بازه با طول مساوی تقسیم کنید. تصویر هر زیر بازه مشمول در گویی با حجم $O(N^{-۲\gamma})$ است و اجتماع همه این گوی‌ها باید مربع را بپوشاند.

۵. فرض کنید $f(x) = x^k$ روی $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است و فرض کنید E زیرمجموعه‌ای بورل از $\mathbb{R}$ باشد.

الف. نشان دهید اگر به‌ازای یک α، $m_\alpha(E) = ۰$، آنگاه $m_\alpha(f(E)) = ۰$.

ب. ثابت کنید $\dim(E) = \dim f(E)$.

۶. فرض کنید $\{E_K\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های بورل در $\mathbb{R}^d$ باشد. نشان دهید اگر به‌ازای یک α و هر k، داشته باشیم $\dim E_k \leq \alpha$، آنگاه

$$\dim \bigcup_k E_k \leq \alpha.$$

۷. ثابت کنید اندازه $(\log ۲/\log ۳)$ -هاسدورف از مجموعه کانتور دقیقا با ۱ مساوی است.

راهنمایی: فرض کنید یک پوشش از $\mathcal{C}$ با تعداد متناهی بازه بسته $\{I_j\}$ داشته باشیم. آنگاه پوشش $\mathcal{C}$ با بازه‌های $\{I'_\ell\}$ برای یک k، هر یک به طول ۳^{-k}، موجود است، به‌طوری‌که $\sum_j |I_j|^\alpha \geq \sum_\ell |I'_\ell|^\alpha \geq ۱$ که در آن $\alpha = \log ۲/\log ۳$.

۸. نشان دهید که مجموعهٔ کانتور از حذف ثابت، $\mathcal{C}_\xi$، در تمرین ۳ فصل ۱، بعد هاسدورف اکید $\log ۲/\log(۲/۱ - \xi)$ دارد.

۹. مجموعه $\mathcal{C}_{\xi_۱} \times \mathcal{C}_{\xi_۲}$ در $\mathbb{R}^۲$ را به‌صورتی که در تمرین قبل آمده است، در نظر بگیرید. نشان دهید $\mathcal{C}_{\xi_۱} \times \mathcal{C}_{\xi_۲}$ بعد هاسدورف

اکید برابر با،

$$\dim(\mathcal{C}_{\xi_۱})+\dim(\mathcal{C}_{\xi_۲})$$

دارد.

۱۰. یک مجموعه از نوع کانتور (به‌صورت تمرین ۴ فصل ۱) بسازید که اندازه لبگ صفر و بعد هاسدورف ۱ داشته باشد.
راهنمایی: $l_۱,\dots,l_k$ را انتخاب کنید به‌طوری‌که $۱-\sum_{j=۱}^{k}۲^{j-۱}l_j$ وقتی که $k\to\infty$ به کندی به صفر میل کند.

۱۱. فرض کنید $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\mu$ غبار کانتور در $\mathbb{R}^۲$ باشد که به‌صورت حاصلضرب $\mathcal{C}_\xi\times\mathcal{C}_\xi$ با $\mu=(۱-\xi)/۲$ داده می‌شود.

الف. نشان دهید به‌ازای هر عدد حقیقی λ، مجموعه $\mathcal{C}_\xi+\lambda\mathcal{C}_\xi$ با تصویر $\mathcal{D}$ روی خطی در $\mathbb{R}^۲$ با شیب $\lambda=\tan\theta$ مشابه است.

ب. توجه کنید از میان مجموعه‌های کانتور $\mathcal{C}_\xi$، مقدار $\xi=۱/۲$ در ساختار مجموعهٔ بسیکوویچ بخش ۱.۴.۷ ضروری است. در حقیقت، اثبات کنید که اگر $\xi>۱/۲$، آنگاه $\mathcal{C}_\xi+\lambda\mathcal{C}_\xi$ به‌ازای هر λ، اندازه لبگ صفر دارد. همچنین مسأله ۱۰ را در زیر ببینید.
راهنمایی: به‌ازای $\alpha=\dim\mathcal{D}_\mu$، $m_\alpha(C_\xi+\lambda C_\xi)<\infty$.

۱۲. «اندازه» یک بعدی اولیه $\widetilde{m_1}$ را به‌صورت

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \qquad \widetilde{m_1} = \inf \sum_{k=1}^{\infty} diam F_k,$$

تعریف کنید. این با اندازه خارجی یک بعدی m_α^* برای $\alpha = 1$ یکسان است، مگر این‌که هیچ محدودیتی روی اندازه قطرهای F_k قرار نگیرد.

فرض کنید I_1 و I_2 دو پاره‌خط یکه مجزا در $\mathbb{R}^d$ باشند، $d \geq 2$ و $I_1 = I_2 + h$ و $|h| < \epsilon$ در این‌صورت ملاحظه کنید که $\widetilde{m_1}(I_1) = \widetilde{m_1}(I_2) = 1$ ، در حالی که $\widetilde{m_1}(I_1 \bigcup I_2) \leq 1 + \epsilon$. بنابراین زمانی که $\epsilon < 1$،

$$\widetilde{m_1}(I_1 \bigcup I_2) < \widetilde{m_1}(I_1) + \widetilde{m_1}(I_2),$$

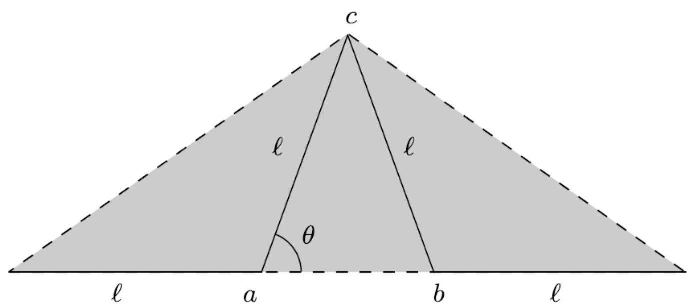
بنابراین $\widetilde{m_1}$ جمعی نیست.

۱۳. خم فون کخ $\mathcal{K}^\ell$، $1/4 < \ell < 1/2$ که در بخش ۱.۲.۷ تعریف شد را در نظر بگیرید. در این مورد صورتی از قضیه ۱۵.۷ را ثابت کنید: تابع $t \mapsto \mathcal{K}^\ell(t)$ در شرط لیپ شیتس از توان

$$\gamma = \log(1/\ell)/\log 4,$$

صدق می‌کند. به‌علاوه، نشان دهید مجموعه $\mathcal{K}^\ell$ از بعد هاسدورف تحدید شده $\alpha = 1/\gamma$ است.

راهنمایی: نشان دهید اگر $\mathcal{O}$ مثلث باز سایه زده شده باشد، که در تصویر ۱۴.۷ مشخص شده است، آنگاه $\mathcal{O} \supset S_۰(\mathcal{O}) \bigcup S_۱(\mathcal{O}) \bigcup S_۲(\mathcal{O}) \bigcup S_۳(\mathcal{O})$ که در آن $S_۰(x) = \ell x$ ، $S_۱(x) = \rho_\theta(\ell x) + a$ ، $S_۲(x) = \rho_\theta^{-۱}(\ell x) + a$ ، $S_۳(x) = \ell x + b$ و ρ_θ دوران به اندازه زاویه θ است. توجه کنید که مجموعه‌های $S_j(\mathcal{O})$ مجزا هستند.



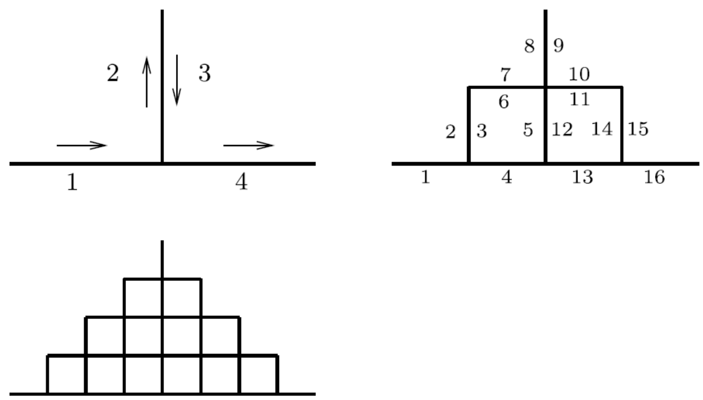
شکل ۱۴.۷: مجموعه باز $\mathcal{O}$ در تمرین ۱۳

۱۴. نشان دهید اگر $\ell < ۱/۲$، خم فون کخ $t \mapsto \mathcal{K}^\ell(t)$ در تمرین ۱۳ یک خم ساده است.

راهنمایی: ملاحظه کنید اگر $t = \sum_{j=۱}^{\infty} a_j/۴^j$ و $a_j = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$، آنگاه

$$\{\mathcal{K}(t)\} = \bigcap_{j=۱}^{\infty} S_{a_j}(\cdots S_{a_۲}(S_{a_۱}\overline{O}))).$$

۱۵. توجه کنید اگر در تعریف فون کخ در تمرین ۱۳، قرار دهیم $\ell = ۱/۲$، به «خم فضا پرکن» می‌رسیم، که مثلث سمت راست را پر می‌کند و رئوس آن $(۰,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۱/۲,۱/۲)$ هستند. سه مرحله اول این روش ساخت، با ردگیری بازه‌ها با ترتیب معین در شکل ۱۵.۷ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۵.۷: سه مرحله اول خم فون کخ برای $\ell = ۱/۲$

۱۶. ثابت کنید خم فون کخ $t \mapsto \mathcal{K}^{\ell}(t)$، $۱/۴ < l < ۱/۲$، پیوسته است اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست.

راهنمایی: اگر $\mathcal{K}'(t)$ برای یک t موجود باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{K}(u_n) - \mathcal{K}(v_n)}{u_n - v_n},$$

باید موجود باشد، که در آن $u_n \leq t \leq v_n$ و $u_n - v_n \to ۰$. همچنین $u_n = k/۴^n$ و $v_n = (k+۱)/۴^n$ را انتخاب کنید.

۱۷. برای یک مجموعه فشرده E در $\mathbb{R}^d$، $\#(\epsilon)$ را حداقل تعداد گوی‌ها با شعاع ϵ که E را می‌پوشاند، تعریف کنید. همواره زمانی که $\epsilon \to ۰$ داریم

$$\#(\epsilon) = O(\epsilon^{-d})$$

و اگر E متناهی باشد، $\sharp(\epsilon) = O(۱)$.
بعد پوششی E که با $\dim_C(E)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت $\inf \beta$، طوری تعریف می‌شود که وقتی $\epsilon \to ۰$، $\#(\epsilon) = O(\epsilon^{\beta})$.
با اثبات نامساوی‌های زیر به‌ازای هر $\delta > ۰$، نشان دهید $\dim_C(E) = \dim_M(E)$ و $\dim_M$ بعد مینکوفسکی تعریف شده در بخش ۱.۲.۷ است.

الف. $m(E^\delta) \leq c\sharp(\delta)\delta^d$.

ب. $\#(\delta) \leq c' m(E^\delta)\delta^{-d}$.

راهنمایی: برای اثبات (ب)، لم ۲.۳ فصل ۳ را به کار ببرید، تا گردایه‌ای از گوی‌های مجزای $B_1, B_2, ..., B_N$ به شعاع $\delta/۳$ با مراکز در E بیابید، به‌طوری‌که «سه برابر» آن‌ها $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \cdots, \widetilde{B}_N$

(به شعاع δ) E را بپوشاند. اگر $Nm(B_j) = cN\delta^d \leq m(E^\delta)$، آنگاه $\sharp(\delta) \leq N$، چون گوی‌های B_j مجزا و مشمول در E^δ هستند.

۱۸. فرض کنید E مجموعه‌ای فشرده در $\mathbb{R}^d$ باشد.

الف. ثابت کنید $\dim(E) \leq \dim_M(E)$ که $\dim$ و $\dim_M$، به ترتیب بعدهای هاسدورف و مینکوفسکی هستند.

ب. در این حالت، ثابت کنید اگر $E = \{0, 1/\log 2, 1/\log 3, ..., 1/\log n, ...\}$، آنگاه $\dim_M E = 1$ و نیز $\dim E = 0$.

۱۹. نشان دهید ثابت c_d موجود است، که تنها به بعد d وابسته است، به‌طوری‌که هرگاه E مجموعه‌ای فشرده باشد،

$$m(E^{2\delta}) \leq c_d m(E^\delta).$$

راهنمایی: تابع ماکزیمال f^* را برای $f = \chi_{E^\delta}$ درنظر بگیرید و قرار دهید $c_d = 6^d$.

۲۰. نشان دهید اگر E مجموعه‌ای خود متشابه باشد که در قضیه ۲۰.۷ مطالعه شد، آنگاه بعد مینکوفسکی برابر با بعد هاسدورف دارد.

راهنمایی: هر F_k اجتماعی از m^k گوی به شعاع cr^k است. از طرف دیگر طبق لم ۲۱.۷، می‌توان دید که اگر $\epsilon = r^k$، آنگاه

هرگوی به شعاع ϵ می‌تواند حداکثر شامل c' راس از k امین نسل باشد. بنابراین حداقل $m^k c'$ گوی، F را می‌پوشاند.

۲۱. از بازه یکه، یک چهارم‌های دوم وچهارم (بازه‌های باز) را حذف کنید. این فرایند را در دو بازه بسته باقی‌مانده تکرار کنید و به همین ترتیب ادامه دهید. فرض کنید F مجموعهٔ حدی به‌صورت

$$F = \{x : x = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k/۴^k, a_k = ۰ \text{ یا } ۲\},$$

باشد. ثابت کنید $۰ < m_{۱/۲}(F) < \infty$.

۲۲. فرض کنید F مجموعه‌ای خود متشابه باشد که از قضیه ۱۷.۷ نتیجه می‌شود.

الف. نشان دهیداگر $m \leq ۱/r^d$، آنگاه به ازای $i \neq j$، $m_d(F_i \bigcap F_j) = ۰$.

ب. در این حالت، اگر $m \geq ۱/r^d$، ثابت کنید برای $i \neq j$، $F_i \bigcap F_j$ تهی نیست.

ج. تحت مفروضات قضیه ۲۰.۷، برای $\alpha = \log m / \log(۱/r)$ و $i \neq j$، ثابت کنید $m_\alpha(F_i \bigcap F_j) = ۰$.

۲۳. فرض کنید $S_1, ..., S_m$ با نسبت $0 < r < 1$، متشابه باشند. به‌ازای هر مجموعه E قرار دهید

$$\widetilde{S}(E) = S_1(E) \bigcup ... \bigcup S_m(E),$$

و فرض کنید F، مجموعه فشرده ناتهی منحصربفرد با تعریف $\widetilde{S}(F) = F$ باشد.

الف. اگر $\bar{x} \in F$، نشان دهید مجموعه نقاط $\{\widetilde{S}^n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ در F چگال است.

ب. نشان دهید F در حالت زیر **همگن** است: اگر $x_0 \in F$ و B گوی بازی به مرکز x_0 باشد، آنگاه $F \bigcap B$ شامل مجموعه‌ای متشابه با F می‌شود.

۲۴. فرض کنید E یک زیرمجموعه بورل از $\mathbb{R}^d$ با $\dim E < 1$ باشد. ثابت کنید E کلا ناهمبند است، یعنی هر دو نقطه متمایز در E به مؤلفه‌های همبندی مختلف تعلق دارند.

راهنمایی: $x, y \in E$ را ثابت بگیرید، و نشان دهید $f(t) = |t - x|$ لیپ شیتس از مرتبه ۱ است، و بنابراین $\dim f(E) < 1$. نتیجه بگیرید که $f(E)$ دارای متمم چگال در $\mathbb{R}$ است. r را در متمم $f(E)$ بگیرید، به‌طوری‌که $0 < r < f(y)$ و از این استفاده کنید که

$$E = \{t \in E : |t - x| < r\} \cup \{t \in E : |t - x| > r\}.$$

۲۵. فرض کنید $F(t)$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی دلخواهی روی $\mathbb{R}$ باشد و $\gamma \in S^{d-1}$. در این‌صورت، مجموعه اندازه‌پذیر E در $\mathbb{R}^d$ موجود است، به‌طوری‌که $F(t) = m_{d-1}(E \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma})$.

۲۶. قضیه ۳۰.۷ به‌ازای $d \geq 4$ می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود. $C^{k,\alpha}$ را رده توابع $F(t)$ هایی روی $\mathbb{R}$ تعریف کنید که C^k هستند و برای آنها $F^{(k)}(t)$ در شرط لیپ شیتس با توان α صدق می کند.

اگر E اندازه متناهی داشته باشد، آنگاه تقریبا به‌ازای هر

$$\gamma \in S^{d-1}$$

تابع $m(E \bigcap \mathcal{P}_{t,\gamma})$ در $C^{k,\alpha}$ است برای $k = (d-3)/2$ و $\alpha < \frac{1}{2}$، اگر d فرد باشد و $d \geq 3$ و برای $k = (d-4)/2$، $\alpha < 1$، اگر d زوج باشد و $d \geq 4$.

۲۷. نشان دهید اگر از سمت راست نامساوی ۲ در قضیه ۳۴.۷، $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ را حذف کنیم، اصلاحیه برقرار نیست.

راهنمایی: $\mathcal{R}^*(f_\epsilon)$ را درنظر بگیرید که در آن f_ϵ به‌صورت $f_\epsilon(x) = (|x| + \epsilon)^{-d+\delta}$، برای $|x| \leq 1$ و δ ثابت، $0 < \delta < 1$ و $\epsilon \to 0$، تعریف می‌شود.

۲۸. یک مجموعه فشرده $E \subset \mathbb{R}^d$، $d \geq ۳$ را طوری بسازید که

$$m_d(E) = ۰$$

، با این حال E شامل انتقال هر پاره‌خط با طول یکه در $\mathbb{R}^d$ باشد. (در حالی که مثال‌های خاصی از این مجموعه‌ها به راحتی از حالت $d = ۲$ به‌دست می‌آید، تعیین حداقل بعد هاسدورف درمیان همه‌ی مجموعه‌های این چنینی یک مسأله باز است.)

۶.۷ مسائل

۱. فرایند زیر را برای ساختن دو مجموعه U و V انجام دهید، به‌طوری‌که

$$\dim U = \dim V = ۰$$

اما $\dim(U \times V) \geq ۱$.

فرض کنید $I_۱, \cdots, I_n$ به‌صورت زیر داده شده باشند:

- هر I_j دنباله متناهی از اعداد صحیح مثبت متوالی است، به این معنا که برای هر j و برای A_j و B_j داده شده

$$I_j = \{n \in \mathbb{N} : A_j \leq n \leq B_j\}.$$

- به‌ازای هر j، $I_{j+۱}$ سمت راست I_j است، یعنی $A_{j+۱} > B_j$.
فرض کنید $U \subset [۰,۱]$ شامل همه x هایی باشد که وقتی در بسط دودویی به‌صورت $x = .a_۱a_۲...a_n$ نوشته می‌شود، دارای این خاصیت باشد که هرگاه $n \in \bigcup_j J_j$، داریم $a_n = ۰$.
همچنین فرض کنید A_j و B_j (وقتی که $j \to \infty$) با سرعت به بی‌نهایت میل کند، مثلا $B_j/A_j \to \infty$ و $A_{j+۱}/B_j \to \infty$.
همچنین فرض کنید I_j بلوک‌های مکمل از اعداد صحیح است، به این معنا که

$$J_j = \{n \in \mathbb{N} : B_j < n < A_{j+۱}\},$$

فرض کنید $V \subset [۰,۱]$ شامل همه $x = .a_۱a_۲ \cdots a_n \cdots$ باشد که $a_n = ۰$ هرگاه $n \in \bigcup_j J_j$. ثابت کنید U و V ویژگی مورد نظر را دارند.

۲*. نامساوی ایزو قطری موارد زیر را بیان می‌کند: اگر E زیرمجموعه‌ای کراندار $\mathbb{R}^d$ باشد و $diamE = \sup\{|x-y| : x,y \in E\}$، آنگاه

$$m(E) \leq v_d(\frac{diamE}{۲})^d.$$

که در آن v_d حجم گوی واحد در $\mathbb{R}^d$ را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، درمیان مجموعه‌هایی با قطر داده شده، این گوی حجم

ماکزیمم دارد. به وضوح، کافی است نامساوی را برای $\bar{E}$ به جای E اثبات کنید. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم E فشرده است.

الف. نامساوی را در حالت خاص اثبات کنید، یعنی زمانی که E متقارن است، یعنی $-x \in E$، هرگاه $x \in E$.
به‌طور کلی، با به کابردن یک تکنیک که متقارن سازی استینر [1] نامیده می‌شود خود را به حالت تقارن تقلیل می‌دهیم. اگر ℓ بردار یکه در $\mathbb{R}^d$ باشد و $\mathcal{P}$ یک صفحه عمود بر e باشد، متقارن سازی استینر از E نسبت به E به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$S(E,e) = \{x + te : x \in \mathcal{P}, |t| \leq ۱/۲L(E;e;x)\},$$

که در آن $L(E,e,x) = m(\{t \in \mathbb{R} : x + t \cdot e \in E\})$ و m اندازه لبگ را نشان می‌دهد. توجه کنید $x + te \in S(E,e)$، اگر و فقط اگر $x - te \in S(E,e)$.

ب. ثابت کنید $S(E,e)$ زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر کراندار از $\mathbb{R}^d$ است که در $m(S(E,e)) = m(E)$ صدق می‌کند.
راهنمایی: قضیه فوبینی را به کار ببرید.

1. Steiner

ج. نشان دهید که $diamS(E,e) \leq diamE$.

د. اگر ρ دوران باشد که E و $\mathcal{P}$ را پایا نگه می‌دارد، نشان دهید که،

$$\rho S(E,e) = S(E,e).$$

ه. سرانجام، پایه استاندارد $\{e_1,...,e_d\}$ از $\mathbb{R}^d$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $E_0 = E$، $E_1 = S(E_0,e_1)$، $E_2 = S(E_1,e_2)$ و به همین ترتیب ادامه دهید. از این حقیقت که E_d متقارن است، استفاده کنید تا نامساوی ایزو قطری را ثابت کنید.

و. با استفاده از نامساوی ایزو قطری نشان دهید، به‌ازای هر مجموعه بورل E در $\mathbb{R}^d$، $m(E) = \frac{v_d}{2^d}m_d(E)$.

۳. فرض کنید S یک تشابه است.

الف. نشان دهید S یک پاره‌خط را به یک پاره‌خط می‌نگارد.

ب. نشان دهید اگر L_1 و L_2 دو پاره خط باشند که زاویه α را می‌سازند، آنگاه $S(L_1)$ و $S(L_2)$ زاویه α یا $-\alpha$ را می‌سازند.

ج. نشان دهید هر تشابه، تجزیه‌ای از یک انتقال، یک دوران (با احتمال کمی) و یک انبساط است.

۴. موارد زیر تعمیمی از ساختار تابع کانتور-لبگ را به‌دست می‌دهد.

فرض کنید F مجموعه‌ای فشرده در قضیه ۱۷.۷ باشد که از طریق تشابه‌های $S_1, S_2, ..., S_m$ با نسبت $0 < r < 1$ تعریف می‌شود. اندازه بورل منحصربفرد μ با تکیه‌گاه F موجود است، به‌طوری‌که $\mu(F) = 1$ و به‌ازای هر مجموعه بورل E،

$$\mu(E) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mu(S_j^{-1}(E)).$$

در این حالت زمانی که F مجموعه کانتور است، تابع کانتور–لبگ، $\mu([0, x])$ است.

۵. قضیه‌ای از هاسدورف را اثبات کنید: هر زیر مجموعه فشرده K، از $\mathbb{R}^d$ تصویر پیوسته‌ای از مجموعه کانتور $\mathcal{C}$ است.

راهنمایی: K را با 2^{n_1} (یک n_1) گوی به شعاع ۱ بپوشانید، مثل $B_1, ..., B_l$ (با تکرارهای محتمل). فرض کنید $K_{j_1} = K \bigcap \bar{B}_{j_1}$ و هر K_{j_1} را با 2^{n_2} گوی به شعاع ۱/۲ بپوشانید تا مجموعه‌های فشرده‌ی K_{j_1, j_2} را بیابید و به همین ترتیب ادامه دهید. $t \in \mathcal{C}$ را به‌صورت بسط در پایه سه بیان کنید و برای t نقطه‌ای منحصربفرد در K نسبت دهید که به‌ازای $j_1, j_2, \cdots$ مناسب، به‌صورت اشتراک $K_{j_1} \bigcap K_{j_1, j_2} \bigcap \cdots$ تعریف می‌شود. برای اثبات پیوستگی ملاحظه کنید اگر دو نقطه در مجموعه کانتور به هم نزدیک باشند، آنگاه بسط‌های در پایه سه آن‌ها در مراتب بالا

برابر هستند.

۶. زیرمجموعه فشرده K از $\mathbb{R}^d$ **به‌طور یکنواخت همبند موضعی** نامیده می‌شود هرگاه، $\epsilon > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ وجود دارد، به‌طوری‌که اگر $x, y \in K$ و $|x - y| < \delta$، خم پیوسته γ در K بین x و y موجود است، به‌طوری‌که $\gamma \subset B_\epsilon(x)$ و $\gamma \subset B_\epsilon(y)$.

با استفاده از مسأله قبل می‌توان نشان داد که یک زیر مجموعه فشرده K از $\mathbb{R}^d$ تصویر پیوسته‌ای از بازه یکه $[۰, ۱]$ است، اگر وفقط اگر K به‌طور یکنواخت همبند موضعی باشد.

۷. تعمیمی از قضیه ۲۶.۷ را فرمول بندی و ثابت کنید، با این تأکید که وقتی مجموعه‌هایی مناسب با اندازه صفر حذف شوند، یک یکنواختی حافظ اندازه از بازه یکه در $\mathbb{R}$ و مکعب یکه در $\mathbb{R}^d$ وجود دارد.

*۸. یک خم پیوسته ساده در صفحه با اندازه دو بعدی مثبت وجود دارد.

۹. فرض کنید E مجموعه فشرده‌ای در $\mathbb{R}^{d-۱}$ باشد. نشان دهید

$$\dim(E \times I) = \dim(E) + ۱,$$

که در آن I بازه یکه در I است.

۱۰. فرض کنید $\mathcal{C}_\xi$ مجموعه کانتور باشد که در تمرین ۸ و ۱۱ در نظر گرفته شد. اگر $\xi < ۱/۲$، آنگاه $\mathcal{C}_\xi + \lambda\mathcal{C}_\xi$ به‌ازای تقریبا هر λ، اندازه لبگ مثبت دارد.

یادداشت ها و منابع

چندین کتاب ارزشمند دیگر وجود دارد که بسیاری از موضوعات مورد بحث در اینجا را پوشش می‌دهد. از جمله این متون می‌توان به ریس و ناگی [۲۷]، ویدن و زیگموند [۳۳]، فولند[۱۳] و بروکنر و همکاران[۴] اشاره کرد.

مقدمه

نقل قول، ترجمه ی متن نامه‌ای از هرمیت به اشتیلیس [۱۸]است.

فصل۱

ترجمه‌ای از یک متن فرانسوی [۳] است.

برای جزئیات بیشتر در مورد اصل موضوع انتخاب، اصل ماکزیمال هاسدورف، و اصل خوش ترتیبی به دلوین[۷] مراجعه کنید.

برای بررسی نتایج مربوط به نامساوی برون-مینکوفسکی ، به مقاله گاردنر [۱۴]مراجعه کنید.

فصل۲

نقل قول، متنی از پیش گفتار چاپ اول کتاب لبگ در مورد انتگرالگیری [۲۰] است.

دلوین [۷] شامل بحث در مورد فرضیه پیوستار است.

فصل۳

نقل قول، مقاله ای از هاردی و لیتلوود [۱۵] است.

هاردی و لیتلوود قضیه ۱,۱ را در حالت یک بعدی با استفاده از ایده باز آرایی اثبات کردند. فرم حاضر بنابر وینر است.

برداشت ما از نامساوی ایزوپریمتریک براساس فدرر[۱۱] است. این کار همچنین شامل تعمیم قابل توجه و بسیاری از مطالب اضافی در نظریه اندازه هندسی مورد است.

اثبات پوشش بسیکوویچ در لم مسئله *۳ در ماتیلا [۲۲] است .

برای محاسبه توابع با تغییر کراندار در $\mathbb{R}^d$ ایوانز و کاریپی [۸] را ببینید.

رئوس مطالب برهان مسأله * ۷ب در انتهای فصل ۵ یافت می شود.

نتیجه قسمت (ب) مسأله ۸* مسأله ای از اس. ساکس است و برهانش به عنوان نتیجه ای از قسمت (الف) در استین [۳۱] یافت

می شود.

فصل ۴

نقل قول از مقدمه مقاله پلانشرل [۲۵] ترجمه شده است.

گزارشی از نظریه توابع تقریبا متناوب که در مسئله ۲* لمس می شود، را در بوئر[۲] می توان یافت.

نتایج مسائل ۴* و ۵* در زیگموند [۳۵] به ترتیب در فصل های ۵ و ۷ هستند.

برای اطلاعات بیشتر در مورد سیستم های اشتروم- لیوویل، چند جمله ای های لاگرانژ و توابع هرمیتی، بیرخوف و روتا [۱] را ببینید.

فصل ۵

برای شرح اصل دیریکله و کاربردهای آن به کوران[۶] مراجعه کنید. مسأله دیریکله برای دامنه های دلخواه در $\mathbb{R}^{۲}$ و مفهوم مربوط به ظرفیت لگاریتمی مجموعه ها در رانسفورد [۲۶] مطرح می شود. فولند [۱۲] شامل راه حل دیگری برای مسئله دیریکله(موجود در $\mathbb{R}^d$، $d \geq ۲$ است؛ که اصل دیریکله را به کار نمی برد.

نتیجه مربوط به وجود نگاشت همدیس در مسأله ۳* در فصل ۷ زیگموند [۳۵] بیان می شود.

فصل ۶

نقل قول ترجمه ای از زبان آلمانی در متنی از سی. کاراتئودوری [۵] است.

پترسن [۲۴] سخنرانی روشمندی در مورد نظریه ارگودیک، شامل اثبات قضیه عنوان شده در مسئله ۷* را ارائه می دهد.

احکام مربوط به همساز های کروی طرح شده در مسئله ۴*، در فصل ۴ از استین و ویس [۳۲] یافت می شود.

برای ارائه مقدمه ای در مورد کسر مسلسل به هاردی و ویس [۱۶] ارجاع می دهیم.

ارتباط آنها با نظریه ارگودیک در ریل- ناردوسکی [۲۸] مورد بحث قرار گرفته است.

فصل۷

نقل قول، ترجمه ی متن آلمانی مقاله ی هاسدورف [۱۷] است در حالی که نقل قول ماندلبورت از کتابش [۲۱] است.

همچنین کتاب ماندلبروت شامل بسیاری از نمونه های جالب فراکتالها است که با تنظیمات خاصی به وجود آمده است ؛ و از جمله شامل بحث در مورد کار ریچاردسون روی خطوط ساحلی است. (به خصوص فصل ۵ را ببینید.)

فالکونر [۱۰] رفتار های روشمندی از فراکتال ها و بعد هاسدورف ارائه می دهد.

برای جزئیات بیشتر در مورد خم فضا-پرکن، به [۲۹] مراجعه می کنیم؛که شامل ساختار خمی است که در مسئله ۸* به وجود می آید.

رساله ای از فالکونر [۱۰] نیز شامل ساختار دیگری از مجموعه بسیکوویچ است و همچنین این واقعیت که چنین مجموعه هایی لزوما باید بعد داشته باشند. مجموعه بسیکوویچ ویژه در متنی از کاهان [۱۹] توصیف می شود. اما این واقعیت که اندازه آن صفر است، به ایده های بیشتری احتیاج دارد، به عنوان مثال در پرس و همکاران [۳۰] ببینید.

منظم بودن مجموعه ها در $\mathbb{R}^d$، $d \geq ۳$ و تقریب ها برای تابع ماکزیمال مرتبط با تبدیل رادون در فالکونر [۹]، ابرلین و استین [۲۳] است.

نظریه مجموعه های بسیکوویچ در ابعاد بالاتر، و همچنین بعضی از موضوعات جالبتر را در پژوهشی از ولف [۳۴] می توان یافت.

کتاب‌نامه

[1] G. Birkhofi and G. C. Rota. *Ordinary difierential equations.* Wiley, New York, 1989.

[2] H. A. Bohr. *Almost periodic functions.* Chelsea Publishing Company, New York, 1947.

[3] E. Borel. *Le»cons sur la theorie des fonctions.* Gauthiers-Villars, Paris, 1898.

[4] J. B. Bruckner, A. M. Bruckner, and B. S. Thomson. *Real Analysis.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[5] C. Caratheodory. *Vorlesungen ˜uber reelle Funktionen.* Leipzig, Berlin, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1918.

[6] R. Courant. *Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces.* Interscience Publishers, New York, 1950.

[7] K. J. Devlin. *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and flne properties of functions.* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[9] K. J. Falconer. Continuity properties of k-plane integrals and Besicovitch sets. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc,* 87:221-226, 1980.

[10] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1985.

[11] H. Federer. *Geometric measure theory.* Springer, Berlin and New York, 1996.

[12] G. B. Folland. *Introduction to partial difierential equations.* Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.

[13] G. B. Folland. *Real Analysis: modern techniques and their applications.* Wiley, New York, second edition, 1999.

[14] R. J. Gardner. The Brunn-Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc,* 39:355-405, 2002.

[15] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A maximal theorem with function theoretic applications. *Acta. Math,* 54:81-116, 1930.

[16] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the Theory of Numbers.* Oxford University Press, London, flfth edition, 1979.

[17] F. Hausdorfi. Dimension und ˜ausseres Mass. *Math. Annalen,* 79:157- 179, 1919.

[18] C. Hermite. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes.* GauthierVillars, Paris, 1905. Edited by B. Baillaud and H. Bourget.

[19] J. P. Kahane. Trois notes sur les ensembles parfaits lineaires. *Enseignement Math.,* 15:185-192, 1969.

[20] H. Lebesgue. *Le»cons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904. Preface to the flrst edition.

[21] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature.* W. H. Freeman, San Francisco, 1982.

[22] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[23] D. M. Oberlin and E. M. Stein. Mapping properties of the Radon transform. *Indiana Univ. Math.* J, 31:641-650, 1982.

[24] K. E. Petersen. *Ergodic theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[25] M. Plancherel. La theorie des equations integrales. *L'Enseignement math.,* 14e Annee:89-107, 1912.

[26] T. J. Ransford. *Potential theory in the complex plane.* London Mathematical Society student texts, 28. Cambridge, New York: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.

[27] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis.* New York, Ungar, 1955.

[28] C. Ryll-Nardzewski. On the ergodic theorem. ii. Ergodic theory of continued functions. *Studio Math.,* 12:74-79, 1951.

[29] H. Sagan. *Space-filling curves.* Universitext. Springer-verlag, New York,1994.

[30] Y. Peres, K. Simon, and B. Solomyak. Fractals with positive lenght and zero Buffon needdle probability . *Amer.Math. Monthly,* 110:314-325, 2003.

[31] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton University Press, Princeton,NJ, 1993.

[32] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.

[33] R. L. Wheeden and A. Zygmund. *Measure and integral: an introduction to real analysis.* Marcel Dekker, New York, 1977.

[34] T. Wolff. Recent work connected with the Kakeya problem. *Prospects in Mathematics,Princeton,* NJ, 31:129–162, 1996. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[35] A. Zygmund. *Trigonometric Series,* volume I and II. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1959. Reprinted 1993.

University of Guilan Press

Real Analysis

Measure Theory, Integration & Hilbert Spaces

Edited by:

Elias M. Stein & Rami Shakarchi

Translated by:

Marzieh Shams Yousefi, Ph.D

Tahereh Khazaei, M.Sc